

多个球形液滴的蠕动流

吴望一 钟伯文

(北京大学力学系, 1984年1月6日收到)

摘 要

本文利用 Sampson 奇点及配置法求解多个球形液滴在蠕动流中的阻力系数. 计算了由不同数目液滴组成的液滴串在不同液滴间距下的阻力系数并揭示了粘度比对遮蔽效应和端缘效应的影响. 文章还对方法的收敛性进行了研究.

本文利用 Gluckman M. J. 等人^[1]在处理多个刚性球时发展起来的配置法研究了多个液滴的蠕动流, 它在生物工程及化学工程等领域有着重要的应用. 写出球形液滴内外区域的普遍解, 并令其在分界面配置点上满足运动学和动力学正配条件, 组得到一组线性代数方程组以确定解中的待定系数. 利用任何一种矩阵求逆技巧求解线性方程组即得问题的近似解. 本文第一节叙述多个液滴问题的数学提法. 第二节介绍并分析数值计算结果.

一、多个液滴问题的提法

考虑速度为 U 的来流绕 M 个大小相同的球形液滴的蠕动流. 来流的方向和球心联线的方向重合, 球形液滴的半径为 a , 且沿球心联线方向等距地放置, 相邻两球心之间的距离为 $2d$. 取柱坐标系 (R, Z, ϕ) , Z 轴指向球心联线的方向, 原点放在首尾两球形液滴球心联线的中点上(见图1). 液滴内外的流动区域及流体的粘性系数分别记为 $\Omega_j^{(i)}$, $\Omega^{(o)}$ 及 $\mu^{(i)}$, $\mu^{(o)}$, 其中 $\Omega_j^{(i)}$ 表第 j 个液滴的内部区域. 假设液滴的表面张力足够大使其在运动过程中保持球形不变. 引入特征速度 U , 特征长度 a 及特征压力 $\frac{\mu^{(o)}U}{a}$ (区域 $\Omega^{(o)}$) 或 $\frac{\mu^{(i)}U}{a}$ (区域 $\Omega_j^{(i)}$). 将坐

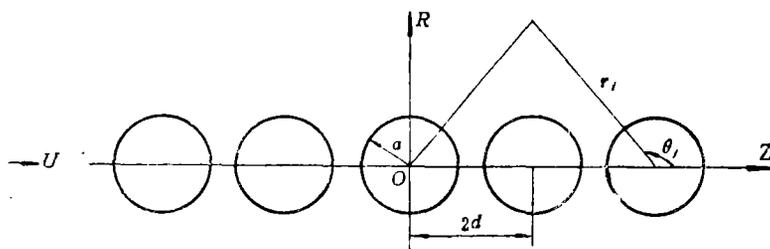


图 1

标和物理量无量纲化, 则液滴内外的流动满足下列无量纲形式的方程

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

这里 \mathbf{v} 和 p 分别为无量纲速度矢量和无量纲压力.

由于流动的轴对称性, 存在着无量纲流函数 ψ , 使

$$v_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad v_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (1.2)$$

其中 v_R, v_Z 分别为速度矢量在 R, Z 轴上的投影. 对(1.1)式取旋度并利用(1.2)式可推出 ψ 满足下列四阶微分方程

$$D^2(D^2\psi) = 0 \quad (1.3)$$

其中 D^2 为广义 Stokes 算子, 它在柱坐标系中的表达式为

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (1.4)$$

在柱坐标系中, 压力 p 和 ψ 由下式联系起来

$$\frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (D^2\psi), \quad \frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} (D^2\psi) \quad (1.5)$$

球形液滴内部区域的解由下列无穷级数给出:

$$\left. \begin{aligned} v_Z^{(j)} &= \sum_{n=2}^{\infty} [A_{nj} G_n^{(1)}(R, Z-Z_j) + B_{nj} G_n^{(2)}(R, Z-Z_j)] \\ v_R^{(j)} &= \sum_{n=2}^{\infty} [A_{nj} G_n^{(5)}(R, Z-Z_j) + B_{nj} G_n^{(6)}(R, Z-Z_j)] \\ \psi^{(j)} &= \sum_{n=2}^{\infty} [A_{nj} G_n^{(3)}(R, Z-Z_j) + B_{nj} G_n^{(4)}(R, Z-Z_j)] \\ p^{(j)} &= p_0 + \sum_{n=2}^{\infty} B_{nj} \frac{4n+2}{n-1} G_{n+1}^{(1)}(R, Z-Z_j) \end{aligned} \right\} (j=1, \dots, M) \quad (1.6)$$

