

关于敏感动力系统以及从表观决定 过程向完全随机过程的过渡

岳曾元 张 彬

(北京大学地球物理系, 1984年2月1日收到)

摘 要

本文详细分析了掷硬币的动力学过程, 通过计算研究了最终位形(即正、反面)究竟如何敏感地依赖于初始条件以及造成这种敏感性的原因。结果也表明, 随着硬币质心初始高度 h 的增加, 最终位形对于初始参数(初始方位, 初始角速度等)、桌面的能量吸收因子以及空气阻力系数等变得越来越敏感。如果我们在初始时刻保持“正面”向上, 但允许某些其它参数有一个微小的变化范围, 那么, 当 h 小(与硬币半径相比)时, 最终位形为“正面”的频率为1; 当 h 非常大时, 该频率接近于 $1/2$ 。一个有趣的问题是: 当 h 从零开始连续增加时, 这个频率怎样从1连续地过渡到 $1/2$? 仔细计算表明, 这个“过渡”与从层流到湍流的过渡颇为相似。本文指出了“过渡阶段”与“完全随机阶段”的基本区别: 在“完全随机阶段”, 单个情形的决定性过程对初始条件和动力学参数极端敏感, 而系综的统计性质则对初始条件和动力学参数的微小变化不敏感; 与此相反, 在“过渡阶段”, 单个情形的决定性过程和系综的统计性质对初始条件和动力学参数都敏感。造成过渡阶段这一特点的机制是在参数空间中存在着“长链结构”。本文还讨论了这一分析对其它随机现象可能具有的启示。

一、引 言

所谓“敏感动力系统”, 我们指的是这样一类动力系统: 当定解条件(初始条件或边界条件)中的诸参数完全给定后, 过程是完全确定的(即决定性过程), 但当某些参数发生微小改变时, 过程会发生十分显著的变化, 这就使得过程的结果敏感地依赖于这些参数。

在自然界中, 敏感动力系统是广泛存在的最典型的例子是湍流, 其它的例子可举出分子热运动、布朗运动、 N 体问题(当 N 很大)以及掷硬币等。

通常人们所说的随机现象, 究其原因, 是由两方面造成的: 第一, 参数(或信息)不完全确定(由于无法精确地测量, 或无法精确地控制); 第二, 过程(和结果)对这些参数极其敏感^[1]。事实上, 第二点是更本质的, 因为实际过程中的参数永远也无法绝对精确地控制。倘若过程对这些参数不敏感, 则在一定误差范围内可近似表现为决定性过程。我们称这种近似意义下的决定性过程为表观决定过程。例如实际上的层流就是表观决定过程。如果精确测量层流流场, 会发现也有脉动, 不过这些脉动被局限在一定误差范围内, 不发展而已。

敏感动力系统常常与非线性相联系。人们对非线性问题规律性的认识还远远不够。线性问

题的解常常显现出比较简单的渐近性态,如周期性、单调性等,而许多非线性问题的解并不具有简单的渐近性态(尽管是决定性问题),而显现出某些奇特的性质(非周期性、奇吸引子等)。自从Lorenz^[2]发现这种奇特性质,特别是近十几年来,这方面的研究十分热烈^[3]。

敏感动力过程中常常含有某一个与敏感性有关的参数。例如湍流中的 Reynolds 数。在有入口(如管流)或前缘(如平板边界层)的流动问题中,也可取离入口(或前缘)的距离 x (或基于 x 的 Reynolds 数 Re_x)作为敏感性参数。当 x 或 Re_x 越大,过程对来流条件和壁面条件就越敏感。布朗运动中,布朗粒子质量 m 与敏感性密切相关。 m 越小,布朗运动对初始速度及周围介质的条件就越敏感。在 N 体问题中, N 越大,过程对初始条件越敏感。掷硬币问题中,初始高度 h (或初始机械能 E_0)越大,则结果对初条件(初始方位、角速度等)和动力参数(空气阻力参数、桌面的能量吸收率)就越敏感。

概括地说,对于一大类敏感动力系统,我们可以假定过程中存在一个控制其敏感性的参数 s ,使得过程的敏感性随 s 增加而增强[对于前述诸例,可分别取 s 为 Re 或 Re_x (对于流体), m^{-1} (对于布朗运动), N (对于 N 体问题), h 或 E_0 (对于掷硬币)]。当 $s \ll 1$,尽管仍不可避免地存在某些未知(或不能完全确定的)信息,但实际上在一定误差范围内不显现随机性,即为如前所述的表观决定过程;当 $s \gg 1$,信息的极小的不确定性便导致实际过程的极度无规,使实际过程成为完全(即充分发展的)随机过程。

于是,我们提出一个一般的问题:当控制敏感性的参数 s 从很小的值连续增加时,怎样从表观决定过程过渡到完全随机过程?这个过渡阶段与完全随机阶段相比有什么一般特点?造成这些特点的一般原因是什么?

本文中我们将以掷硬币这一简单的敏感动力系统为例,对上述问题作一仔细的、动力学的研究。

二、问题的提法

我们略去硬币的自旋,并假定桌面为绝对水平、光滑和刚性的。这样一来,在碰撞过程中,桌面将不对硬币施加水平方向的力。因此,只要初始时刻硬币质心速度只有铅直分量,则质心将永远处于同一铅直线上。再假定初始时刻硬币绕其直径旋转的角速度只有水平分量,则硬币将只有两个自由度:质心到桌面的距离 y_* 和某一指定侧(记为 A 面)的法向量 \vec{n}_A 与铅直方向的夹角 ϕ (图1)。

为方便,我们采用如下无量纲量:

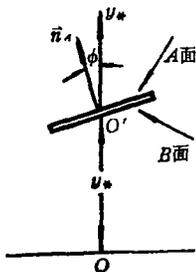


图1 硬币的两个自由度 $y_*=OO'$ 和 ϕ (\vec{n}_A 与 y_* 轴夹角)

$$\left. \begin{aligned} y &= y_*/a, \quad t = t_* \sqrt{\frac{g}{a}} \\ V &= V_{**}/\sqrt{ga}, \quad \omega = \omega_* \sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 a 为硬币半径,下标“*”表有量纲量, g 为重力加速度,而

$$V_* = \frac{dy_*}{dt_*}, \quad \omega_* = \frac{d\phi}{dt_*} \quad (2.2)$$

于是,计及空气阻力,在未发生碰撞期间之内,硬币满足如下动力学方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = V \\ \frac{dV}{dt} = -\beta |\cos\phi| V - 1 \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\beta\omega \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\beta |\cos\phi| V - 1 \quad (2.4)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega \quad (2.5)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\beta\omega \quad (2.6)$$

其中 β 为无量纲空气阻力系数, 定义为

$$\beta = \frac{\pi a^{5/2}}{mg^{1/2}} a \quad (2.7)$$

α 为有量纲的空气阻力系数。(2.3)~(2.6)的推导在附录A中给出。(2.3)~(2.6)在初始条件

$$y(t_0) = y_0, \quad V(t_0) = V_0, \quad \phi(t_0) = \phi_0, \quad \omega(t_0) = \omega_0 \quad (2.8)$$

之下的解为

$$\omega = \omega_0 \exp(-\beta\tau) \quad (2.9)$$

$$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0}{\beta} [1 - \exp(-\beta\tau)] \quad (2.10)$$

$$V = \exp\left(-\beta \int_0^\tau |\cos\phi(\tau')| d\tau'\right) \left[V_0 - \int_0^\tau \exp\left(\beta \int_0^{\tau'} |\cos\phi(\tau'')| d\tau''\right) d\tau' \right] \quad (2.11)$$

$$y = y_0 + \int_0^\tau V(\tau') d\tau' \quad (2.12)$$

其中

$$\tau = t - t_0 \quad (2.13)$$

方程(2.4)中的阻力项 $-\beta |\cos\phi| V$ 计及了如下效应: 即空气阻力除与速度有关外, 还与方位有关. 这一效应的计入使 y 满足的方程(2.3)、(2.4)与 ϕ 满足的方程(2.5)、(2.6)相耦合.

