应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

Poiseuille流的谱问题

董 明 德

（中国科学院理论物理所，1983年8月4日收到）

摘 要

对Poiseuille流问题的Orr-Sommerfeld方程严格求解．得到的正规解不含外来奇点．从而谱方程可作解析的显式分析．本文结果可以进一步讨论分岔解．

一、问题的提法

近年来，流体力学中稳定性问题和分岔问题引起了广泛的探讨，由于Navier-Stokes方程的完善的非线性分析目前尚未建立，人们只能从线化理论出发进行一些讨论．

关于Poiseuille流的数学研究，作为流体力学中最重要的、最典型问题之一，文献极为丰富[3]．就动力稳定性讨论而言，最著称的贡献是Heisenberg[1]所提出的渐近解方法．大家知道，渐近解法引进高度非正则性的外来奇点，这些奇点并不是原始方程所固有的．因此，引起了所谓数学上进退两难和物理上矛盾，这些林[2]已进行了研究．

这里试图不用渐近解法，而从导出的严格解来讨论稳定性问题，解在流动域内是正则的，不含任何外加的奇点．

根据微扰理论，Poiseuille流的动力稳定性问题导致讨论Orr-Sommerfeld方程及其相应边界条件的复特征值问题．因此需要对以下方程[2]求出临界特征值和相应的特征函数的严格显示表式：

$$[\Delta-\lambda^2-\omega-i\lambda R(1-r^2)][\Delta-\lambda^2]\varphi(r)=0 \tag{1.1}$$

$$\Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}$$

$$r=0: \quad \varphi,\ \frac{d\varphi}{dr}\ \text{是正则的}$$

$$r=1: \quad \varphi=\frac{d\varphi}{dr}=0$$

式中R是Reynold数，λ-沿管的轴向波数，$\omega=\omega_R+i\omega_I$是微扰势，$\exp(\omega t+i\lambda z)\varphi(r)$的复特征值．

引进新变量

$$r=e^{\zeta}$$

上述方程可写成以下标准形式：

$$\mathscr{L}\varphi\equiv L\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\varphi(\zeta)-\sum_{n}e^{n\zeta}M_n\left(\frac{d}{d\zeta}\right)\varphi(\zeta)\qquad(n=2,4,6)\tag{1.2}$$

其中

$$L\left(\frac{d}{d\zeta}\right)=\left(\frac{d}{d\zeta}-3\right)\left(\frac{d}{d\zeta}-1\right)^2\left(\frac{d}{d\zeta}+1\right)=\prod_{\sigma=1}^{4}\left(\frac{d}{d\zeta}-\beta_\sigma\right)$$

$(\beta_1=3,\ \beta_2=1,\ \beta_3=1,\ \beta_4=-1)$

$$M_2\left(\frac{d}{d\zeta}\right)=\alpha_2\left(\frac{d}{d\zeta}-1\right)\left(\frac{d}{d\zeta}+1\right),\ \alpha_2=(\omega_R+2\lambda^2)+i(\omega_I+\lambda R)$$

$$M_4\left(\frac{d}{d\zeta}\right)=\alpha_4\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}-\gamma^2\right),\ \alpha_4=-i\lambda R,\ \gamma^2=\left(1-\lambda^2-\frac{\lambda}{R}\omega_I\right)+i\frac{\lambda}{R}(\lambda^2+\omega_R)$$

$$M_6\left(\frac{d}{d\zeta}\right)=\alpha_6,\qquad \alpha_6=i\lambda^3R$$

相应的边界条件是

$$\zeta=-\infty:\qquad \varphi\text{和}\frac{d\varphi}{dr}\text{是正则的}$$

$$\zeta=0:\qquad \varphi=\frac{d\varphi}{dr}=0$$

为了求基本解系，必须区分下列情况($\sigma\neq\sigma'$)

$$\begin{aligned}&1^\circ\quad \text{正常指标}\quad \beta_\sigma-\beta_{\sigma'}\neq0,1,2,\cdots\\&2^\circ\quad \text{非常指标}\quad \beta_\sigma-\beta_{\sigma'}=0,1,2,\cdots\end{aligned}\tag{1.3}$$