其中上标 i 代表内部区域的解. A_{nj}, B_{nj} 为待定的系数. p_0 为球心处的压力, 不妨取为零. 而

$$Z_j = (-M-1+2j)d \quad (j=1, \dots, M) \quad (1.7)$$

函数 $G_n^{(k)}$ 具有下列表达式

$$\left. \begin{aligned} G_n^{(1)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{\frac{n-2}{2}} P_{n-2}(\xi) \\ G_n^{(2)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{\frac{n}{2}} [P_{n-2}(\xi) + 2J_n(\xi)] \\ G_n^{(3)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{\frac{n}{2}} J_n(\xi) \\ G_n^{(4)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{\frac{n+2}{2}} J_n(\xi) \\ G_n^{(5)}(R, Z) &= -\frac{n-2}{R} (R^2 + Z^2)^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(\xi) \\ G_n^{(6)}(R, Z) &= -\frac{n-2}{R} (R^2 + Z^2)^{\frac{n+1}{2}} J_{n-1}(\xi) - \frac{2Z}{R} (R^2 + Z^2)^{\frac{n}{2}} J_n(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

其中 $\zeta = Z(R^2 + Z^2)^{-1/2}$, P_n 为 n 阶 Legendre 多项式, J_n 为第一类 n 阶 $-1/2$ 次 Gegenbauer 函数.

球形液滴外部区域 $\Omega^{(o)}$ 的解可表示成下列无穷级数的形成

$$\left. \begin{aligned} v_z^{(o)} &= 1 + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} [C_{nj} F_n^{(1)}(R, Z-Z_j) + D_{nj} F_n^{(2)}(R, Z-Z_j)] \\ v_R^{(o)} &= \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} [C_{nj} F_n^{(5)}(R, Z-Z_j) + D_{nj} F_n^{(6)}(R, Z-Z_j)] \\ \psi^{(o)} &= \frac{R^2}{2} + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} [C_{nj} F_n^{(3)}(R, Z-Z_j) + D_{nj} F_n^{(4)}(R, Z-Z_j)] \\ p^{(o)} &= p_{\infty} + \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{\infty} D_{nj} \frac{4n-6}{n} F_{n-1}^{(1)}(R, Z-Z_j) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

其中上标 (o) 代表外部区域的解, p_{∞} 为无穷远处压力, C_{nj} , D_{nj} 为待定系数, 而函数 $F_n^{(k)}$ 由下列表达式确定

$$\left. \begin{aligned} F_n^{(1)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{-\frac{n+1}{2}} P_n(\zeta) \\ F_n^{(2)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \{P_n(\zeta) + 2J_n(\zeta)\} \\ F_n^{(3)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{-\frac{n-1}{2}} J_n(\zeta) \\ F_n^{(4)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{-\frac{n-3}{2}} J_n(\zeta) \\ F_n^{(5)}(R, Z) &= (R^2 + Z^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{n+1}{R} J_{n+1}(\zeta) \\ F_n^{(6)}(R, Z) &= (n+1)(R^2 + Z^2)^{-\frac{n-2}{2}} \frac{1}{R} J_{n+1}(\zeta) - 2Z(R^2 + Z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{R} J_n(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

本问题的边界条件为: 在球形液滴表面 $r_j=1$ 上 ($j=1, \dots, M$), 法向速度为零给出

$$v_z^{(s)} \cos \theta_j + v_R^{(s)} \sin \theta_j = 0, \quad v_z^{(o)} \cos \theta_j + v_R^{(o)} \sin \theta_j = 0 \quad (1.11)$$

其中 $r_j = \sqrt{R^2 + (Z-Z_j)^2}$, $\theta_j = \text{tg}^{-1} \frac{R}{Z-Z_j}$. 内外区域切向速度连续给出

$$v_R^{(s)} \cos \theta_j - v_z^{(s)} \sin \theta_j = v_R^{(o)} \cos \theta_j - v_z^{(o)} \sin \theta_j \quad (1.12)$$

