

单自由度及多自由度系统 非平稳随机振动*

孟庆生

(南开大学数学系, 1981年4月15日收到)

摘 要

在文[1]中, 对如下所示的非平稳随机过程

$$\xi(t) = \int_{R_1} f(t, \omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega), \quad j = \sqrt{-1}$$

我们定义了谱密度

$$S_\xi(t, \omega) = |f(t, \omega)|^2 S(\omega)$$

其中, $Z(A)$ 是个正交随机测度, $S(\omega)$ 是平稳随机过程 $\xi_0(t)$ 的谱密度,

$$\xi_0(t) = \int_{R_1} \exp[j\omega t] Z(d\omega)$$

$f(t, \omega)$ 是个二元实变量复数值函数, 称之为调制函数, 并满足

$$\int_{R_1} |f(t, \omega)|^2 S(\omega) d\omega < \infty$$

在文[1]中, 我们得到的主要结果是, 对于用如下线性方程所描述的线性动力系统

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) y = \xi(t)$$

在一定条件下我们得到

$$y(t) = \int_{R_1} K(t, \omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega)$$

$$E y(t) \overline{y(s)} = \int_{R_1} K(t, \omega) \overline{K(s, \omega)} \exp[j\omega(t-s)] S(\omega) d\omega$$

$$E |y(t)|^2 = \int_{R_1} |K(t, \omega)|^2 S(\omega) d\omega$$

$$S_y(t, \omega) = |K(t, \omega)|^2 S(\omega)$$

其中

$$K(t, \omega) = \int_{-\infty}^t W(t, \tau) f(\tau, \omega) \exp[-j\omega(t-\tau)] d\tau$$

这里 $W(t, \tau)$ 是系统的单位脉冲响应函数.

本文是[1]的继续, 我们对单自由度及多自由度系统给出若干结果.

* 钱伟长推荐.

一、单自由度系统之非平稳随机振动

考虑如图 1 所示单自由度系统。

运动方程为：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (1.1)$$

或写为：

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{\omega_0^2}{k}P(t) \quad (1.2)$$

式中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为系统的固有频率，

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \text{ 为无因次阻尼系数。}$$

设 $0 < \xi < 1$ ，此时系统是稳定的。系统的单位脉冲响应函数 $W(t, \tau) = W(t - \tau)$ 满足方程：（任固定 τ ，作为 $t > \tau$ 的函数。）

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W(t-\tau)}{\partial t^2} + 2\xi\omega_0 \frac{\partial W(t-\tau)}{\partial t} + \omega_0^2 W(t-\tau) &= 0 \\ W(t-\tau) \Big|_{t=\tau} &= 0, \quad \frac{\partial W(t-\tau)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = \frac{1}{m} = \frac{\omega_0^2}{k} \\ W(t-\tau) &= 0, \text{ 当 } t < \tau \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

由此求得：

$$W(t-\tau) = \begin{cases} \frac{\omega_0^2}{k} \cdot \frac{1}{\omega_1} \exp[-\xi\omega_0(t-\tau)] \sin \omega_1(t-\tau) & (t > \tau) \\ 0 & (t \leq \tau) \end{cases} \quad (1.4)$$

这里 $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ 为阻尼自然频率。

$$\frac{\partial W(t-\tau)}{\partial t} \begin{cases} \frac{\omega_0^2}{k\omega_1} \exp[-\xi\omega_0(t-\tau)] \cdot [\omega_1 \cos \omega_1(t-\tau) - \xi\omega_0 \sin \omega_1(t-\tau)] & (t > \tau) \\ 0 & (t \leq \tau) \end{cases} \quad (1.5)$$

先考虑系统从 $t = 0$ 开始受限带白噪声激励的情况。此时，外力函数 $P(t)$ 可表为谱展式：

$$P(t) = u(t)\xi_0(t) = \int_{R_1} u(t)\exp[j\omega t]Z(d\omega) \quad (1.6)$$

这里 $u(t)$ 为单位阶跃函数：

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.7)$$

$\xi_0(t)$ 为 $P(t)$ 的平稳基，具谱密度 $S(\omega)$ 为：

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0 \text{ (正常数),} & |\omega| \leq \omega_n \\ 0, & \text{别处} \end{cases} \quad (1.8)$$

