

文章编号: 1000-0887(2004)11-1101-12

周期压力驱动下管壁局部不规则的圆管 Poiseuille 流感受性问题

王志亮, 周哲玮

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委周哲玮来稿)

摘要: 采用渐近分析方法, 建立了在周期压力驱动下, 完全发展的圆管 Poiseuille 流当管壁存在局部不规则几何形状时的感受性问题模型. 通过特征函数的双正交系统, 应用 Chebyshev 配点法进行数值求解. 通过算例计算, 获得周期压力和矩形突起激发起的流体系统中的各种空间发展模态以及相应的感受性系数. 从计算和分析可以知道, 在流场的不同发展阶段不同的模态起着主导作用, 这与在试验中观察到的扰动流场在不同位置的特性是一致的.

关键词: Poiseuille 流; 双正交系统; 特征函数; 感受性

中图分类号: O358 **文献标识码:** A

引 言

自从 Reynold(1883)^[1]的著名转捩试验之后, 人们为了揭示其中的物理机理而进行了不懈的努力. 不过在历经百年之后, 我们仍对此知之甚少.

有些转捩过程分为五个阶段: 感受性问题阶段、线性增长阶段、非线性饱和阶段、二次不稳定阶段以及层流结构的溃塌, 湍流产生阶段. 这样的区分是理想化的, 因为实际情况下并非所有的阶段都会在转捩过程中出现, 而且阶段的划分也可能是模糊不清的. 不过这同时也为对复杂的转捩问题研究提供了一个工作框架. 其中感受性问题研究的是流体系统对外界作用的响应.

Reynolds 的实验表明存在一个临界的 Reynold 数, 这个数可以作为流动稳定和不稳定的判据, 但同样的实验装置在不同的外界条件下, 临界雷诺数可能会有数量级的差别. 对于完全发展抛物剖面的管流, 线性理论又表明它对无限小的扰动是稳定的, 理论无法说明 Reynold 实验中观察到的不稳定现象, 其原因至今还不很清楚.

人们为了理解这一现象的机理做了很多的工作. Tatsumi(1952)^[2]认为不稳定的产生可

收稿日期: 2003_07_07; 修订日期: 2004_08_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772026); 上海市科委科研基金资助项目(1998_10); 上海市重点学科建设资助项目; 上海市属博士学科点建设基金项目

作者简介: 王志亮(1974), 男, 湖北人, 博士(Tel: + 86_21_56772253; E_mail: wangzl_one@163.com);
周哲玮(1950), 男, 湖北人, 教授, 博士, 博导, 副校长(联系人. Tel: + 86_21_56334092;
E_mail: zhzwzhou@yc.shu.edu.cn)

能与流动的入口条件有关 这个说法得到了 Wagnanski 和 Champagne(1973)^[3] 试验的证实 另外的许多工作也表明扰动环境中的许多因素都可能是不稳定的原因, 本文尝试在这个认识的基础上建立相关的数学模型

Tumin(1996)^[4] 研究了圆管 Poiseuille 流当壁面存在吹吸过程时的感受性问题, 在他的计算中, 发觉吹吸过程造成的不稳定主要影响的是壁面附近的流动, 对流管中心的流动影响不大 同时他指出研究感受性问题的方式目前有三类: 1). 当 Reynold 数趋向无穷时的渐近分析方法; 2). 直接数值模拟; 3). 特征函数展开方法 本文采用第三类方法

1 控制方程

考虑轴对称不可压缩粘性圆管 Poiseuille 流, 其连续性方程和动量方程写为:

$$\begin{cases} \mathbf{V} = 0, \\ \frac{\mathbf{V}}{t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}, \end{cases} \quad (1)$$

其中, 流场速度 $\mathbf{V} = (V, U)$, P 为流场压力, Re 为 Reynold 数

采用柱坐标 $\mathbf{x} = (r, z)$, 控制方程的柱坐标形式可以写为:

$$\frac{U}{z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0, \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \frac{U}{t} + U \frac{\partial U}{\partial z} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 U, \\ \frac{V}{t} + U \frac{\partial V}{\partial z} + V \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 V - \frac{V}{r^2} \right), \end{cases} \quad (2b)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$

管壁存在局部的不规则, 其形函数为 $K(z) = \epsilon^{1/2} h(z)$, ($\epsilon \ll D$, $h(z) \sim O(1)$) 则壁面上的边界条件为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (\text{当 } r = 1 + K(z)) \quad (2c)$$

另外, 这里取压力脉动与粗糙度同一量级 ($\epsilon^{1/2}$), 具有 $f(r) e^{-i t}$ 的形式, 其中 ω 为周期压力的频率, 取为实常数 将方程(2a)~(2c)中的物理量采用以下形式的级数展开:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = & \mathbf{V}(r) + \epsilon^{1/2} (\mathbf{V}(r, z) + \mathbf{v}(r; t)) + \\ & \epsilon^{1/2} (\hat{\mathbf{V}}(r, z) + \hat{\mathbf{v}}(r, z; t) + \hat{\mathbf{v}}(r, z; t)) + O(\epsilon^{3/2}) = \\ & \mathbf{V}(r) + \epsilon^{1/2} (\mathbf{V}(r, z) + \mathbf{v}(r) e^{i t}) + \\ & (\hat{\mathbf{V}}(r, z) + \mathbf{v}(r, z) e^{i t} + \hat{\mathbf{v}}(r, z) e^{i(2 \omega t)}) + O(\epsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{V}(r)$ 为基本流场, $\mathbf{v}(r; t)$ 为压力脉动相应的解, $\mathbf{V}(r, z)$, $\hat{\mathbf{V}}(r, z)$ 分别为局部几何不规则造成的 $\epsilon^{1/2}$ 和 ϵ 量级基本流偏移解, 以及 $\hat{\mathbf{v}}(r, z; t)$ 和 $\hat{\mathbf{v}}(r, z; t)$ 为 ϵ 量级一次和二次谐波解