由于空气阻力一般是小的, 我们可近似用 $|\cos\phi|$ 的平均值

$$\langle |\cos\phi| \rangle \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |\cos\phi| d\phi = 2/\pi \quad (2.14)$$

来代替方程(2.4)中的 $|\cos\phi|$, 而得近似方程

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2}{\pi} \beta V - 1 \quad (2.4)'$$

如用(2.4)'代替(2.4), 则(2.3)、(2.4)'与(2.5)、(2.6)可分开求解. 在初始条件(2.8)之下的解为

$$\omega = \omega_0 \exp(-\beta\tau) \quad (2.15)$$

$$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0}{\beta} [1 - \exp(-\beta\tau)] \quad (2.16)$$

$$V = \left(V_0 + \frac{\pi}{2\beta} \right) \exp\left(-\frac{2\beta}{\pi} \tau\right) - \frac{\pi}{2\beta} \quad (2.17)$$

$$y = y_0 - \frac{\pi}{2\beta} \tau + \frac{\pi}{2\beta} \left(V_0 + \frac{\pi}{2\beta} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{2\beta}{\pi} \tau\right) \right] \quad (2.18)$$

下面我们来讨论碰撞的动力学。我们略去每次碰撞本身经历的时间，即认为碰撞是瞬时完成的。第 n 次碰撞前、后的质心速度、角速度和动能分别记为 V_{n*} , ω_{n*} , T_{n*} 和 V'_{n*} , ω'_{n*} , T'_{n*} ，而第 n 次碰撞过程中桌面给硬币的冲量记为 P_{n*} （其方向铅直向上），引进无量纲量

$$\left. \begin{aligned} V_n &= V_{n*} / \sqrt{ga}, & V'_n &= V'_{n*} / \sqrt{ga}, \\ \omega_n &= \omega_{n*} \sqrt{a/g}, & \omega'_n &= \omega'_{n*} \sqrt{a/g} \\ T_n &= T_{n*} / (mga), & T'_n &= T'_{n*} / (mga), & P_n &= P_{n*} / (m\sqrt{ga}) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

则由动量定理和角动量定理得到

$$V'_n - V_n = P_n \quad (2.20)$$

$$\omega'_n - \omega_n = 4S_n |\cos\phi_n| P_n \quad (2.21)$$

其中

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{若碰撞发生在 } x > 0 \text{ 一侧} \\ -1 & \text{若碰撞发生在 } x < 0 \text{ 一侧} \\ 0 & \text{若碰撞发生在 } x = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

而 ϕ_n 为第 n 次碰撞时的 ϕ 值。显然，(2.22) 式也可改写成^①

$$S_n = \text{sign}(-\sin 2\phi_n) \quad (2.23)$$

(2.20)、(2.21) 的推导也在附录 A 中给出。

碰撞前后的动能 T_{n*} 和 T'_{n*} 分别为

$$T_{n*} = \frac{1}{2} m V_{n*}^2 + \frac{1}{2} J \omega_{n*}^2 \quad (2.24)$$

和

$$T'_{n*} = \frac{1}{2} m V'_{n*}^2 + \frac{1}{2} J \omega'_{n*}^2 \quad (2.25)$$

其中 J 为硬币绕其自身直径的转动惯量。假定硬币为均匀的薄圆柱体，有

$$J = \frac{1}{4} ma^2 \quad (2.26)$$

于是，(2.24) 和 (2.25) 的无量纲形式为

$$T_n = \frac{1}{2} V_n^2 + \frac{1}{8} \omega_n^2 \quad (2.27)$$

和

$$T'_n = \frac{1}{2} V_n'^2 + \frac{1}{8} \omega_n'^2 \quad (2.28)$$

由于碰撞本身可能产生耗散（即硬币动能的一部分可能转化成桌内分子的热动能），故应有

$$T'_n \leq T_n \quad (2.29)$$

等号对应于无碰撞耗散的情形。

将(2.20)，(2.21)，(2.27)，(2.28) 代入(2.29)，不难得出（详见附录 A）

^① 在本文中，我们将不讨论 $\phi_n = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$) 即正好“卧碰”这一退化情形，因为卧碰时，硬币的受力处不是一点，而至少是整个圆周，使碰撞的动力学过程复杂化。在我们将要讨论的成千上万种不同初始条件下的运动之中，卧碰出现的机会是极其微小的。因此，我们将把这一退化情形排除于我们的统计范围之外。

$$P_n \leq -2(V_n + \omega_n S_n |\cos \phi_n|) \cdot [1 + 4S_n^2 \cos^2 \phi_n]^{-1} \quad (2.30)$$

其中等号对应于无碰撞耗散的情形。

我们现在来求出 P_n 的下限。碰撞点在碰撞后的速度的铅直向上的分量（无量纲形式）为

$$V'_{nm} = V'_n + S_n \omega'_n |\cos \phi_n| \quad (2.31)$$

其中下标 m 表示碰撞点， n 表示第 n 次碰撞。由于桌面是绝对刚性的，应有

$$V'_{nm} \geq 0 \quad (2.32)$$

将(2.20)，(2.21)代入(2.31)，可将(2.32)式写成

$$V_n + S_n |\cos \phi_n| \omega_n + P_n (1 + 4S_n^2 \cos^2 \phi_n) \geq 0 \quad (2.33)$$

于是

$$P_n \geq -(V_n + S_n |\cos \phi_n| \omega_n) \cdot [1 + 4S_n^2 \cos^2 \phi_n]^{-1} \quad (2.34)$$

如令

$$P_{nc} = -(V_n + S_n |\cos \phi_n| \omega_n) \cdot [1 + 4S_n^2 \cos^2 \phi_n]^{-1} \quad (2.35)$$

则(2.30)与(2.35)可合写成

$$P_{nc} \leq P_n \leq 2P_{nc} \quad (2.36)$$

如令

$$\xi = P_n / P_{nc} \quad (2.37)$$

则有

$$1 \leq \xi \leq 2 \quad (2.38)$$

其中 $\xi = 2$ 对应于无碰撞耗散的极限情形， $\xi = 1$ 则对应于 $V'_{nm} = 0$ 的另一极限，也就是碰撞耗散最大的极限（见图2）。