这时，激励的调制函数 $f(t, \omega) = u(t)$ 与 ω 无关，且 $|f(t, \omega)| \leq 1$ 。

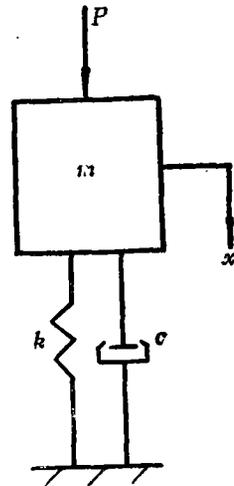


图 1

显然, [1]中定理3的一切条件满足. 为求响应 $x(t)$, $\dot{x}(t)$ 的均方值与谱密度, 我们先求相应的调制函数 $K(t, \omega)$ 与 $G(t, \omega)$: 将(1.4), (1.5)式分别代入[1]中的(18)式及(24)式, 考虑到 $f(t, \omega) = u(t)$, 便有

$$\begin{aligned} K(t, \omega) &= \int_{-\infty}^t W(t-\tau)u(\tau)\exp[-j\omega(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_0^t W(t-\tau)\exp[-j\omega(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\omega_0^2}{k\omega_1} \exp[-\xi\omega_0\tau] \cdot \sin \omega_1\tau \exp[-j\omega\tau]d\tau \\ &= \frac{\omega_0^2}{k\omega_1} I_2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} G(t, \omega) &= \int_{-\infty}^t \frac{\partial W(t-\tau)}{\partial t} u(\tau)\exp[-j\omega(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\partial W(t-\tau)}{\partial t} \exp[-j\omega(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\omega_0^2}{k\omega_1} \exp[-\xi\omega_0\tau] \cdot (\omega_1 \cos \omega_1\tau - \xi\omega_0 \sin \omega_1\tau) \exp[-j\omega\tau]d\tau \\ &= \frac{\omega_0^2}{k\omega_1} (\omega_1 I_1 - \xi\omega_0 I_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^t \exp[-\xi\omega_0\tau] \cdot \cos \omega_1\tau \cdot \exp[-j\omega\tau]d\tau \\ I_2 &= \int_0^t \exp[-\xi\omega_0\tau] \cdot \sin \omega_1\tau \cdot \exp[-j\omega\tau]d\tau \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

用分部积分法求得:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\omega_1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_0\omega j} \left[\frac{\xi\omega_0 + j\omega}{\omega_1} + \exp[-(\xi\omega_0 + j\omega)t] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\sin \omega_1 t - \frac{\xi\omega_0 + j\omega}{\omega_1} \cos \omega_1 t \right) \right] \\ I_2 &= \frac{\omega_1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_0\omega j} \left[1 - \exp[-(\xi\omega_0 + j\omega)t] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\cos \omega_1 t + \frac{\xi\omega_0 + j\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

将此式代入(1.9)及(1.10)式, 得到

$$K(t, \omega) = H(\omega) \cdot \left\{ 1 - \exp[-(\xi\omega_0 + j\omega)t] \cdot \left[\cos \omega_1 t + \frac{\xi\omega_0 + j\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \right\} \quad (1.13)$$

$$G(t, \omega) = H(\omega) \cdot \left\{ j\omega + \exp[-(\xi\omega_0 + j\omega)t] \cdot \left[\frac{\omega_0^2 + \xi\omega_0\omega j}{\omega_1} \sin \omega_1 t - j\omega \cdot \cos \omega_1 t \right] \right\} \quad (1.14)$$

这里

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2}{k} \cdot \frac{1}{[\omega_0^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_0\omega j]} = \frac{1}{k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\xi \frac{\omega}{\omega_0} j \right]} \quad (1.15)$$

为系统的复频响应函数。

由 [1] 中(21) 及 (27) 式, 以及上述 (1.8)、(1.13) 和 (1.14) 式, 便得位移响应 $x(t)$ 及速度响应 $\dot{x}(t)$ 的功率谱密度分别为:

$$S_x(t, \omega) = \begin{cases} |K(t, \omega)|^2 \cdot S_0, & |\omega| \leq \omega_n, t \geq 0 \\ 0, & \text{别处} \end{cases} \quad (1.16)$$

$$S_{\dot{x}}(t, \omega) = \begin{cases} |G(t, \omega)|^2 \cdot S_0, & |\omega| \leq \omega_n, t \geq 0 \\ 0, & \text{别处} \end{cases} \quad (1.17)$$