将(3)式代入控制方程(2a)~(2c), 我们可以得到:

对 $O(0)$ 阶:

$$\mathbf{V}(r) = (V(r), U(r)) = (0, 1 - r^2) \quad (4)$$

即为定常管流解

对 $O(\epsilon^{1/2})$ 阶:

对 $\mathbf{v}(r; t) = (v(r, t), u(r, t)) = (0, u(r, t))$, 取压力波解形式

$$(u(r; t), p(r; t)) = (\bar{u}(r), \bar{p}(r)) e^{-i t}, \tag{5a}$$

满足的方程是

$$-\frac{u}{t} = -\frac{p}{z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{2u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{u}{r} \right] \tag{5b}$$

$\mathbf{V} = (V(r, z), U(r, z))$ 应该满足的动量方程形式为

$$\begin{cases} U \frac{U}{z} + V \frac{dU}{dr} = -\frac{P}{z} + \frac{1}{Re} U, \\ U \frac{V}{z} = -\frac{P}{r} + \frac{1}{Re} \left[V - \frac{V}{r^2} \right] \end{cases} \tag{6}$$

对 $O(\epsilon)$ 阶:

空间偏移场 $\mathbf{V}(r, z) = (V(r, z), U(r, z))$ 满足

$$\begin{cases} U \frac{U}{z} + V \frac{dU}{dr} + \left[U \frac{U}{z} + V \frac{U}{r} \right] = -\frac{P}{z} + \frac{1}{Re} U, \\ U \frac{V}{z} + \left[U \frac{V}{z} + V \frac{V}{r} \right] = -\frac{P}{r} + \frac{1}{Re} \left[V - \frac{V}{r^2} \right] \end{cases} \tag{7a}$$

一阶谐波解 $\hat{\mathbf{v}}(r, z; t) = (\hat{v}(r, z; t), \hat{u}(r, z; t))$ 满足的方程形式为

$$\begin{cases} \frac{\hat{u}}{t} + U \frac{\hat{u}}{z} + \hat{v} \frac{dU}{dr} + \left[u \frac{U}{z} + V \frac{u}{r} \right] = -\frac{\hat{p}}{z} + \frac{1}{Re} \hat{u}, \\ \frac{\hat{v}}{t} + U \frac{\hat{v}}{z} + \left[u \frac{V}{z} \right] = -\frac{\hat{p}}{r} + \frac{1}{Re} \left[\hat{v} - \frac{\hat{v}}{r^2} \right] \end{cases} \tag{7b}$$

二阶谐波解

$$\hat{\mathbf{v}}(r, z; t) = (\hat{v}(r, z; t), \hat{u}(r, z; t))$$

满足

$$\begin{cases} \frac{\hat{u}}{t} + U \frac{\hat{u}}{z} + \hat{v} \frac{dU}{dr} = -\frac{\hat{p}}{z} + \frac{1}{Re} \hat{u}, \\ \frac{\hat{v}}{t} + U \frac{\hat{v}}{z} = -\frac{\hat{p}}{r} + \frac{1}{Re} \left[\hat{v} - \frac{\hat{v}}{r^2} \right] \end{cases} \tag{7c}$$

各阶相应的边界条件为:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(K(z), z; t) = & \mathbf{V}(1, z; t) + K(z)^* \frac{\mathbf{V}(1, z; t)}{r} + O(\epsilon) = \\ & \left[(0, 0) + \epsilon^2 \left[\left[0, -h(z) \frac{dU}{dr} \right] + (0, 0) \right] + \right. \\ & \left. \left[\left[0, -h(z) \frac{dU}{dr} \right] + \left[0, -h(z) \frac{u}{r} \right] + (0, 0) \right] + O(\epsilon) \right]_{r=1} \end{aligned} \tag{8}$$

通过分析我们可以知道空间偏移场(7a)以及边界条件表达式中不含时间项, 因此它完全是由于局部几何形状的改变造成的; 而二次谐波解(7c)以及边界条件中不包含边界的变形。本文研究周期压力和边界突出的影响, 所以讨论将集中在一阶谐波解上。

在这里考虑一阶谐波解 $\hat{\mathbf{v}}(r, z; t)$ 的空间发展

令

$$\mathbf{A} = (v(r, z), v(r, z)/z, u(r, z), p(r, z)),$$

代入(7)以及相应的连续性方程, 并改写为形式

$$-\frac{\mathbf{A}}{z} = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} + \mathbf{M}_2 \frac{\mathbf{A}}{r} + \mathbf{M}_3 \frac{2\mathbf{A}}{z} + \mathbf{H}, \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r^2} - i \operatorname{Re} & \operatorname{Re}U & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r}U - \frac{dU}{dr} - \frac{1}{\operatorname{Re}r} & i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} & 0 & 0 & \operatorname{Re} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ U & -\frac{1}{\operatorname{Re}} & -\frac{1}{\operatorname{Re}r} & 0 \end{pmatrix}; \\
 \mathbf{M}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\operatorname{Re}} & 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{Re} \left[(r) \frac{\mathbf{V}}{z} \right] \\ 0 \\ - \left[(r) \frac{\mathbf{U}}{z} + \mathbf{V} \frac{(r)}{r} \right] \end{pmatrix} \text{ 为非齐次项}
 \end{aligned}$$