注意，碰撞点在碰撞前速度的铅直向上分量为

$$V_{nm} = V_n + S_n |\cos \phi_n| \omega_n \quad (2.39)$$

由物理意义易知

$$V_{nm} \leq 0 \quad (2.40)$$

（否则碰撞不会发生）。由(2.35)，(2.39)和(2.40)，易知

$$P_{nc} \geq 0 \quad (2.41)$$

再由(2.36)，知

$$P_n \geq 0 \quad (2.42)$$

将(2.20)，(2.21)代入(2.28)式，可将碰撞后的动能 T'_n 表为碰撞冲量 P_n 的函数（对于给定的碰撞前的 V_n ， ω_n 和 ϕ_n ）：

$$T'_n = \left(\frac{1}{2} + 2S_n^2 \cos^2 \phi_n \right) P_n^2 + (V_n + \omega_n S_n |\cos \phi_n|) P_n + T_n \quad (2.43)$$

这是 P_n 的二次式，其最小值在 $P_n = P_{nc}$ 处达到。 $T'_n \sim P_n$ 曲线形状如图2所示，其中只有实线部分（ $P_{nc} \leq P_n \leq 2P_{nc}$ ）为实际可能的情形。注意，当 $P_n = 2P_{nc}$ 时， T'_n 达其最大值 T_n ，而当 $P_n = P_{nc}$ 时， T'_n 达其最小值 $T'_{n \min}$ （即发生最大碰撞耗散）。利用 P_{nc} 和 $T'_{n \min}$ ，可将(2.43)式改写成

$$T'_n = T'_{n \min} + (T_n - T'_{n \min}) (\xi - 1)^2 \quad (2.44)$$

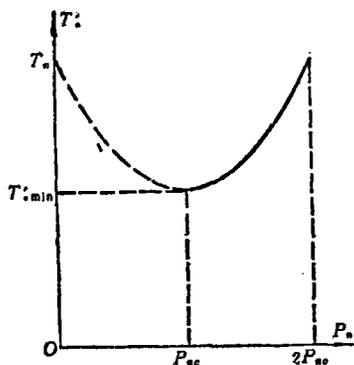


图2. 碰撞后动能 T'_n 与碰撞冲量 P_n 的关系。只有实线部分（ $P_{nc} \leq P_n \leq 2P_{nc}$ ）代表实际可能的范围。

第 n 次碰撞过程中的能量耗散为

$$\Delta T_n = T_n - T'_n \quad (2.45)$$

最大耗散量则为

$$(\Delta T_n)_{\max} = T_n - T'_{* \min} \quad (2.46)$$

容易将 (2.44) 改写成

$$\Delta T_n = (\Delta T_n)_{\max} [1 - (\zeta - 1)^2] \quad (2.47)$$

如引进碰撞耗散因子

$$\eta = \Delta T_n / (\Delta T_n)_{\max} \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad (2.48)$$

则 $T'_n \sim P_n$ 关系可改写成

$$\eta = 1 - (\zeta - 1)^2 \quad (1 \leq \zeta \leq 2) \quad (2.49)$$

或

$$\zeta = 1 + \sqrt{1 - \eta} \quad (2.50)$$

由物理考虑易知, 碰撞冲量 P_n 显然依赖于碰撞前的状态 (V_n, ω_n, ϕ_n) 以及桌面的性质 (η 或 ζ)。由 (2.37)、(2.35) 和 (2.50), 我们已得到 P_n 的如下表达式

$$P_n = \zeta [-(V_n + S_n |\cos \phi_n| \omega_n)] \cdot [1 + 4S_n^2 \cos^2 \phi_n]^{-1} \quad (2.51)$$

$$= (1 + \sqrt{1 - \eta}) [-(V_n + S_n |\cos \phi_n| \omega_n)] \cdot [1 + 4S_n^2 \cos^2 \phi_n]^{-1} \quad (2.52)$$

此式已清楚体现了 P_n 对 V_n , ω_n , ϕ_n 及桌面性质的依赖性。其中, 桌面性质只体现在 η (或 ζ) 中。若桌面是完全弹性的 (即无碰撞耗散), 有 $\eta = 0$ (或 $\zeta = 2$); 若桌面弹性差到使 $V'_n = 0$ (即碰撞耗散达极大), 有 $\eta = 1$ ($\zeta = 1$)。我们假定 η 只与桌面性质有关, 与 V_n , ω_n , ϕ_n 无关。因此在硬币整个运动过程中 η (或 ζ) 为一给定常数。特别, 如果我们考虑有空气阻力而无碰撞耗散的情形, 上述假定是精确成立的 ($\eta = 0, \zeta = 2$), 于是 P_n 与 V_n , ω_n , ϕ_n 关系完全已知。进一步, 我们也可指定 η 的非零值来考察碰撞耗散的效应。

在完全弄清楚了硬币在未碰期间及碰撞前后的动力学之后, 只要指定一组初始条件: 硬币质心初始高度 h , 初始方位 ϕ_0 , 质心初始速度 V_0 , 初始角速度 ω_0 , 以及空气阻力系数 β 和桌面的碰撞耗散因子 η , 则过程被完全确定。我们特别关心的是最终方位

$$\phi_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) \quad (2.53)$$

只要在全过程中存在耗散 (由于 $\beta > 0$ 或 $\eta > 0$, 或两者兼而有之), 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 硬币总要最终平躺在桌面上, 即 ϕ_∞ 只能是 π 的整数倍:

$$\phi_\infty = k\pi \quad (k \text{ 为整数}) \quad (2.54)$$

若 k 为偶数, 表示最终 A 面向上; 若 k 为奇数, 最终 B 面 (A 的反面) 向上。我们下面来指出, ϕ_∞ 事实上被有限的 t 上的 ϕ 值就决定了。硬币的无量纲机械能为

$$E_* = T_* + mgy_* \quad (2.55)$$

其中 T_* 和 mgy_* 分别为动能和重力势能。由于耗散的存在, E_* 为 t 的单调下降函数。当

$$E_*(t) < mga \quad (2.56)$$

时, 硬币已不可能再翻过, 因为硬币每翻一次过必然经历一个直立的中间状态, 而直立的中间状态必有 $E_* \geq mga$ 。条件 (2.56) (可称为“不翻过条件”) 的无量纲形式为

$$E = T + y < 1 \quad (2.57)$$

其中 $E = E_*/(mga)$, 或

$$E = \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{8} \omega^2 + y < 1 \quad (2.58)$$

由于在碰撞的瞬间有

$$y_n = |\sin\phi_n| \quad (2.59)$$

故若第 N 次碰撞后有

$$E'_N = \frac{1}{2} V'_N{}^2 + \frac{1}{8} \omega'_N{}^2 + |\sin\phi_N| < 1 \quad (2.60)$$

则对于所有 $n > N$ 的碰撞都是不翻过的碰撞。于是，可简单地由 ϕ_N 推算出 ϕ_∞ 如下：

$$\phi_\infty = \text{sign}(\phi_N) \cdot \left[\frac{1}{\pi} \left(|\phi_N| + \frac{\pi}{2} \right) \right] \pi \quad (\text{当 } E'_N < 1) \quad (2.61)$$