其中

$$\begin{aligned} |K(t, \omega)|^2 = & |H(\omega)|^2 \cdot \left\{ 1 + \exp[-2\xi\omega_0 t] \cdot \left[1 + 2\xi \frac{\omega_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 t \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\xi^2 \omega_0^2 + \omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} \sin^2 \omega_1 t \right] - 2 \exp[-\xi\omega_0 t] \cdot \left[\cos \omega_1 t \cdot \cos \omega t \right. \right. \\ & \left. \left. + \xi \frac{\omega_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega t + \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \cdot \sin \omega t \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} |G(t, \omega)|^2 = & |H(\omega)|^2 \cdot \left\{ \omega^2 + \exp[-2\xi\omega_0 t] \cdot \left[\frac{\omega_0^2 + \xi^2 \omega^2}{1 - \xi^2} \sin^2 \omega_1 t + \omega^2 \cos^2 \omega_1 t \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\xi\omega^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 t \right] - 2 \exp[-\xi\omega_0 t] \cdot \left[\frac{\omega_0 \omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_1 t \cdot \sin \omega t \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\xi\omega^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega t + \omega^2 \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega t \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{k^2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right\}} \quad (1.20)$$

由此及 [1] 中(20) 及 (26) 式, 可得 $x(t)$ 及 $\dot{x}(t)$ 的均方值分别为: ($t \geq 0$)

$$E|x(t)|^2 = \int_{R_1} |K(t, \omega)|^2 S(\omega) d\omega = \int_{-\omega_n}^{\omega_n} |K(t, \omega)|^2 \cdot S_0 d\omega \quad (1.21)$$

$$E|\dot{x}(t)|^2 = \int_{R_1} |G(t, \omega)|^2 S(\omega) d\omega = \int_{-\omega_n}^{\omega_n} |G(t, \omega)|^2 \cdot S_0 d\omega \quad (1.22)$$

将(1.18) 及 (1.19) 分别代入(1.21) 及 (1.22) 式中, 便可求得 $E|x(t)|^2$ 及 $E|\dot{x}(t)|^2$, 但我们现在考虑 $\omega_n \rightarrow \infty$ 时的极限情况, 令

$$\bar{x}^2(t) = \lim_{\omega_n \rightarrow \infty} E|x(t)|^2, \quad \bar{\dot{x}}^2(t) = \lim_{\omega_n \rightarrow \infty} E|\dot{x}(t)|^2$$

则

$$\bar{x}^2(t) = \int_{R_1} |K(t, \omega)|^2 \cdot S_0 d\omega = S_0 \int_{R_1} |K(t, \omega)|^2 d\omega \quad (1.23)$$

$$\bar{\dot{x}}^2(t) = \int_{R_1} |G(t, \omega)|^2 \cdot S_0 d\omega = S_0 \int_{R_1} |G(t, \omega)|^2 d\omega \quad (1.24)$$

由此及(1.9)、(1.10), 用 Parseval 公式, 得

$$\begin{aligned}\bar{x}^2(t) &= S_0 \int_{R_1} |K(t, \omega)|^2 d\omega = 2\pi S_0 \int_{-\infty}^{\infty} W^2(t-\tau) u^2(\tau) d\tau \\ &= 2\pi S_0 \int_0^t W^2(t-\tau) d\tau = 2\pi S_0 \int_0^t W^2(\tau) d\tau \\ &= 2\pi S_0 \frac{\omega_0^2}{k^2(1-\xi^2)} \int_0^t \exp[-2\xi\omega_0\tau] \cdot \sin^2\omega_1\tau d\tau\end{aligned}\quad (1.25)$$