此外, 切向应力连续要求

$$\begin{aligned} & \mu^{(s)} \left(\cos \theta_j \frac{\partial}{\partial Z} + \sin \theta_j \frac{\partial}{\partial R} \right) \left(\frac{v_R^{(s)} \cos \theta_j - v_z^{(s)} \sin \theta_j}{r_j} \right) \\ &= \mu^{(o)} \left(\cos \theta_j \frac{\partial}{\partial Z} + \sin \theta_j \frac{\partial}{\partial R} \right) \left(\frac{v_R^{(o)} \cos \theta_j - v_z^{(o)} \sin \theta_j}{r_j} \right) \end{aligned}$$

在无穷远处满足

$$\psi^{(o)} = R^2/2, \quad v_z^{(o)} = 1, \quad v_R^{(o)} = 0 \quad (1.13)$$

显然, (1.9) 式已满足无穷远处边界条件. 现在我们采用配置法求解. 截取无穷级数的前

N 项, 并使之在每个球面的 N 个选定的点上满足边界条件, 由此得到下列 $4MN$ 个方程确定 $4MN$ 个未知数 A_{nj} , B_{nj} , C_{nj} , D_{nj} ($n=2, \dots, N+1$; $j=1, \dots, M$).

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{N+1} \{ A_{nk} [G_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \cos \theta_{kk} + G_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \sin \theta_{kk}] \\
& \quad + B_{nk} [G_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \cos \theta_{kk} + G_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \sin \theta_{kk}] \} = 0 \\
& \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{N+1} \{ C_{nj} [F_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \cos \theta_{jk} + F_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \sin \theta_{jk}] \\
& \quad + D_{nj} [F_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \cos \theta_{jk} + F_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \sin \theta_{jk}] \} = -\cos \theta_{jk} \\
& \sum_{n=2}^{N+1} \{ A_{nk} [G_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \cos \theta_{kk} - G_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \sin \theta_{kk}] \\
& \quad + B_{nk} [G_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \cos \theta_{kk} - G_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \sin \theta_{kk}] \} \\
& \quad - \sum_{j=1}^M \sum_{n=2}^{N+1} \{ C_{nj} [F_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \cos \theta_{jk} - F_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \sin \theta_{jk}] \\
& \quad + D_{nj} [F_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \cos \theta_{jk} - F_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \sin \theta_{jk}] \} = \sin \theta_{jk} \\
& \sigma \sum_{n=2}^{N+1} \left\{ A_{nk} \left[\frac{\sin \theta_{kk} \cos \theta_{kk}}{r_k} (GR_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) - GZ_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k)) \right. \right. \\
& \quad + \frac{\cos^2 \theta_{kk}}{r_k} GZ_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) - \frac{\sin^2 \theta_{kk}}{r_k} GR_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \\
& \quad \left. \left. - G_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \frac{\cos \theta_{kk}}{r_k^2} + G_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \frac{\sin \theta_{kk}}{r_k^2} \right] \right. \\
& \quad + B_{nk} \left[\frac{\sin \theta_{kk} \cos \theta_{kk}}{r_k} (GR_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) - GZ_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k)) \right. \\
& \quad + \frac{\cos^2 \theta_{kk}}{r_k} GZ_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) - \frac{\sin^2 \theta_{kk}}{r_k} GR_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \\
& \quad \left. \left. - G_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \frac{\cos \theta_{kk}}{r_k^2} + G_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_k) \frac{\sin \theta_{kk}}{r_k^2} \right] \right\} \\
& \quad - \sum_{j=1}^m \sum_{n=2}^{N+1} \left\{ C_{nj} \left[\frac{\sin \theta_{jk} \cos \theta_{jk}}{r_j} (FR_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) - FZ_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j)) \right. \right. \\
& \quad + \frac{\cos^2 \theta_{jk}}{r_j} FZ_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) - \frac{\sin^2 \theta_{jk}}{r_j} FR_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \\
& \quad \left. \left. - F_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \frac{\cos \theta_{jk}}{r_j^2} + F_n^{(1)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \frac{\sin \theta_{jk}}{r_j^2} \right] \right. \\
& \quad \left. + D_{nj} \left[\frac{\sin \theta_{jk} \cos \theta_{jk}}{r_j} (FR_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) - FZ_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j)) \right. \right.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\cos^2 \theta_{jk}}{r_j} F Z_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) - \frac{\sin^2 \theta_{jk}}{r_j} F R_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \\ & - F_n^{(6)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \frac{\cos \theta_{jk}}{r_j^2} + F_n^{(2)}(\bar{R}_k, \bar{Z}_k - Z_j) \frac{\sin \theta_{jk}}{r_j^2} \left. \right\} = -\frac{1}{r_j^2} \sin \theta_{jk} \end{aligned}$$