其中函数 $[x]$ 表示 x 的整数部分， $\text{sign}(\phi_N)$ 表示 ϕ_N 的符号：

$$\text{sign}(\phi_N) = \begin{cases} 1 & \text{当 } \phi_N > 0 \\ 0 & \text{当 } \phi_N = 0 \\ -1 & \text{当 } \phi_N < 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

(2.61)式使我们能够只经过有限次的计算就将最终方位 ϕ_∞ 求出。

这样，我们完成了动力学的提法。在下一节中我们将讨论单过程（即给定初始条件下的决定性过程）及其对初始条件的敏感性。第4节中将讨论系综的统计性质。特别是，如果我们保持 $\phi_0 = 0$ 而允许其它参数（如 ω_0 ）有一微小的不确定性，则结果的统计性质怎样由 $h \ll 1$ 的表观决定性的性态（ $\phi_\infty = 0$ ）过渡到 $h \gg 1$ 时的完全随机性的性态（ A, B 面约各占 $1/2$ ）。在下两节的具体计算中，对于未碰期间的动力方程，我们将采用近似方程(2.4)'来代替(2.4)。这只是为了节省机时，因为我们在研究系综的统计性质时，需计算成千上万个单过程。我们要指出，在阻力系数小的情形下，用(2.4)'代替(2.4)引起的误差是很小的。重要的是，这一近似保留了问题的本质性质，因为该系统的敏感性主要是由于碰撞过程所致。碰撞过程是非线性过程，因此，尽管用(2.4)'代替(2.4)这一简化使未碰期间的动力过程简化为线性过程，但整个过程（包括未碰期间与碰撞前后的动力学）仍然是非线性的。

三、单过程及其对初始条件的敏感依赖性

我们计算了成千上万个单过程（即在给定初始条件和动力参数 β, η 之下的决定性过程）。为了给出单过程的具体特点并说明单过程如何以及为什么敏感地依赖于初始条件，我们挑选了两个典型的情形，将计算结果画在图3。这两个情形的初始条件分别是：

$$\begin{aligned} \text{情形(i):} \quad & \phi_0 = 0, V_0 = 0, h = 20.05, \omega_0 = 0.0026, \\ & \beta = 0.1, \eta = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{情形(ii):} \quad & \phi_0 = 0, V_0 = 0, h = 20.05, \omega_0 = 0.0025, \\ & \beta = 0.1, \eta = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

可见，两个情形下的初始条件和动力学参数中，除了初始角速度有 0.0001 的微小差别外，所有其它参数均相同。由图3可见，两个情形下的机械能曲线 $E_1(t)$ 与 $E_2(t)$ 几乎始终重合，质心高度随 t 变化的曲线 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 、以及角度随 t 变化的曲线 $\phi_1(t)$ 与 $\phi_2(t)$ 在开始阶段也几乎重合，但在某一次与桌面碰撞后开始明显地分离，最后导致不同结果：

$$\phi_{1\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1(t) = -5\pi \quad (B\text{面}) \quad (3.3)$$

$$\phi_{2\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_2(t) = -6\pi \quad (A\text{面}) \quad (3.4)$$

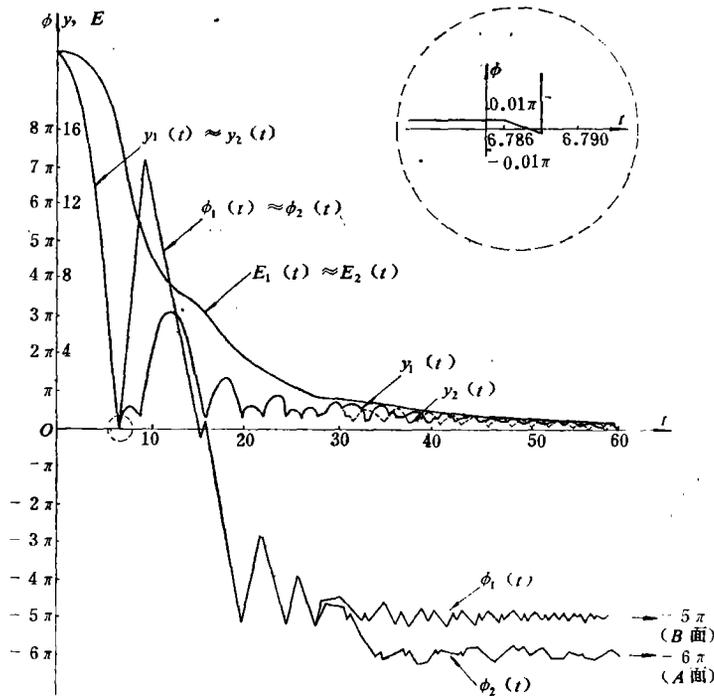


图3 两种相近条件下的硬币运动规律. 这两种条件分别是: $h_1=h_2=20.05$, $V_{01}=V_{02}=0$, $\phi_{01}=\phi_0=0$, $\beta_1=\beta_2=0.1$, $\eta_1=\eta_2=0$, 唯一的区别是 $\omega_{01}=0.0026$, $\omega_{02}=0.0025$. 初始角速度的这一 0.0001 的微小差别导致了不同的最终位形. 两个情形下的机械能曲线 $E_1(t)$ 与 $E_2(t)$ 几乎始终重合, 质心高度曲线 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 以及角度曲线 $\phi_1(t)$ 与 $\phi_2(t)$ 在开始阶段也几乎重合, 只在某次碰撞后才明显分开. 右上角为虚圆所示局部区域的放大图.

为什么初始条件这样微小的差别 ($\omega_{01}-\omega_{02}=0.0001$) 会最终导致不同的结果? 仔细察看两个单过程的全部数据, 发现: 对于使 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 两条曲线开始发生明显偏离的那一次碰撞, 硬币的方位比较接近于直立^①, 于是, 微小的角度偏差 $\Delta\phi_0$ 会使桌面在碰撞过程中给硬币的冲量矩发生显著的相对差异, 从而使碰撞后的角速度 ω' 发生显著差异 (甚至反号)! 这是掷硬币的结果如此敏感地依赖于初始条件的重要原因. 然而, 即使对于固定的 h , 使某次碰撞时硬币的方位较近于直立的可能性在参数空间 (如 ω_0, ϕ_0) 中并不是均匀分布的 (而且这种分布也不具有简单的性态), 因此也就使得敏感程度在参数空间中也不是均匀分布的, 而且这种分布也不具有简单的性态, 从而使得结果对于初始参数的依赖性显示出高度的无规性 (尽管是决定性过程).