通过 Fourier 变换 $F(r;) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, z) e^{-iz} dz$, 我们的问题转化为

$$i \mathbf{A} = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} + \mathbf{M}_2 \frac{\mathbf{A}}{r} + \mathbf{M}_3 \frac{d^2 \mathbf{A}}{dr^2} + \mathbf{H} \quad (10a)$$

相应的边界条件为:

$$A_1 = A_2 = 0, A_3 = \quad (\text{当 } r = 1), \quad (10b)$$

$$A_1 = A_2 = \frac{dA_3}{dr} \quad (\text{当 } r = 0), \quad (10c)$$

$$\text{其中} \quad = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{u}{r} e^{-iz} dz$$

许多文献表明双正交系统处理感受性问题是便捷有效的(Tumin 和 Fedorov(1984)^[5], Tumin(1996)) 下面将采用双正交系统来解决这里所关心的问题

对应以上非齐次问题的齐次问题可以表述如下:

$$i \mathbf{A} = \mathbf{M}_1 \mathbf{A} + \mathbf{M}_2 \frac{d\mathbf{A}}{dr} + \mathbf{M}_3 \frac{d^2 \mathbf{A}}{dr^2}, \quad (11a)$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0 \quad (\text{当 } r = 1), \quad (11b)$$

$$A_1 = A_2 = \frac{dA_3}{dr} \quad (\text{当 } r = 0) \quad (11c)$$

定义内积 $(f, g) = \int_0^1 f^*(r) g(r) dr$, * 表示共轭 相应的伴随系统通常可以由分部积分获得

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^1 \mathbf{B}^T \left[i \mathbf{A} - \mathbf{M}_1 \mathbf{A} - \mathbf{M}_2 \frac{d\mathbf{A}}{dr} - \mathbf{M}_3 \frac{d^2 \mathbf{A}}{dr^2} \right] dr = \\
 &\int_0^1 \mathbf{A}^T \left[i \mathbf{B} - \mathbf{M}_1^T \mathbf{B} + \frac{d(\mathbf{M}_2^T \mathbf{B})}{dr} - \frac{d^2(\mathbf{M}_3^T \mathbf{B})}{dr^2} \right] dr +
 \end{aligned}$$

$$\left[-A^T M_2^T B - \left(\frac{dA}{dr} \right)^T M_3^T B (A)^T M_3^T \frac{dB}{dr} \right] \Big|_{r=0}^{r=1} \tag{12}$$

所以方程(11)的伴随方程为:

$$-iB = M_1^T B - \frac{d(M_2^T B)}{dr} + \frac{d^2(M_2^T B)}{dr^2} \tag{13a}$$

将(13a)代入积分式(12)可得到

$$\left[-A^T M_2^T B - \left(\frac{dA}{dr} \right)^T M_3^T B (A)^T \frac{d(M_3^T B)}{dr} \right] \Big|_{r=0}^{r=1} = 0 \tag{13b}$$

展开上式可以看到,在边界条件中存在奇性 为了消除它,在计算中,把(13b)乘以 r 将微分系统(11)的边界条件(11b)、(11c)代入边界条件,(13b)可以简化为

$$\left[\left(\frac{dA_1}{dr} - ReA_4 \right) B_2 - \frac{1}{Re} \frac{dA_3}{dr} B_4 \right] \Big|_{r=1} = 0,$$

由此可以得到伴随微分系统必须满足的边界条件为:

$$B_2 = B_4 = 0 \quad (\text{当 } r = 1) \tag{14a}$$

为了进行数值计算,必须对伴随微分系统附加一些条件 将方程展开,可以获得问题其他的边界条件:

$$\frac{dB_2}{dr} = B_1 - \frac{1}{Re} \frac{dB_4}{dr} = 0 \quad (\text{当 } r = 1), \tag{14b}$$

$$B_1 = B_2 = \frac{dB_4}{dr} = \frac{dB_3}{dr} = 0 \quad (\text{当 } r = 0) \tag{14c}$$

根据 Lagrange 等式(Salwen(1979)^[6]),可得建立的双正交系统满足正交关系式:

$$\int_0^1 A_n B_m / A_n B_m = \delta_{nm}, \tag{15}$$

其中 $\int_0^1 A_n B_m = \int_0^1 r(A_n B_m) dr = \int_0^1 r \delta_{nm} dr$

显然,当 $A \perp C$ 时, AA 和 BC 在内积的意义上是正交的;当 $A = C$ 时,两者相关(当 $dX/dA = 0$ 时,正交关系会出现奇性,处理的方法可以参见 Schensted(1960)^[7])#