其中 $\bar{R}_k, \bar{Z}_k (k=1, \dots, MN)$ 是球面上配置点的坐标, $r_j = \sqrt{\bar{R}_k + (\bar{Z}_k - Z_j)^2}$, $\theta_{jk} = \text{tg}^{-1} \frac{\bar{R}_k}{\bar{Z}_k - Z_j}$, $\sigma = \mu^{(4)}/\mu^{(0)}$, 而函数

$$\left. \begin{aligned} F R_n^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial R} F_n^{(1)}(R, Z) = -(n+1) F_{n+1}^{(6)}(R, Z) \\ F R_n^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial R} F_n^{(2)}(R, Z) = 4R F_n^{(1)}(R, Z) - (n+1) r^2 F_{n+1}^{(2)}(R, Z) \\ F R_n^{(6)} &= \frac{\partial}{\partial R} F_n^{(6)}(R, Z) = (n+1) F_{n+1}^{(1)}(R, Z) - \frac{1}{R} F_n^{(6)}(R, Z) \\ F R_n^{(6)} &= \frac{\partial}{\partial R} F_n^{(6)}(R, Z) = (n+1) F_{n+1}^{(2)}(R, Z) - 2Z F_n^{(1)}(R, Z) - \frac{1}{R} F_n^{(6)}(R, Z) \\ F Z_n^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial Z} F_n^{(1)}(R, Z) = -(n+1) F_{n+1}^{(1)}(R, Z) \\ F Z_n^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial Z} F_n^{(2)}(R, Z) = -(n+1) F_{n+1}^{(2)}(R, Z) + 2Z F_n^{(1)}(R, Z) \\ F Z_n^{(6)} &= \frac{\partial}{\partial Z} F_n^{(6)}(R, Z) = -(n+1) F_{n+1}^{(6)}(R, Z) \\ F Z_n^{(6)} &= \frac{\partial}{\partial Z} F_n^{(6)}(R, Z) = -(n+1) F_{n+1}^{(6)}(R, Z) + 2Z F_n^{(6)}(R, Z) - \frac{2}{R} F_n^{(6)}(R, Z) \\ G R_n^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial R} G_n^{(1)}(R, Z) = (n-2) G_{n-1}^{(6)}(R, Z) \\ G R_n^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial R} G_n^{(2)}(R, Z) = 4R G_n^{(1)}(R, Z) + (n-2) r^2 G_{n-1}^{(6)}(R, Z) \\ G R_n^{(6)} &= \frac{\partial}{\partial R} G_n^{(6)}(R, Z) = -(n-2) G_{n-1}^{(1)}(R, Z) - \frac{1}{R} G_n^{(6)}(R, Z) \\ G R_n^{(6)} &= \frac{\partial}{\partial R} G_n^{(6)}(R, Z) = -(n-2) G_{n-1}^{(2)}(R, Z) - 2Z G_n^{(1)}(R, Z) - \frac{1}{R} G_n^{(6)}(R, Z) \\ G Z_n^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial Z} G_n^{(1)}(R, Z) = (n-2) G_{n-1}^{(1)}(R, Z) \\ G Z_n^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial Z} G_n^{(2)}(R, Z) = (n-2) G_{n-1}^{(2)}(R, Z) + 2Z G_n^{(1)}(R, Z) \\ G Z_n^{(6)} &= \frac{\partial}{\partial Z} G_n^{(6)}(R, Z) = (n-2) G_{n-1}^{(6)}(R, Z) \\ G Z_n^{(6)} &= \frac{\partial}{\partial Z} G_n^{(6)}(R, Z) = (n-2) G_{n-1}^{(6)}(R, Z) + 2Z G_n^{(6)}(R, Z) - \frac{2}{R} G_n^{(6)}(R, Z) \end{aligned} \right\} (1.15)$$

这里 $r^2 = R^2 + Z^2$.