从连续性的考虑, 应存在介于 0.0025 和 0.0026 之间的 $\hat{\omega}_0$

$$0.0025 < \hat{\omega}_0 < 0.0026 \quad (3.5)$$

使得在条件 $h=20.05$, $\phi_0=V_0=\eta=0$, $\beta=0.1$ 之下, 有

$$\phi_\infty \Big|_{\omega_0=\hat{\omega}_0} = -5\frac{1}{2}\pi \quad (3.6)$$

这代表直立的终态 (不稳定平衡). 并且, 对于无论多么小的 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$, 有

$$\phi_\infty \Big|_{\omega_0=\hat{\omega}_0+\varepsilon_1} = -5\pi \quad (B面), \quad \phi_\infty \Big|_{\omega_0=\hat{\omega}_0-\varepsilon_2} = -6\pi \quad (A面) \quad (3.7)$$

① 为给出一个定量的概念, 我们可称与直立状态偏离 $\leq 30^\circ$ 为 “近直立状态”

由图3还可看出, ϕ_{∞} 的确被 $E=1$ 处的 ϕ 值所确定 (参看(2.61)式)。

四、系综的统计性质的研究

我们来提出如下问题: 如果我们保持 $\phi_0=0$ (即初始时刻 A 面向上), 但允许 ω_0 有一个微小的不确定性, 例如①

$$0 \leq \omega_0 \leq \varepsilon_{\omega_0} \quad (4.1)$$

其中 ε_{ω_0} 为一个远小于1的指定的正数, 并设 ω_0 在此区间中是以均匀的概率分布的, 那么, 最终结果中 A 面向上的概率 P 是多少? 如果 $V_0=\phi_0=0$, η , β 以及 (4.1) 式中的 ε_{ω_0} 均给定, 则 P 只应是初始高度 h 的函数。由于初始时刻机械能为

$$E_0 = \frac{1}{2} V_0^2 + \frac{1}{8} \omega_0^2 + h \leq h + \frac{1}{8} \varepsilon_{\omega_0}^2 \quad (4.2)$$

故知当

$$h < 1 - \frac{1}{8} \varepsilon_{\omega_0}^2 \quad (\text{即 } E_0 < 1) \quad (4.3)$$

时必有 $\phi_{\infty}=0$ (参看第2节中的“不翻过条件”(2.58)), 即有

$$P=1 \quad \left(\text{当 } h < 1 - \frac{1}{8} \varepsilon_{\omega_0}^2 \right) \quad (4.4)$$

另一方面, 当 h 非常大时, 硬币必经过多次碰撞才使机械能 E 小于1。这便使得初始不对称性 (A 面向上) 的后效性经过几次与桌面碰撞后便事实上消失, 而应有

$$P \sim 1/2 \quad (\text{当 } h \gg 1) \quad (4.5)$$

当然 h 需多大才足以达到这种状态是与 ε_{ω_0} 大小有关的。

一个有趣的问题是, 当 h 从零开始连续增加时, $P(h)$ 曲线怎样连续地从 (4.4) 过渡到 (4.5)? 它是单调地从1衰减到1/2吗? 我们将通过计算来回答这一问题。

在图4中, 我们给出 $\phi_0=V_0=0$, $\beta=0.1$, $\eta=0$, $\varepsilon_{\omega_0}=0.1$ 情形下的 $P(h)$ 曲线。具体作法是对于每一指定的 h 值, 令

$$\omega_{0k} = \frac{k}{N} \varepsilon_{\omega_0} \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

来计算这 N 个单情形 (令 $\omega_0 = \omega_{0k}$, $k=1, 2, \dots, N$), 其中 N 是一个大的正整数。 $P(h)$ 则定义为这 N 个结果中 A 面所占的百分比, 即

$$P(h) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (1 + \cos \phi_{\infty k}) \quad (4.6)$$

在具体计算中, 我们取 $N=100$ 。

由图4可见, 在 $h \approx 1.15$ 时, $P=1$ 这一表观决定性的性态突然消失而开始一个上下剧烈振荡的过渡阶段。大约从 $h \sim 6$ 开始, 象过渡区那样的大幅度剧烈振荡基本消失, $P(h)$ 曲线开始在1/2附近作小幅度的振荡。我们称此阶段为完全随机阶段。这里有两点应当指出: (i) 在完全随机阶段, 并不排除 $P(h)$ 曲线在某一局部又发生稍大涨落的可能性, 如图4在 $h=12.4$ 附近的情形。但这种局部涨落无论从幅度还是从宽度上都无法同过渡区的剧烈涨落相比; (ii) 过渡

① 由于已取定 $\phi_0=V_0=0$, 使得 $\phi(t, \omega_0) = -\phi(t, -\omega_0)$ 。因此, 研究系综 $0 \leq \omega_0 \leq \varepsilon_{\omega_0}$ 等价于研究系综 $-\varepsilon_{\omega_0} \leq \omega_0 \leq \varepsilon_{\omega_0}$ 。

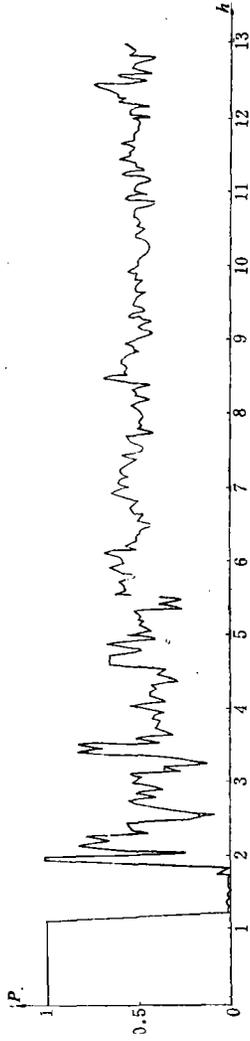


图4 一条典型的 $P(h)$ 曲线. 条件是: $V_0 = \phi_0 = 0, e_{00} = 0.1, \beta = 0.1, \eta = 0$. 约从 $h = 1.15$ 开始, $P = 1$ 的状态突然消失, 开始大幅度剧烈振荡的过渡区. 约从 $h = 6$ 开始, 转入在 $1/2$ 附近小幅振荡的完全随机区.