假设特征函数的双正交系统 $\{AA BC\}$ 是完备的(Schensted(1960)证明了对称扰动 Poiseuille 管流特征函数系统的完备性)# 参照 Salwen 和 Grosch(1981)^[8] 对扰动量的分解形式,将扰动量通过傅立叶积分分解如下: $q = (r, z) = \int_0^1 A_n A_n e^{i\alpha z}$ 那么相应的幅度系数可以通过下式获得:

$$a_n = \int_0^1 q(r, z) B_n / \int_0^1 A_n B_n e^{i\alpha z}, \tag{16}$$

这个系数即是所谓的感受系数(receptive coefficients)#

将扰动分解形式代入非齐次微分系统,可以得到关系式:

$$i(A - C) \int_0^1 AC B_n - \int_0^1 HC B_n - \left[(M_2 AC B_n) - \left(M_3 AC \frac{dB_n}{dr} \right) \right] \Big|_{r=1} = 0 \tag{17}$$

通过这个关系式,可以获得所关心的量))) 感受系数# 上式中 $\int_0^1 HC B_n$ 项代表了非齐次项对扰动的影响# 但目前为止,(6) 式中扰动 $E^{1/2}$ 阶解仍有待确定# 其中

$$\int_0^1 HC B_n = \int_0^1 r (HC B_n) dr = \int_0^1 r \left[\int_{-l}^l H e^{-i\alpha z} dz, B_n \right] dr = \int_0^1 r \left[\int_{-l}^l (H, B_n) e^{-i\alpha z} dz \right] dr =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 r \left\{ Q_{-j} \left[\operatorname{Re} \left[V(r) \frac{5V}{5z} B_A \right] - \left(V(r) \frac{5U}{5z} + V \frac{5V(r)}{5r} \right) B_A \right] e^{-iG} dz \right\} dr = \\ & Q_0 \int_0^1 \left\{ Q_{-j} r \left[(i \operatorname{Re} V(r) B_A) - \frac{5V(r)}{5r} B_A \right] V + [-iCV(r) B_A] U \right\} e^{-iG} dz \Big|_{zy-j} \Big|_{zy-j} dr + \\ & Q_0 \int_0^1 \left\{ r V(r) [Re B_A V - B_A U] \right\} \Big|_{zy-j} e^{-iG} dr, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$((r) = \left[(i \operatorname{Re} V(r) B_A) - \frac{dV(r)}{dr} B_A \right] r + [-iCV(r) B_A] z, \quad (18b)$$

$$. = Q_0 \int_0^1 \left\{ r V(r) [Re B_A V - B_A U] \right\} \Big|_{zy-j} e^{-iG} dr, \quad (18c)$$

则

$$3HC B_A = Q_0 \int_0^1 r V \# ((r) e^{-iG} dz) dr + . \# \quad (19)$$

按照 Hill(1995)^[9]的方法, 对问题(6)定义相关的伴随问题, 再通过对伴随问题的求解获得需要的信息# $\{Vc(y) e^{-iG}, P(y) e^{-iG}\}$ 是我们的伴随变量, 相应的伴随方程为:

$$\begin{cases} U \frac{5Uc e^{-iG}}{5z} = - \frac{5Pc e^{-iG}}{5z} - \frac{1}{Re} \# Uc e^{-iG} + ((r) e^{-iG} z, \\ U \frac{5Vc e^{-iG}}{5z} - Uc e^{-iG} \frac{dU}{dr} = - \frac{5Pc e^{-iG}}{5r} - \\ \frac{1}{Re} \left(\# Vc e^{-iG} - \frac{Vc e^{-iG}}{r^2} \right) + ((r) e^{-iG} r, \\ \# (Vc(r) e^{-iG}) = 0 \# \end{cases} \quad (20)$$

边界条件:

$$Vc = 0 \quad (\text{当 } r = 1 \text{ 和 } r = 0) \#$$

由 Lagrange 恒等式:

$$\begin{aligned} & [(Vc e^{-iG}) \gamma(V) + \# V(Pc e^{-iG})] + \\ & [(V \gamma c(Vc e^{-iG}) + P \# (Vc e^{-iG}))] = \# J, \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $\gamma, \gamma c$ 为动量方程微分算子及其伴随算子, 而

$$\begin{aligned} J &= J_r r + J_z z = \\ & \left\{ PcV + PVc + \frac{1}{Re} \left[U \frac{5Uc}{5r} - Uc \frac{5U}{5r} + V \frac{5Vc}{5r} - Vc \frac{5V}{5r} \right] \right\} e^{-iG} r + \\ & \left\{ [UVVc + UUVc] + PcU + PUC \right\} e^{-iG} z + \\ & \frac{1}{Re} \left[U \frac{5Uc e^{-iG}}{5z} - Uc e^{-iG} \frac{5U}{5z} + V \frac{5Vc e^{-iG}}{5z} - Vc e^{-iG} \frac{5V}{5z} \right] z \# \end{aligned} \quad (22)$$