这里 β_4 是非常指标，相应的解式将出现对数项 $(\ln r)^k$ $(k=1,2,3)$。

二、严 格 解 法

我们将不讨论严格解法的一些数学问题，如收敛性证明，适用范围等等。这些问题在更加一般的非 Fuchs 型方程中[4]已有阐述。以下只列出本法的主要步骤和结果。

由于一般解可表为

$$\varphi(r)=\sum_{\sigma=1}^{4}C_\sigma\varphi_\sigma(\zeta)\tag{2.1}$$

其中 C_σ 是任意常数。利用 Green 函数 $G(\zeta-\zeta')$ 上节方程可以分解为四个变系数微分积分方程

$$\varphi_\sigma(\zeta)-\int_0^\zeta G(\zeta-\zeta')\sum_n e^{n\zeta'}M_n\left(\frac{d}{d\zeta'}\right)\varphi_\sigma(\zeta')d\zeta'=\varphi_\sigma^0(\zeta)\quad(\sigma=1,2,3,4)\tag{2.2}$$

这些方程结构相似，但互相独立。

应用 Laplace 变换，基本解系可以表为

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left\{\left[1-\sum_n\frac{M_n(s-n)}{L(s)}e^{-n\partial s}\right]^{-1}\tilde{\varphi}_\sigma^0(s)\right\}e^{s\zeta}ds\tag{2.3}$$

$$e^{\pm n\partial s}f(s)=f(s\pm n)$$

$$\tilde{\varphi}_\sigma^0(s):\left(\frac{1}{s-3},\ \frac{1}{s-1},\ \frac{1}{(s-1)^2},\ \frac{1}{s+1}\right)$$

式中 $\tilde{\varphi}_\sigma^0(s)$是 $\varphi_\sigma^0(\zeta)$的 Laplace 变换映象，Γ 是标准积分迴道。

因此，Cauchy 留数定理自动给出基本解的解析结构。将此结果写成由 $\varphi_\sigma^0(\zeta)$ 映照为 $\varphi_\sigma(\zeta)$形式较为简洁：

$$\varphi_\sigma(\zeta)=D_\sigma(\zeta)\varphi_\sigma^0(\zeta) \qquad (\sigma=1,2,3,4) \tag{2.4}$$

$$\varphi_\sigma^0(\zeta): \qquad (e^{3\zeta},\ e^{\zeta},\ \zeta e^{\zeta},\ e^{-\zeta})$$

映照函数 $D_\sigma(\zeta)$的严格显式将在下节给出。

三、正 规 解 的 显 式

考虑到正常指标和非常指标的实质性区别，$\varphi_\sigma(\zeta)$与 β_σ 相对应，简单的留数计算给出下列结果：

1° $\varphi_1(r)$

$$\varphi_1(r)=D_1(r)\varphi_1^0(r) \tag{3.1}$$

其中

$$\varphi_1^0(r)=r^3,\ D_1(r)=\sum_{k=0,1}^{\infty}a_{2k}r^{2k}$$

采用记号

$$L(n)=l_n=(n-3)(n-1)^2(n+1)$$

$$M_2(n)=\lambda_n=[\omega_R+2\lambda^2+i(\omega_I+\lambda R)](n^2-1)$$

$$M_4(n)=\mu_n=-i\lambda R\left[n^2-\left(1-\lambda^2-\frac{\lambda}{R}\omega_I\right)-i\frac{\lambda}{R}(\lambda^2+\omega_R)\right]$$

展开系数是

$$a_0=1,\ a_2=\frac{\lambda_3}{l_5},\ a_4=\frac{1}{l_7}\left\{\mu_3+\frac{\lambda_3\lambda_5}{l_5}\right\}$$

$$a_6=\frac{1}{l_9}\left\{\alpha_6+\frac{\lambda_3\mu_5}{l_5}+\frac{\mu_3\lambda_7}{l_7}+\frac{\lambda_3\mu_5\mu_7}{l_5l_7}\right\}$$

$$a_8=\frac{1}{l_{11}}\left\{\frac{\lambda_3\alpha_6}{l_7}+\frac{\alpha_6\lambda_9}{l_9}+\frac{\mu_3\mu_7}{l_7}+\frac{\lambda_3\lambda_5\mu_9}{l_5l_9}+\frac{\lambda_3\lambda_5\lambda_7\lambda_9}{l_5l_7l_9}\right\}$$