解出线性代数方程组 (1.14) 后, 求得 A_{nj} , B_{nj} , C_{nj} , D_{nj} . 球内和球外 Stokes 流动的近似表达式由 (1.6) 及 (1.10) 式完全确定. 第 j 个球的阻力系数 λ_j 由下式确定

$$\lambda_j = \frac{D_{2j}}{1.5} \quad (j=1, \dots, M) \quad (1.16)$$

二、数值计算结果

取两种不同的粘度比进行了数值计算. $\sigma = \mu^{(4)}/\mu^{(0)} = 55.58628$ 和 0.01799 , 它们分别代表水滴在空气中和气泡在水中的运动.

球面上配置点按照等分原则选取. 因为在 $\theta=0, \pi/2, \pi$ 这些点上, 系数矩阵有奇性, 所以我们用 $\delta, \pi-\delta$ 代替 $0, \pi$, 而用 $\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}+\delta$ 两个点来代替 $\pi/2$, 这里取 $\delta=0.01^\circ$.

为了检验上述方法的精度, 我们计算了单个球形液滴在蠕动流中所受的阻力系数并和准确解进行比较^[2], 结果列在表 1 中. 从表中可以看到, 不管那种 σ , 阻力系数很快收敛到六

表 1 单个液滴的阻力系数和准确解的比较

$\sigma \backslash M$	4	8	10	准确解
55.58628	0.994109	0.994109		0.994109
0.01799	0.672561	0.672557	0.672557	0.672557

位有效数字, 而且收敛值和准确解重合到小数点后面六位数. 由此可以得出结论, 方法的收敛性及精度是很好的.

通过计算不同间距两个球形液滴的阻力系数, 可以进一步考验方法的收敛性. 表 2 的结果清楚地说明配置法具有很好的收敛性. 对于 $d/a \geq 4$ 的情形, 只要取 $M=6$, 就能达到收敛到小数点后面五位数的结果. 即使对于 $d/a=1$, 即两球相互接触这一极强干扰的情况, 也

表 2 两个球形液滴的阻力系数

M	$\sigma=55.58628$					$\sigma=0.01799$				
	$d/a=1$	$d/a=2$	$d/a=4$	$d/a=8$	$d/a=16$	$d/a=1$	$d/a=2$	$d/a=4$	$d/a=8$	$d/a=16$
4	0.64324	0.73805	0.83985	0.90960	0.94987	0.46403	0.53900	0.59742	0.63269	0.65204
6	0.64203	0.73887	0.83990	0.90961	0.94988	0.46599	0.53896	0.59739	0.63268	0.65200
8	0.64172	0.73886	0.83990	0.90961	0.94988	0.46540	0.53900	0.59739	0.63268	0.65200
10	0.64210	0.73886				0.46553	0.53900			
12	0.64219					0.46567				
14	0.64219					0.46567				

只要取 $M=12$ 就能取得收敛到小数点后五位数的结果.

表 3 计算了 $d/a=2$ 时由不同数目的圆球组成的球形液滴串的阻力系数, 圆球个数取 2, 3, 4, 5, 6, 8 等几种情形. 计算结果还同时在图 2 和图 3 中画出. 本来, 每个圆球阻力系数的值是离散的, 但是为了清楚地显示不同液滴串阻力系数的变化情形, 我们将这些离散值用实线联接起来. 无论是从图 2 ($\sigma=55.58628$) 或图 3 ($\sigma=0.01799$) 都可以看出当液滴

表 3 $d/a=2$ 时不同数目组成的球形液滴串的阻力系数

M	$\sigma=55.58628$														
	2 个	3 个	4 个	5 个	6 个	8 个	8 个	8 个							
4	0.73805	0.68464	0.52024	0.65503	0.47874	0.63516	0.45638	0.43976	0.62042	0.44167	0.41881	0.59941	0.42497	0.39501	0.38541
6	0.73887	0.68482	0.52214	0.65513	0.48004	0.63522	0.45758	0.44050	0.62048	0.44277	0.41947	0.59946	0.42350	0.39556	0.38593
8	0.73886	0.68482	0.52211	0.65513	0.48002	0.63522	0.45756	0.44048	0.62048	0.44275	0.41946	0.59946	0.42349	0.39555	0.38592
10	0.73886		0.52211		0.48002		0.45756	0.44048		0.44275	0.41946		0.42349	0.39555	0.38592