将(22)代入(19)可以获得:

$$\begin{aligned} 3HC B_A &= Q_0 \int_0^1 r \left\{ \# J \right\} dz dr + . = \\ & Q_0 \int_0^1 r \frac{5J_z}{5z} dz dr + Q_0 \int_0^1 r \left[\frac{1}{r} \frac{5rJ_r}{5r} \right] dz dr + . = \\ & Q_0 \int_0^1 r \frac{5(rJ_z)}{5z} dz dr + Q_0 \int_0^1 r \frac{5(rJ_r)}{5r} dz dr + . = \\ & \int_0^1 (rJ_r) \Big|_{r=0}^{r=1} dz + \left\{ Q_0 \int_0^1 (rJ_z) \Big|_{zy-j} dz + . \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \int_0^1 (rJr) \Big|_{r=0}^{r=1} dz + .c = \frac{J}{Q_{-j}} \left(\frac{1}{Re} U \frac{5Uc}{5r} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} dz + .c = \\
 - \frac{1}{Re} \frac{dU}{dr} \frac{5Uc}{5r} \frac{J}{Q_{-j}} h(z) e^{-iGz} dz + .c \# \tag{23}
 \end{aligned}$$

这个结果同 Hill(1995)对平板边界层结果形式是一致的# 而

$$\begin{aligned}
 3AC \mathbf{BA} = & \left\{ - \frac{1}{Re} \frac{dU}{dr} \frac{5Uc}{5r} \frac{J}{Q_{-j}} h(z) e^{-iGz} dz + .c \right\} \Big|_{r=1} \Big\{ i(C-A) = \\
 & \left\{ \left[- \frac{1}{Re} \frac{dU}{dr} \frac{5Uc}{5r} \frac{J}{Q_{-j}} h(z) e^{-iGz} dz + \frac{1}{Re}; \frac{dBA}{dr} \right] \Big|_{r=1} + .c \right\} \Big\{ i(C-A) = \\
 & \left\{ - \frac{1}{Re} \left(\frac{dU}{dr} \frac{5Uc}{5r} + \frac{dBA}{dr} \frac{dV(r)}{dr} \right) \Big|_{r=1} h(C) + .c \right\} \Big\{ i(C-A), \tag{24}
 \end{aligned}$$

其中 $h(C) = \int_0^1 h(z) e^{-iGz} dz \#$

由于扰动的局部性有 $.c \ll 0$, 由此得到

$$3AC \mathbf{BA} U = \frac{1}{iRe(C-A)} \left(\frac{dU}{dr} \frac{5Uc}{5r} + \frac{d(BA)}{dr} \frac{dV(r)}{dr} \right) \Big|_{r=1} h(C) \# \tag{25}$$

由(16)可得

$$\begin{aligned}
 aA = 3A, \mathbf{BA}/3AA \mathbf{BA} e^{-iA} = \\
 \frac{1}{2iQ_{-j}} \int_0^1 3AC \mathbf{BA}/3AA \mathbf{BA} e^{-iAz} dC = \\
 - \frac{1}{2i3AA \mathbf{BA} ReQ_{-j}} \frac{h(C)}{(C-A)} \left(\frac{dU}{dr} \frac{5Uc}{5r} + \frac{dBA}{dr} \frac{dV(r)}{dr} \right) \Big|_{r=1} e^{-i(C-A)z} dC = \\
 - \frac{1}{2iQ_{-j}} \frac{h(C)}{(C-A)} e^{-i(C-A)z} dC \left\{ \frac{1}{Re3AA \mathbf{BA}} \left(\frac{dU}{dr} \frac{5Uc}{5r} + \frac{dBA}{dr} \frac{dV(r)}{dr} \right) \Big|_{r=1} \right\} = \\
 - h(C) \frac{1}{Re3AA \mathbf{BA}} \left(\frac{dU}{dr} \frac{5Uc}{5r} + \frac{dBA}{dr} \frac{dV(r)}{dr} \right) \Big|_{r=1} \# \tag{26}
 \end{aligned}$$

2 数值求解

对计算域 $r \sim [0, 1]$ 采用变换 $y = 2r - 1$, 将问题映射到域 $[-1, 1]$ # 使用 Chebyshev 配点法展开# 变量的近似表达式为

$$\mathbf{A}(y) = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{T}_n(y) \# \tag{27}$$

对齐次方程及其伴随系统分别形成特征问题:

$$i\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \tag{28}$$

其中, \mathbf{X} 为展开系数向量, 即特征向量, λ 为特征值#

对于计算所产生的伪压力模态没有采用 Tumin(1996)的方法, 在他的文章中是通过判断压力梯度特征来消除伪压力模态(伪压力模态的压力梯度在配置点上为零, 而在边界上不为零), 他计算和检查了所有模态的压力梯度, 尔后排除了满足伪压力模态条件的模态#

本文的做法是对这两个系统的特征求同除异# 这种方法的另一优势在于通过设定门限, 可以对误差大的特征予以剔除(由于前面的模态精度高, 因而这种方法不会影响到这里所关心的模态), 由以下的计算和图 1 和图 2 可以看到, 存在于 Tumin(1996)文中图 1 的两个伪特征模态没有出现, 这说明方法是可行的#