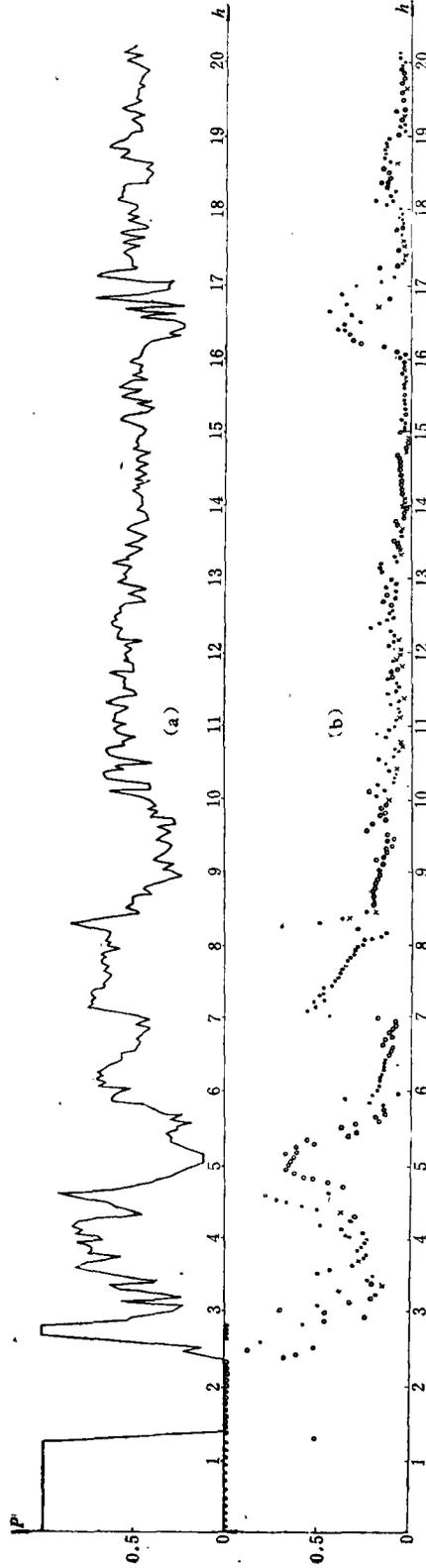


图5. (a) 另一条 $P(h)$ 曲线. 除空气阻力系数增大为 $\beta = 0.15$ 外, 其余条件均与图4相同. 与图4对比, 易见 β 增大的效果是过渡区加长, 推迟了完全随机区的出现. 又, 注意在 $h = 17$ 附近的局部较大涨落. (b) 在图5(a)条件下, 最长的“长链”长度随 h 的变化. 与图5(a)相对比, 易见凡 $P(h)$ 曲线发生大的涨落 (即显著偏离 $1/2$) 处都对应着图5(b)中 $l(h)$ 图的峰值处. 这清楚地表明了两者之间的相关性. 图中点和圆圈分别表示最长链为 A 面和 B 面, 叉号表示 A 面的最长链与 B 面的最长链长度几乎相等的情形.

区与完全随机区之间的界线不是截然的, 而表观决定性区与过渡区之间的界线是几乎截然的。

在图5(a)中, 我们给出在条件 $\beta=0.15$, $\eta=0$, $\phi_0=V_0=0$, $\varepsilon_{\omega_0}=0.1$ 之下的 $P(h)$ 曲线。与图4条件相比, 唯一区别是空气阻力系数 β 增大了, 但这一点对 $P(h)$ 曲线的效应是十分明显的: 过渡区明显加长, 大约到 $h \sim 10$ 才开始进入完全随机区 (在完全随机区内 $16.2 < h < 17.1$ 处又出现一局部的较大涨落)。

我们应着重指出的是, P 作为 h 的函数完全是通过决定性过程的计算而得到的, 我们未引进任何随机项。然而, $P(h)$ 曲线既不呈现任何周期性, 也不呈现任何单调性。相反, 它在细节上表现出相当无规的性态, 只是在总体的趋势上显现出某些规律性来。

五、过渡区与完全随机区的比较

除去涨落的幅度这一明显的区别外, 我们要指出过渡区与完全随机区的如下区别:

在完全随机区, 单过程对参数极端敏感, 使得系综的统计性质对于参数的变化相对地不敏感 (即呈现出某些较为稳定的统计规律性); 相反, 在过渡区, 由于单过程对于参数尽管敏感, 但尚未充分敏感, 使得系综的统计性质对于参数的变化也是敏感的 (即不呈现较稳定的统计规律性)。

应强调, 以上说法不只适用于本问题, 而且也适用于一般的敏感动力系统。

还应指出, 上述“极端敏感”与“尚未充分敏感”是相对于参数的不确定程度 (如上节中的 ε_{ω_0}) 而言的 (参看下面图7)。

为更好说明统计规律性方面的上述差别, 我们来考察“相邻”的十个单过程中, 结果有 n 次 A 面向上的频率 $P(10, n)$ 。具体作法如下: 为求某组给定参数 ($h_0, \beta, \eta, \phi_0, V_0, \varepsilon_{\omega_0}$) 之下的函数 $P(10, n)$, 我们将 $h=h_0, h_0 \pm 0.05, h_0 \pm 0.10$ 的 500 个结果 (取 $N=100$, 每个 h 有 100 个单情形) 分成 50 组 (同一 h , 按 ω_0 的增序为相邻的 10 个归为一组), 这样统计而得到的 $P(10, n)$ 显然以 h_0, β, η 为参数 (取定 $\phi_0=V_0=0, \varepsilon_{\omega_0}=0.1$)。我们在图6(a)和(b)中分别对于过渡区和完全随机区各给出五组不同参数下的 $P(10, n)$ “曲线”。易见, 过渡区的 $P(10, n)$ 曲线对参数 (h_0, β, η) 极其敏感, 而完全随机区的 $P(10, n)$ 曲线已呈现出相当清楚的统计规律性, 并且已相当接近于假定各次投掷彼此独立且每次投掷 A 面向上概率为 $1/2$ 的结果 (按照概率论)

$$P_*(10, n) = 2^{-10} C_{10}^n = 10! \cdot [2^{10} \cdot n! (10-n)!]^{-1} \quad (5.1)$$

下面我们来讨论过渡区与完全随机区为什么有上述差别。

在图7(a)和(b)中我们分别给出过渡区和完全随机区的 $k \sim \omega_0 / \varepsilon_{\omega_0}$ 关系的典型图示, 其中 $k = \phi_{\omega} / \pi$ 为总共翻转的次数。图7(a)所示的过渡区 $k \sim \omega_0 / \varepsilon_{\omega_0}$ 图中存在着一些“长链结构”, 这就是本节开头所说的“结果对参数虽然敏感, 但尚不充分敏感”。与此相对照, 在完全随机区 [图7(b)], 参数空间已充分“破碎”, 一般说来, 已不存在使 k 不变的“长链结构”。这是完全随机区的重要特征。

在过渡区, 当参数 (β, η, h 等) 发生微小变化时, 长链的位置、长度及其上的 k 值均敏感地跟着变化。这就是过渡区不存在稳定的统计规律性的原因; 与此相对照, 在完全随机区, 一般说来, 长链结构已不存在, $k \sim \omega_0 / \varepsilon_{\omega_0}$ 关系显现出极端的无规性质, 这使得统计性质对其它参数 (如 β, η, h) 的依赖性反而大大减弱了, 从而呈现出较为稳定的统计规律性。

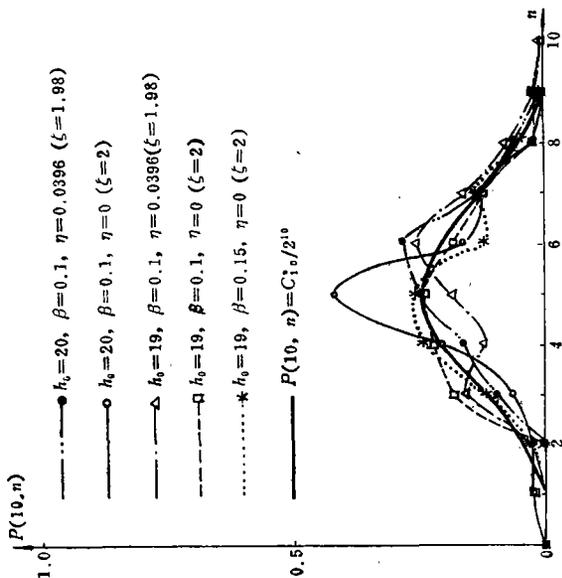


图6(a) 在过渡区五组不同参数(h_0, β, η) 之下的 $P(10, n)$ “曲线”。易见 $P(10, n)$ “曲线”形状对于参数的变化是非常敏感的。

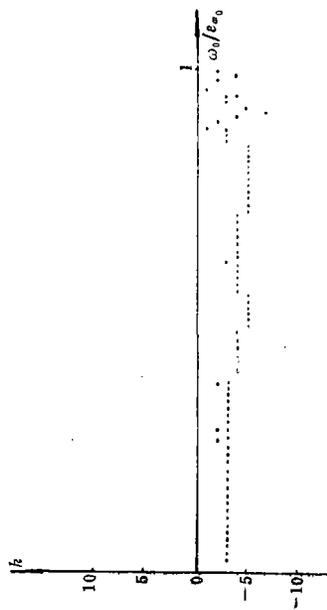


图7(a) 过渡区的典型的 $k \sim \omega_0/\epsilon_{00}$ 图. ($\beta=0.1, \eta=0, h=4, \epsilon_{00}=0.1, \phi_0=V_0=0$).