$$a_{10}=\frac{1}{l_{13}}\left\{\frac{\mu_3\alpha_6}{l_7}+\frac{\alpha_6\mu_9}{l_9}+\frac{\mu_3\mu_7\lambda_{11}}{l_7l_{11}}+\frac{\mu_4\lambda_7\mu_9}{l_7l_9}+\frac{\lambda_3\mu_5\mu_9}{l_5l_9}+\frac{\lambda_3\lambda_5\lambda_7\lambda_9}{l_5l_7l_9}\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_3\lambda_5\mu_7\lambda_{11}}{l_5l_7l_{11}}+\frac{\lambda_3\mu_5\lambda_9\lambda_{11}}{l_5l_9l_{11}}+\frac{\mu_3\lambda_7\lambda_9\lambda_{11}}{l_7l_9l_{11}}+\frac{\lambda_3\lambda_5\lambda_7\lambda_9\lambda_{11}}{l_5l_7l_9l_{11}}\right\}$$

2° $\varphi_2(r)$

$$\varphi_2(r)=D_2(r)\varphi_2^0(r) \tag{3.2}$$

其中

$$\varphi_2^0(r)=r,\ D_2(r)=\sum_k b_{2k}r^{2k}$$

展开系数是

$$b_0=1,\ b_2=\frac{\lambda_1}{l_3},\ b_4=\frac{1}{l_5}\left\{\mu_1+\frac{\lambda_1\lambda_3}{l_3}\right\}$$

$$b_6=\frac{1}{l_7}\left\{\alpha_6+\frac{\lambda_1\mu_3}{l_3}+\frac{\mu_1\lambda_5}{l_5}+\frac{\lambda_1\lambda_3\lambda_5}{l_3l_5}\right\}$$

$$b_8=\frac{1}{l_9}\left\{\frac{\lambda_1\alpha_6}{l_3}+\frac{\alpha_6\mu_7}{l_7}+\frac{\mu_1\mu_5}{l_5}+\frac{\lambda_1\lambda_3\mu_5}{l_3l_5l_7}+\frac{\lambda_1\mu_3\lambda_7}{l_3l_7}+\frac{\mu_1\lambda_5\lambda_7}{l_5l_7}+\frac{\lambda_1\lambda_3\lambda_5\lambda_7}{l_3l_5l_7}\right\}$$

$$b_{10}=\frac{1}{l_{11}}\left\{\frac{\mu_1\alpha_6}{l_5}+\frac{\alpha_6\mu_7}{l_7}+\frac{\mu_1\mu_5\lambda_9}{l_5l_9}+\frac{\mu_1\lambda_5\mu_7}{l_5l_7}+\frac{\lambda_1\mu_3\mu_7}{l_3l_7}+\frac{\lambda_1\lambda_5\lambda_7\mu_7}{l_3l_5l_7}+\frac{\lambda_1\lambda_3\mu_5\lambda_9}{l_3l_5l_9}\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_1\mu_3\lambda_7\lambda_9}{l_3l_7l_9}+\frac{\mu_1\lambda_5\lambda_7\lambda_9}{l_5l_7l_9}+\frac{\lambda_1\lambda_3\lambda_5\lambda_7\lambda_9}{l_3l_5l_7l_9}\right\}$$

3° $\varphi_3(r)$

$$\varphi_3(r)=D_3(r)\varphi_3^0(r) \tag{3.3}$$

其中

$$\varphi_3^0(r)=r\ln r,\ D_3(r)=\ln r\sum_0^{\infty} b_{2k}r^{2k}+\sum_0^{\infty} b'_{2k}r^{2k}$$

$$b'_{2k}=\left[\frac{\partial}{\partial\beta}b_{2k}(\beta)\right]_{\beta=1}$$

4° $\varphi_4(r)$

$$\varphi_4(r)=D_4(r)\varphi_4^0(r) \tag{3.4}$$

其中

$$\varphi_4^0(r)=\frac{1}{r}$$

$$D_4(r)=(\ln r)^3 d_4 r^4+(\ln r)^2\sum_0^{\infty} f_{2k}r^{2k}+\ln r\sum_0^{\infty} g_{2k}r^{2k}+\sum_0^{\infty} h_{2k}r^{2k}$$