表 1 圆管 Poiseuille 流空间稳定性特征值谱的比较

模态	Tumin(1996)	本文计算结果	
	$N = 60, 120$	$N = 60$	$N = 120$
M1	1. 017 914 2 + 6. 206 459E- 002i	1. 017 914 213 64 + 6. 206 459 307 46E- 002i	1. 017 914 213 641 618 + 6. 206 459 308 367 390E- 002i
M2	1. 075 488 6 + 1. 310 588 1E- 001i	1. 075 488 583 9 + 1. 310 588 14E- 001i	1. 075 488 583 943 890 + 1. 310 588 140 945 555E- 001i
M3	1. 132 395 4 + 2. 077 221 9E- 001i	1. 132 395 392 5 + 2. 077 221 856E- 001i	1. 132 395 392 527 515 + 2. 077 221 856 986 201E- 001i
M4	1. 188 360 1 + 2. 924 735 0E- 001i	1. 188 360 111 + 2. 924 734 98E- 001i	1. 188 360 111 517 173 + 2. 924 734 983 176 319E- 001i
M5	1. 243 462 4 + 3. 857 58E- 001i	1. 243 462 43 + 3. 857 58E- 001i	1. 243 462 430 014 803 + 3. 857 580 000 403 160E- 001i
M6	1. 298 493 1 + 4. 871 603 0E- 001i	1. 298 493 07 + 4. 871 603 0E- 001i	1. 298 493 072 998 749 + 4. 871 603 014 168 771E- 001i
M7	1. 353 021 4 + 5. 928 706E- 001i	1. 353 021 36 + 5. 928 706E- 001i	1. 353 021 360 068 512 + 5. 928 706 401 347 005E- 001i

注: $Re = 2\ 280$; $X = 0.96$

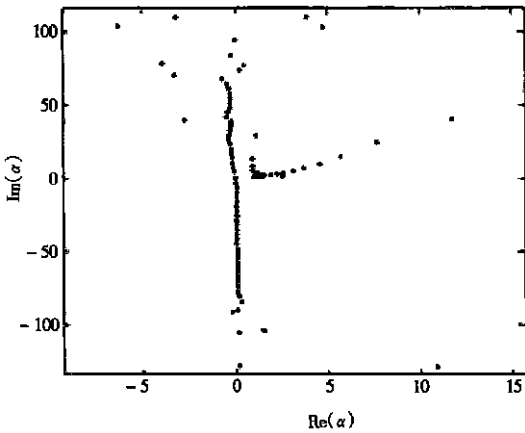


图 1 A 复空间谱特征分布

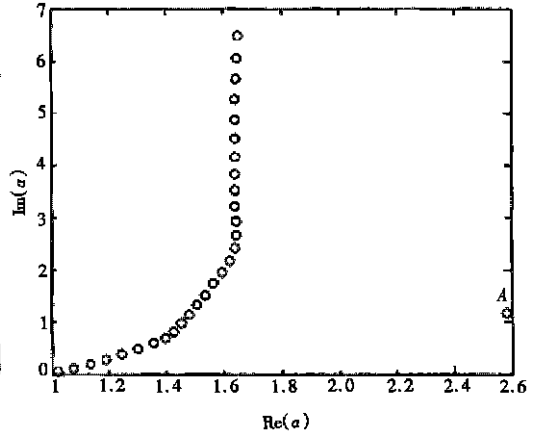


图 2 A 复空间计算所选取的谱特征分布

对压力解,这里取解有如下形式:

$$V(r) = 1 - \frac{I_0(0, r \sqrt{-iReX})}{I_0(0, \sqrt{-iReX})} \tag{29}$$

式中, $I_0(r)$ 为零阶第一类修正贝塞尔函数# 对方程(20), 我们消去 U 、 P_c , 并令 $\delta = -irV_c$, 获得关于 δ 的四阶非齐次 Orr-Sommerfeld 方程:

$$\delta^4 + c_3\delta^3 + c_2\delta^2 + c_1\delta + c_0\delta = res, \tag{30}$$

其中

$$c_3 = -2/r, \quad c_2 = (3 - 2r^2c^2 - ir^2ReCU)/r^2, \\ c_1 = \left[-3 + 2r^2c^2 + ir^2ReCU - 2ir^3ReC \frac{dU}{dr} \right] / r^3,$$

$$c_0 = C^3(C + i\text{Re}U), \text{res} = ir\text{Re}C^2(r(r) + r\text{Re}C \frac{d(z(r))}{dr})$$

与上类似, 此方程通过 Chebyshev 配点法求解, 所采用的配置点与上同# 流向速度通过式 $Uc = (1/rC)(d5/dr)$ 计算#

根据已知条件和速度有界性相应的边界条件为:

$$5 = 5c = 0 \quad (\text{当 } r = 1 \text{ 和 } r = 0)$$

3 计算及分析

作为一个算例, 我们取 $Re = 2280, X = 0.96$ 形函数 $h(z)$ 为一窗口函数, 因而 $h(C) = 2\sin(Cd/2)/C$, 其中, $d = 0.1$ 为局部突起宽度#