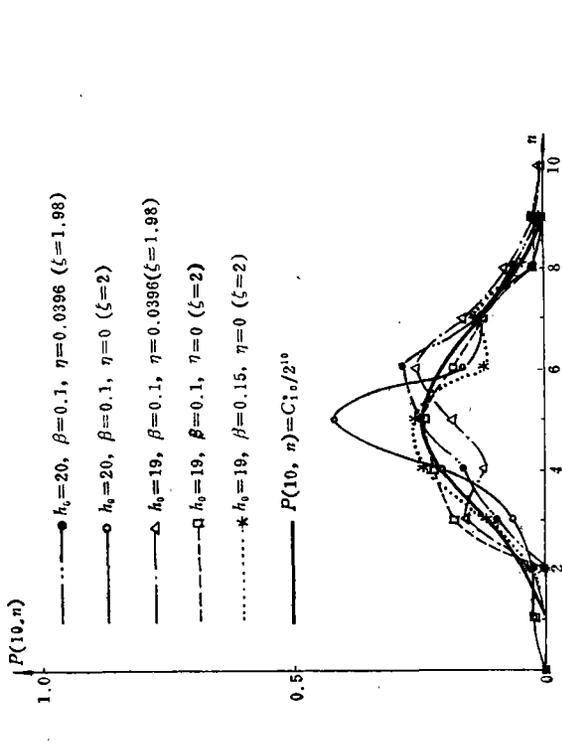


图6(b) 完全随机区五组不同参数(h_0, β, η) 之下的 $P(10, n)$ “曲线”。易见, 已呈现相当清楚的统计规律性, 并已接近概率论的结果。

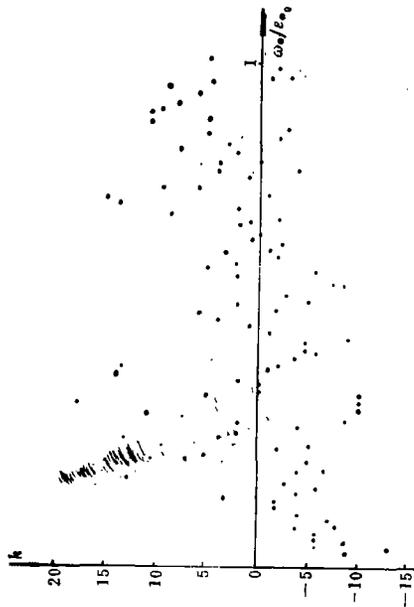


图7(b) 完全随机区的典型的 $k \sim \omega_0/\epsilon_{00}$ 图. ($\beta=0.1, \eta=0, h=20, \epsilon_{00}=0.1, \phi_0=V_0=0$).

为了更清楚地看清这一点,我们在图5(b)中给出了在与图5(a)相同条件下、 $k \sim \omega_0/\varepsilon\omega_0$ 图中使 k 不变的最长链的长度 l 作为 h 的函数图形.与图5(a)相对比,易见凡 $P(h)$ 曲线发生大的涨落(即显著偏离 $1/2$)处都对应着图5(b)中 $l(h)$ 图的峰值处.这清楚地表明了两者的相关性.

还有一个有趣的问题是:如何解释完全随机区中又出现局部的较大涨落区(如图5(a)中 $16.2 < h < 17.1$ 的一段)将它与图5(b)对比,易知其原因是这里又出现了较长的长链.一般地说,随着初始高度 h 的增加,硬币在达到 $E < 1$ 之前经历的碰撞次数越来越多,因此结果对于初条件的敏感性也增强.然而,敏感性随 h 的增强并不是单调的,因为归根结底,单过程对初条件的敏感性与“近直立碰撞”(参看第3节)关系甚大,而碰撞方位本身又是高度无规的.如果我们来作掷硬币的实验,则出现现象图5中 $16.2 < h < 17.1$ 那样局部涨落的机会是很小的.这是因为在实验中,不确定参数不只 ω_0 一个,而是所有参数.并且动力学参数 β, η 在同一个单过程中也并非绝对保持不变.

六、与流体力学的某些形式的类比

虽然本文只讨论了掷硬币这一简单的敏感动力系统,但所得结果对于理解更复杂的敏感动力系统可能具有某些启示.为了看清这一点,我们在本节中将列举此问题与流体力学的某些形式上的相似之处:

(i) 此问题中 h (或初始机械能 E_0)增加对应于流体力学中雷诺数 Re_x (或到“前缘”距离 x)增加.

(ii) 此问题中,空气阻力系数 β 越大,过渡区开始越晚,过渡区越长;流体力学中,粘性系数 ν 越大,层流失稳(过渡区开始)越晚,而湍流开始也越晚(过渡区越长).

(iii) 此问题中,当 $E_0 < 1$,无论多大扰动,恒有 $\phi_\infty = 0$ ($P=1$);流体力学中,当 $Re < Re_c$ (临界雷诺数),无论多大扰动,保持为层流.

(iv) 此问题中, $\varepsilon\omega_0$ 越大,过渡开始越早,过渡区越短;流体力学中,来流的湍流速度越大,则过渡开始越早,过渡区越短.

(v) 此问题中,完全随机区具有较为稳定的统计规律,而过渡区的统计性质很不稳定;在流体力学中,充分发展的湍流具有较为稳定的统计规律,而过渡区的统计性质则很不稳定.

七、推 广

为了简单起见,本文的计算中只选了一个不确定参数 ω_0 .在实际情形下,如果我们作掷硬币的实验,则所有参数都具有微小的不确定性,例如 $\bar{h} - \varepsilon_h \leq h \leq \bar{h} + \varepsilon_h$, $-\varepsilon_{V_0} \leq V_0 \leq \varepsilon_{V_0}$, $-\varepsilon_{\omega_0} \leq \omega_0 \leq \varepsilon_{\omega_0}$, $-\varepsilon_{\phi_0} \leq \phi_0 \leq \varepsilon_{\phi_0}$ (β 和 η 仍假定是确定的),则参数空间成为四维的.代替本文中 ω_0 -一维空间中存在结果相同的“长链结构”这一过渡区特点的将是四维参数空间中存在结果相同的“大块结构”,而完全随机性出现的条件则是这种“大块”的“体积”比四维总体积 $(2\varepsilon_h)(2\varepsilon_{V_0})(2\varepsilon_{\phi_0})(2\varepsilon_{\omega_0})$ 小得多.易知,不确定参数个数的增多使过渡区缩短,而完全随机区中统计性质出现局部大涨落的可能性则大为减少.