$\sigma=0.01799$

4	0.53900	0.50322	0.42364	0.48344	0.39387	0.47012	0.37769	0.36575	0.46023	0.36692	0.35050	0.44609	0.35272	0.33291	0.32597
6	0.53896	0.50317	0.42357	0.48339	0.39381	0.47008	0.37763	0.36570	0.46021	0.36684	0.35045	0.44608	0.35267	0.33284	0.32591
8	0.53900	0.50320	0.42366	0.48341	0.39388	0.47010	0.37769	0.36575	0.46023	0.36690	0.35049	0.44609	0.35273	0.33288	0.32595
10	0.53900	0.50320	0.42366	0.48341	0.39388	0.47010	0.37769	0.36575	0.46023	0.36690	0.35049	0.44609	0.35273	0.33288	0.32595

表 4 6 个球组成的液滴串在不同间距下的阻力系数

M	$\sigma=55.58628$												
	$d/a=2$		$d/a=4$		$d/a=6$		$d/a=8$		$d/a=8$		$d/a=8$		
4	0.62042	0.44167	0.73045	0.62150	0.59852	0.83086	0.76874	0.75247	0.90176	0.86813	0.86847	0.86847	0.86847
6	0.62048	0.44277	0.73044	0.62159	0.59855	0.83083	0.76872	0.75245	0.90184	0.86815	0.86847	0.86847	0.86847
8	0.62048	0.44275	0.73044	0.62159	0.59855	0.83083	0.76872	0.75245	0.90184	0.86815	0.86847	0.86847	0.86847
10		0.44275	0.41946										

$\sigma=0.01799$													
4	0.46023	0.36692	0.53438	0.48006	0.46691	0.59177	0.56182	0.55347	0.62846	0.61262	0.60793	0.60793	0.60793
6	0.46021	0.36684	0.53434	0.48007	0.46688	0.59173	0.56178	0.55345	0.62848	0.61261	0.60791	0.60791	0.60791
8	0.46023	0.36690	0.53434	0.48007	0.46688	0.59173	0.56178	0.55345	0.62848	0.61261	0.60791	0.60791	0.60791
10	0.46023	0.36690	0.53434	0.48007	0.46688	0.59173	0.56178	0.55345	0.62848	0.61261	0.60791	0.60791	0.60791

串的长度增加时,中心球形液滴的阻力系数是减少的,这就是所谓的遮蔽作用.当球形液滴逼近液滴串端缘时,相邻液滴间的阻力系数发生急剧的变化,显示了强烈的端缘效应.当液滴串的长度增加时,中央部分球形液滴的阻力变化得越来越慢,当长度趋于无限时,每个圆球上的阻力将变成一样.虚线表示所有液滴串中端缘那个液滴的阻力系数.容易看出,液滴串增长时,虚线变得越来越水平,再次表明液滴串的强烈的遮蔽作用.