表 2 计算中所采用的特征值谱

模态	特征值	感受系数
1	1.017 914 214+ 0.062 064 593* i	- 0.010 161 272- 0.002 559 456* i
2	1.075 488 584+ 0.131 058 814* i	0.013 465 707+ 0.000 297 118* i
3	1.132 395 393+ 0.207 722 186* i	- 0.009 351 695- 0.008 572 161* i
4	1.188 360 112+ 0.292 473 498* i	0.003 634 504- 0.009 830 865* i
5	1.243 462 430+ 0.385 758 000* i	- 0.001 987 822+ 0.007 810 432* i
6	1.298 493 073+ 0.487 160 301* i	0.005 489 427- 0.002 460 801* i
7	1.353 021 360+ 0.592 870 640* i	0.003 062 938- 0.003 194 582* i
8	1.396 010 368+ 0.701 096 218* i	- 0.002 071 043- 0.003 043 796* i
9	1.424 406 110+ 0.829 287 644* i	0.001 630 637- 0.003 354 792* i
10	1.452 019 571+ 0.979 318 393* i	- 0.000 223 180+ 0.003 896 867* i
11	1.480 197 808+ 1.145 924 999* i	- 0.002 797 260+ 0.002 935 832* i
12(A)	2.580 357 479+ 1.164 554 573* i	- 0.000 311 139+ 0.000 093 461* i
13	1.508 054 437+ 1.328 226 051* i	0.004 062 413+ 0.001 238 492* i
14	1.535 747 438+ 1.525 714 581* i	- 0.004 296 314+ 0.001 047 398* i
15	1.563 988 452+ 1.736 870 601* i	0.002 206 330- 0.004 022 547* i
16	1.593 465 847+ 1.958 563 829* i	0.000 911 150+ 0.004 568 770* i
17	1.622 278 392+ 2.185 509 604* i	0.004 664 364+ 0.000 751 605* i
18	1.641 092 527+ 2.416 097 828* i	0.000 948 026- 0.005 033 610* i
19	1.644 758 681+ 2.662 204 298* i	- 0.005 954 263+ 0.001 496 067* i
20	1.642 686 752+ 2.930 863 865* i	- 0.007 428 974- 0.001 882 167* i
21	1.640 889 916+ 3.218 671 537* i	0.001 389 291- 0.009 176 418* i
22	1.639 975 365+ 3.522 611 380* i	0.010 994 239- 0.001 710 569* i
23	1.639 433 948+ 3.841 588 014* i	- 0.009 033 339+ 0.009 233 144* i
24	1.639 003 131+ 4.175 454 687* i	0.014 802 273+ 0.002 433 019* i
25	1.638 878 539+ 4.524 240 398* i	0.014 333 434+ 0.008 808 573* i
26	1.639 450 383+ 4.887 738 714* i	- 0.000 060 949- 0.019 052 373* i
27	1.641 009 285+ 5.265 514 278* i	0.009 297 483+ 0.018 305 224* i
28	1.643 674 443+ 5.657 022 320* i	- 0.022 514 099+ 0.006 527 177* i
29	1.647 361 828+ 6.061 602 990* i	0.004 871 889+ 0.031 049 908* i
30	1.651 533 491+ 6.478 514 059* i	- 0.012 691 114+ 0.074 883 630* i

从图 1 中观察到离散的谱特征值是遍布于整个的 A 复空间的# 表 2 给出了所选取的 30

个特征值以及相应的感受系数# 在计算中, 这些值将用于未来的计算#

对应表 2, 图 2、图 3 分别给出了所选择用来计算的谱特征在 A 复空间的分布和感受系数的模的状态# 可以观察到, 在图中的特征值中, 第十二号特征值(A) 是区别于其他特征值的孤立特征模态, 它远离其它的模态# 图 2 和 Tumin(1996) 中的图 1 是一致的#

从图 3 中可以看到感受性系数呈现先增后减再增的变化趋势# 第一个最大值存在于 2 号模态#

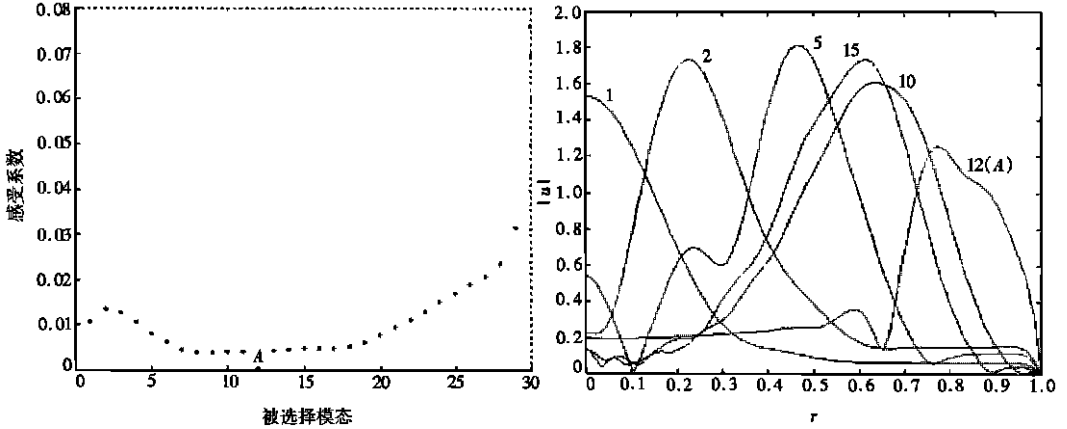


图 3 所选模态的感受系数模的数值分布 图 4 第 1、2、5、10、15 和 12 号模态的特征函数分布

从图 4 里, 可以观察到第十二号特征模态(A)与其它模态的明显不同, 它在壁面附近急剧变化, 是表现壁面附近扰动为主的模态, 而从图 3 中可以看到相应的感受性系数接近零, 从而可以知道壁面附近的扰动没有被充分的激发#

在获得感受系数之后, 可以用下式来得到扰动量:

$$\hat{u} = \text{Re} \left\{ \left[\sum_A a_A A(r) e^{iA} \right] e^{-iXt} \right\} \quad (32)$$