注意，$D_3(r)$和$D_4(r)$的展开系数也由留数计算给出。此处从简略去，因为$\varphi_3(r)$和$\varphi_4(r)$在管的中心处不满足正则性要求。

四、特 征 值 方 程

因此，上述Poiseuille问题的一般解是

$$\phi(r)=\sum_{\sigma=1}^{4} C_\sigma\phi_\sigma(r) \tag{4.1}$$

其中 $\phi_r(r)$ 是函数 $\varphi_\sigma(r)$的实部，C_σ 是任意常数。

显然，在管之中心的正规性条件要求

$$C_3=0,\ C_4=0$$

从管壁的条件得到特征值方程，即谱方程

$$\Theta(\lambda,R;\omega_R,\omega_I)=\begin{vmatrix}\phi\ (1) & \phi_2(1)\\ \phi'_1(1) & \phi'_2(1)\end{vmatrix}=0 \tag{4.2}$$

其中

$$\phi_1(1)=\sum_k a_{2k}^0 \qquad a_{2k}^0=\mathrm{Re}\{a_{2k}\}$$

$$\phi'_1(1)=\sum_k(3+2k)a_{2k}^0$$

$$\phi_2(1)=\sum_k b_{2k}^0 \qquad b_{2k}^0=\mathrm{Re}\{b_{2k}\}$$

$$\phi_2'(1)=\sum_k (1+2k)b_{2k}^0$$

因此有以下简式

$$\sum_k\sum_j (k-j+1)a_{2k}^0 b_{2j}^0=0 \tag{4.3}$$

这一动力系统是稳定或不稳定依赖于 $\omega_R<0$ 或 $\omega_R>0$。而 $\omega_R=0$ 情况相当于临界边界

$$\Theta(\lambda^*,R^*;0,\omega_I^*)=0$$

其中 λ^* 和 R^* 分别表示波数和 Reynold 数的临界值。

不难证明，下列关系式存在

$$\omega_I^*=\omega_I^*(\lambda^*,R^*) \tag{4.4}$$

根据隐函数定理，$\omega_I^*(\lambda^*,R^*)$函数存在的充分和必要条件是

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\omega_I^*}\neq 0$$

从简单计算即得上式，因为

$$\frac{\partial M_2}{\partial\omega_I}=i,\quad \frac{\partial M_4}{\partial\omega_I}=-\frac{\lambda}{R},\quad \frac{\partial M_6}{\partial\omega_I}=0$$

因此，根据 Taylor 展开

$$\Theta(\lambda^*,R^*;0,\omega_I^*)_0+\omega_I^*\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\omega_I^*}\right)_0+\frac{1}{2!}\omega_I^{*2}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\omega_I^*}\right)_0+\cdots=0$$

记号：

$$(\quad)_0=(\quad)_{\omega_I^*=0}$$

由于临界态邻域 ω_I^* 较小，因此有

$$\omega_I^*=\Theta(\lambda^*,R^*;0,0)\Big/\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\omega_I^*}(\lambda^*,R^*;0,\omega_I^*)\right)_0 \tag{4.5}$$

比较进一步的公式是

$$\omega_I^*=\frac{\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\omega_I}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\omega_I^2}\right)_0}\left\{-1\pm\left[1-2\frac{(\Theta)_0\left(\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\omega_I^2}\right)_0}{\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\omega_I}\right)_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{4.6}$$

因此，得到 Poiseuille 问题的特征值和特征函数的严格解析表式。这些结果可用来讨论分岔解。

参 考 文 献

[1] Heisenberg, W., Über stabilität und turbulenz von flüssigkeitsströmen, *Annalen der Physik* **74** (1924), 577.

[2] Lin, C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press (1955).

[3] Joseph, D. D., *Stability of Fluid Motion* I-II, Springer-Verlag, (1976).

[4] Dong Ming-de, *Poincaré Problem of Irregular Integrals* (Lecture Notes), (1981).

The Spectral Problem of Poiseuille Flow

Dong Ming-de

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Bejing)

Abstract

For Poiseuille flow the Orr-Sommerfeld equation is solved exactly. Regular solutions are obtained, thereby the eigenvalue equation can be analyzed analytically and explicitly. The bifurcation solutions will be discussed subsequently.