比较图 2 和图 3 可以看到,当粘度比变小时,遮蔽效应和端缘效应都减弱了,但曲线的

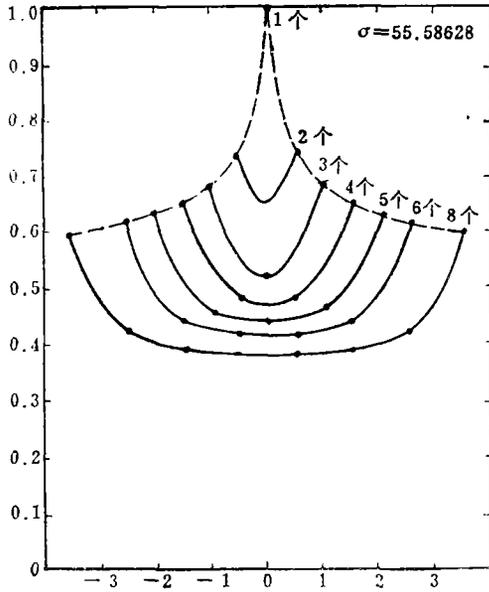


图 2

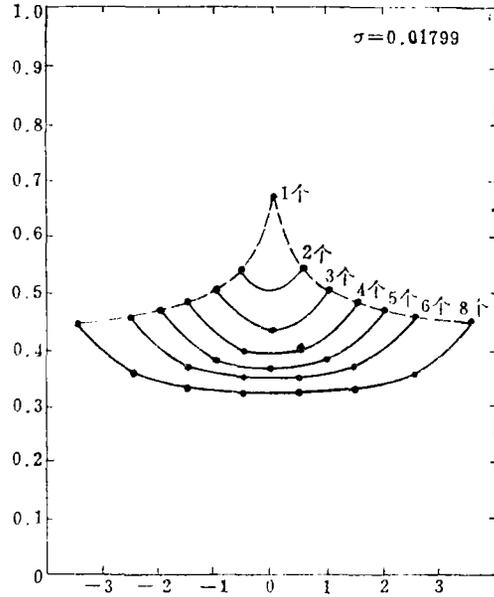


图 3

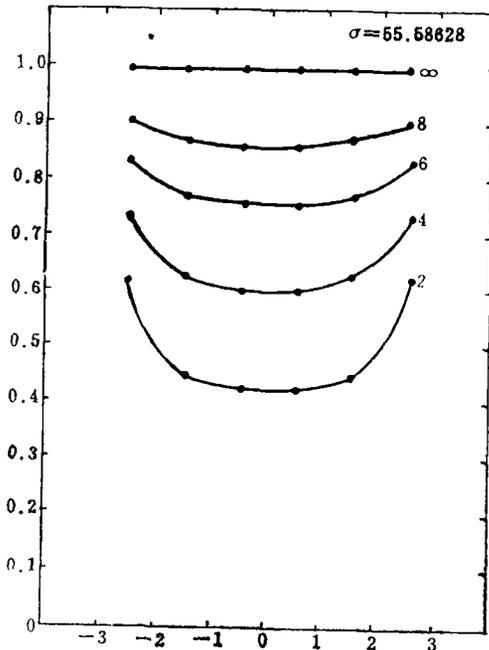


图 4

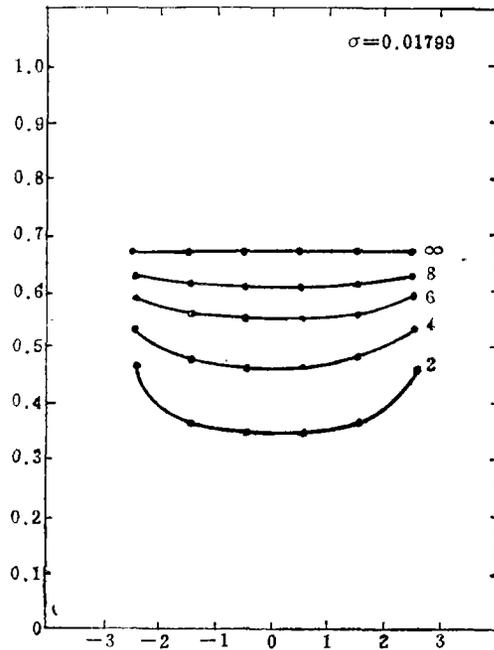


图 5

形态仍然相似。应该指出, $\sigma=55.58628$ 的结果和刚性球 ($\sigma=\infty$) 的结果已相差无几 (参看文[1])。

为了揭示液滴间间距对 λ_j 的影响, 我们在表 4 及图 4, 5 中列出了 6 个球组成的液滴串在不同间距下的阻力系数。和刚性球串情形一样, 当间距增加时, 端缘效应减弱。其次, 随着圆球愈益靠拢, 串内每个液滴的阻力系数将不断减少, 同时呈现出强烈的端缘效应。最后, 比较图 4 和图 5 看出, 当粘度比减少时, 上述变化整个地显得平稳些。

参 考 文 献

- [1] Gluckman, M. J., R. Pfeffer and S. Weinbaum, A new technique for treating multiparticle slow viscous flow: axisymmetric flow past spheres and spheroids, *J. Fluid Mech.*, 50 (1971), 705—740.
- [2] Happel, J. and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, New York (1965).

The Creeping Motion of Multiple Spherical Liquid Drops

Wu Wang-yi Zhang Bai-wen

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

This paper deals with the drag factor of the multiple spherical liquid drops in the creeping motion by means of the Sampson singularities and collocation technique. The drag factors of the drops are calculated under distinct conditions: different numbers of liquid drops in the chain and different sphere spacings. From the results the influence of the viscosity ratio on the shielding effect and end effect are revealed. The convergence of the method is also studied in this paper.