图 5 给出了扰动速度场在下游 2~ 10 处流场分布的状态# 从图中可以知道, 扰动在几何不规则区域被激发, 并从该区域附近逐步向管流中心传递# 由于模态的衰减作用, 扰动首先在壁面附近衰减, 随离开几何不规则区域距离的增加, 整体的扰动逐步的趋于平缓#

从以上的计算和分析可以看到, 这里计算的流场在流动发展的不同阶段是由不同的模态主导的#

4 结 论

本文研究了在周期压力驱动下圆管 Poiseuille 流管壁存在局部几何不规则时的感受性问题# 在工作中建立了对这一问题的数学模型# 通过渐近展开方法, 建立周期压力驱动的感受性问题模型# 通过特征函数的双正交系统, 应用 Chebyshev 配点法对模型问题进行数值求解#

本文对管壁局部区域存在矩形突起的模型问题在 $Re = 2280, X = 0.96$ 时进行求解, 流体系统中的各种空间发展模态以及相应的感受性系数# 从计算和分析可以知道, 在流场的不同发展阶段是由不同的模态起主导作用, 所获得的流场具有 Leite(1959)^[10] 在试验中观察到的扰动流场在不同位置的非相似特性#

另外, 应该指出, 对不同的情况, 如不同参数, 不同的形函数, 问题的感受性是不同的, 对流

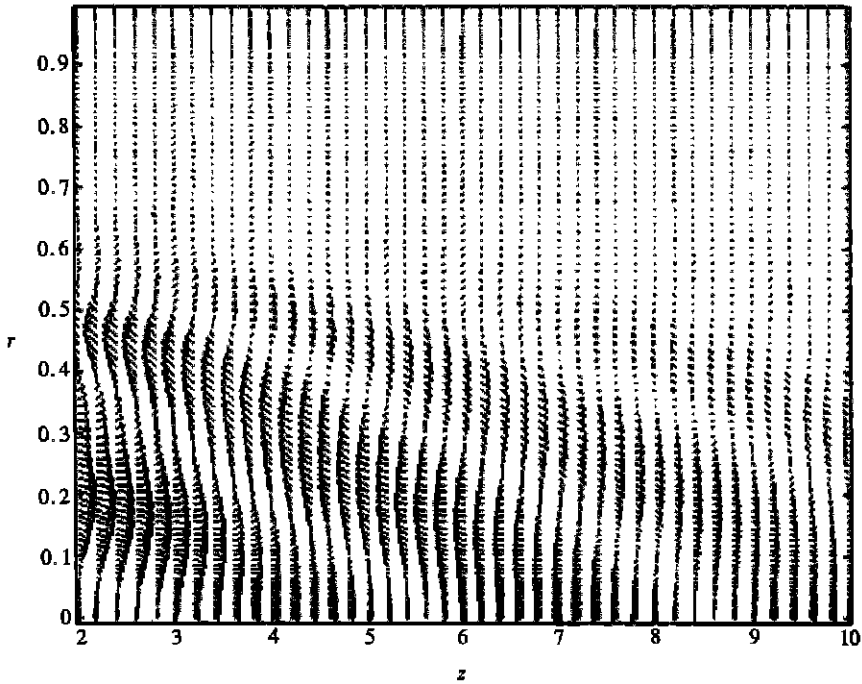


图 5 下游 2~ 10 处流场分布状况

动的主导模态也会发生改变#

[参 考 文 献]

- [1] Reynold O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels[J]. Philos Trans Roy Soc London, 1883, **174**(3): 935) 1023.
- [2] Tatsumi T. Stability of the laminar inlet flow prior to the formation of Poiseuille regime, Part [J]. J Phys Soc Japan, 1952, **7**(2): 495) 516.
- [3] Wagnanski I, Champagne F H. On transition in a pipe flow[J]. J Fluid Mech, 1973, **59**(1): 281) 306.
- [4] Tumin A M. Receptivity of pipe Poiseuille flow[J]. J Fluid Mech, 1996, **315**(1): 119) 135.
- [5] Tumin A M, Fedorov A V. Instability wave excitation by a localized vibrator in boundary layer[J]. J Appl Mech Tech Phys, 1984, **25**(3): 867) 887.
- [6] Salwen H. Expansion in spatial or temporal eigenmodes of the linearized Navier-Stokes equations[J]. Bull Amer Phys Soc, 1979, **24**(1): 74) 88.
- [7] Schensted I V. Contributions to the theory of hydrodynamic stability[D]. PhD dissertation. University of Michigan, 1960.
- [8] Salwen H, Grosch C E. The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation) Part 2: Eigenfunction expansion[J]. J Fluid Mech, 1981, **104**(2): 445) 463.
- [9] Hill D C. Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers[J]. J Fluid Mech, 1995, **292**(1): 183) 203.
- [10] Leite R J. An experiment investigation of the stability of Poiseuille flow[J]. J Fluid Mech, 1959, **5**(1): 81) 97.

WANG Zhi_liang, ZHOU Zhe_wei

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: Asymptotic method was adopted to obtain a receptivity model for a pipe Poiseuille flow under periodical pressure, the wall of the pipe with a bump. Bi_orthogonal eigen_function systems and Chebyshev collocation method were used to resolve the problem. Various spatial modes and the receptivity coefficients were obtained. The results show that different modes dominate the flow in different stages, which is comparable with the phenomena observed in experiments.

Key words: Poiseuille flow; bi_orthogonal; eigen_function; receptivity