这一想法可推广到其它敏感动力系统.设某一敏感动力系统敏感地依赖于参数 a_1, a_2, \dots, a_n .在某种实验条件下,各参数有如下不确定度:

$$\bar{a}_i - \frac{1}{2} \varepsilon_i \leq a_i \leq \bar{a}_i + \frac{1}{2} \varepsilon_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (7.1)$$

设过程的某一结果为

$$\phi = \phi(a_1, a_2, \dots, a_n; s) \quad (7.2)$$

其中 s 为控制敏感性的参数, 当 s 增加时敏感性增强. 当 s 大时, 这是一个高度起伏、高度无规但仍然确定的函数. 我们将 ϕ 关于 a_i 的尺度记为 Δ_i , 即当 a_i 变化 Δ_i 时, ϕ 发生显著变化. 则过渡区与完全随机区的特点分别是

$$\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n \gtrsim \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n \quad (\text{过渡区})$$

和

$$\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n \ll \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n \quad (\text{完全随机区})$$

八、结 束 语

敏感动力系统是联系决定性过程与随机过程的桥梁. 仔细研究敏感动力系统有助于增进对随机过程本质的了解. 然而这种仔细研究并非容易, 因此必须挑选简单的敏感动力系统作为开始, 象本文中所作的那样. 对该系统以及其它敏感动力系统的更深入研究可能会揭示出随机现象的更多的规律来. 这种研究方式是通常概率论方法不同的. 后者是“宏观”的, 不管敏感性的细节而由适当建立的统计性假设来导出统计性结论; 前者则是“微观”的, 从敏感性的细节来探讨统计性规律. 在容易建立“适当的”统计性假设的情形, 概率论方法显示出简单的优点; 在不容易建立统计假设的情形, 敏感动力过程的研究会成为另一有益的途径.

附录A 动力学方程的建立

我们假定, 空气阻力方向与硬币质心速度 \vec{V}_* 的方向相反, 大小正比于 \vec{V}_* 及硬币的迎风面积:

$$\vec{F}_* = -\alpha \vec{V}_* \pi a^2 |\cos\phi| \quad (A.1)$$

其中 α 为有量纲阻力系数, 旋转角速度 $\vec{\omega}_*$ 对阻力的净贡献为零. 与此相反, 平动速度 \vec{V}_* 对阻力矩无贡献, 只有旋转角速度 $\vec{\omega}_*$ 对阻力矩有贡献:

$$M_* = -\alpha \int_{-a}^a x' \cdot \omega_* x' \cdot 2\sqrt{a^2 - x'^2} dx' = -\frac{\pi}{4} \alpha \omega_* a^4 \quad (A.2)$$

于是, 未碰期间的有量纲动力学方程组为:

$$\begin{cases} \frac{dy_*}{dt_*} = V_* & (A.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \frac{dV_*}{dt_*} = -\alpha \pi a^2 |\cos\phi| V_* - mg & (A.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi_*}{dt_*} = \omega_* & (A.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} J \frac{d\omega_*}{dt_*} = -\frac{\pi}{4} \alpha \omega_* a^4 & (A.6) \end{cases}$$

其中

$$J = \frac{1}{4} m a^2 \quad (\text{A.7})$$

为硬币绕自身直径旋转的转动惯量,如按正文(2.1)式引进无量纲量,便立即得出无量纲方程组(2.3)~(2.6).

如设第 n 次碰撞中桌面给硬币的冲量为 P_{n*} ,则冲量矩为

$$M_{n*} = S_n a |\cos\phi_n| P_{n*} \quad (\text{A.8})$$

其中 S_n 由(2.22)式定义,于是,由动量定理和角动量定理得出

$$mV'_{n*} - mV_{n*} = P_{n*}, \quad (\text{A.9})$$

$$J\omega'_{n*} - J\omega_{n*} = M_{n*} = S_n a |\cos\phi_n| P_{n*} \quad (\text{A.10})$$

如按照(2.19)式引进无量纲量,则(A.9),(A.10)的无量纲形式即为(2.20),(2.21)式.

由(2.20),(2.21)式,易将碰撞后的动能 T'_n 用 P_n 表出:

$$\begin{aligned} T'_n &= \frac{1}{2} V_n'^2 + \frac{1}{8} \omega_n'^2 \\ &= \frac{1}{2} (V_n + P_n)^2 + \frac{1}{8} (\omega_n + 4S_n |\cos\phi_n| P_n)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

然而碰撞前动能为

$$T_n = \frac{1}{2} V_n^2 + \frac{1}{8} \omega_n^2 \quad (\text{A.12})$$

因此

$$T'_n - T_n = \left(\frac{1}{2} + S_n^2 \cos^2\phi_n \right) P_n^2 + (V_n + \omega_n S_n |\cos\phi_n|) P_n \quad (\text{A.13})$$

由

$$T'_n - T_n \leq 0 \quad (\text{A.14})$$

和

$$P_n > 0 \quad (\text{A.15})$$

立即得到

$$P_n \leq -2(V_n + \omega_n S_n |\cos\phi_n|) \cdot [1 + 4S_n^2 \cos^2\phi_n]^{-1} \quad (\text{A.16})$$

即(2.30)式.

参 考 文 献

- [1] Lin, C. C. and L. A. Segel, *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, Macmillan Publishing Co., Inc. (1974).
- [2] Lorenz, E. N., *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20 (1963), 130-141.
- [3] Swinney, H. L. and J. P. Gollub, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer-Verlag (1981).

**On the Sensitive Dynamical System and the Transition
from the Apparently Deterministic Process
to the Completely Random Process**

Yue Zeng-yuan Zhang Bin

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing)

Abstract

The detailed analysis of the dynamical process of coin tossing is made. Through calculations, it is illustrated how and why the result is extremely sensitive to the initial conditions. It is also shown that, as the initial height of the mass center of the coin increases, the final configuration, i. e. "head" or "tail", becomes more and more sensitive to the initial parameters (the initial velocity angular velocity, and the initial orientation), the coefficient of the air drag, and the energy absorption factor of the surface on which the coin bounces. If we keep the "head" upward initially but allow a small range for the change of some other initial parameters, the frequency that the final configuration is "head" would be 1 if the initial height h of the mass center is sufficiently small, and would be close to $1/2$ if h is sufficiently large. An interesting question is how this frequency changes continuously from 1 to $1/2$ as h increases. Detailed calculations show that such a "transition" is very similar to the transition from laminar to turbulent flows. A basic difference between the "transition stage" and the "completely random stage" is indicated. In the "completely random stage", the deterministic process of the individual case is extremely sensitive to the initial conditions and the dynamical parameters, but the statistical properties of the ensemble are insensitive to the small changes of the initial conditions and the dynamical parameters. On the contrary, in the "transition stage", both the deterministic process of the individual case and the statistical properties of the ensemble are sensitive to the initial conditions and the dynamical parameters. The mechanism for this feature of the "transition stage" is the existence of the "long-train structure" in the parameter space. The implications of this analysis on some other random phenomena are discussed.