由此式便得: ($t \geq 0$)

$$\begin{aligned}\bar{x}^2(t) &= \frac{\pi S_0 \omega_0}{2k^2} \left\{ \frac{1}{\xi} - \frac{\exp[-2\xi\omega_0 t]}{1-\xi^2} \left[\frac{1}{\xi} + \sqrt{1-\xi^2} \cdot \sin 2\omega_1 t - \xi \cos 2\omega_1 t \right] \right\} \\ &= \frac{\pi S_0}{kc} \left\{ 1 - \frac{\exp[-2\xi\omega_0 t]}{1-\xi^2} \left[1 + \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot \sin 2\omega_1 t - \xi^2 \cos 2\omega_1 t \right] \right\} \\ &= \frac{\pi S_0}{kc} \left\{ 1 - \frac{\exp[-2\xi\omega_0 t]}{1-\xi^2} \left[1 + \xi \sin(2\omega_1 t - \varphi) \right] \right\}\end{aligned}\quad (1.26)$$

式中 $\sin \varphi = \xi$, $\cos \varphi = \sqrt{1-\xi^2}$; k 与 c 分别为系统的弹性系数及阻尼系数;

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}; \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0}; \quad S_0 \text{ 为激励的常数谱密度.}$$

同样由

$$\begin{aligned}\bar{\dot{x}}^2(t) &= S_0 \int_{R_1} |G(t, \omega)|^2 d\omega = 2\pi S_0 \int_0^t \left[\frac{\partial W(t-\tau)}{\partial t} \right]^2 d\tau \\ &= 2\pi S_0 \frac{\omega_0^4}{k^2(1-\xi^2)} \int_0^t [\exp[-\xi\omega_0\tau] \cos(\omega_1\tau + \varphi)]^2 d\tau\end{aligned}\quad (1.27)$$

得到: ($t \geq 0$)

$$\begin{aligned}\bar{\dot{x}}^2(t) &= \frac{\pi S_0}{cm} \left\{ 1 - \frac{\exp[-2\xi\omega_0 t]}{1-\xi^2} \left[1 - \xi \sqrt{1-\xi^2} \sin 2\omega_1 t - \xi^2 \cos 2\omega_1 t \right] \right\} \\ &= \frac{\pi S_0}{cm} \left\{ 1 - \frac{\exp[-2\xi\omega_0 t]}{1-\xi^2} \left[1 - \xi \sin(2\omega_1 t + \varphi) \right] \right\}\end{aligned}\quad (1.28)$$

在(1.26)及(1.28)中, 令 $t \rightarrow \infty$, 得:

$$\bar{x}^2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}^2(t) = \frac{\pi S_0}{kc}\quad (1.29)$$

$$\bar{\dot{x}}^2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\dot{x}}^2(t) = \frac{\pi S_0}{mc}\quad (1.30)$$

(1.29)及(1.30)式便是在白噪声激励下, 系统的稳态均方位移及速度响应^[2], 相对地, (1.26)及(1.28)式可视为在白噪声激励下, 系统起动过渡时的非平稳响应。这些结果也可用其它方法得到^[3]。

如果说[1]中的方法在解决上述平稳激励下系统起动过渡时的非平稳随机振动方面有着适用之处, 那么在解决本质非平稳激励的问题中就更显出独到之处了。

现设系统(1.1)的激励力 $P(t)$ 可表为

$$P(t) = \int_{R_1} f(t, \omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega) \quad (1.31)$$

其中调制函数 $f(t, \omega)$ 为

$$f(t, \omega) = \exp[-\alpha\omega t] u(t) u(\omega) \quad (1.32)$$

这里, $\alpha \geq 0$; $u(t)$, $u(\omega)$ 为单位阶跃函数; 由正交随机测度 $Z(\cdot)$ 决定的 $P(t)$ 的平稳基仍设为限带白噪声, 其谱密度 $S(\omega)$ 如 (1.8) 所示. 显然 [1] 中定理 3 的条件满足, 其实

$$|f(t, \omega)| = |\exp[-\alpha\omega t] u(t) u(\omega)| \leq 1$$

位移响应 $x(t)$ 的调制函数 $K(t, \omega)$ 为:

$$\begin{aligned} K(t, \omega) &= \int_{-\infty}^t W(t-\tau) f(\tau, \omega) \exp[-j\omega(t-\tau)] d\tau = \int_0^t W(t-\tau) \exp[-\alpha\omega\tau] \\ &\quad \cdot \exp[-j\omega(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_0^t W(\tau) \exp[-\alpha\omega(t-\tau)] \cdot \exp[-j\omega\tau] d\tau \quad (\omega \geq 0) \end{aligned} \quad (1.33)$$

由此可得:

$$K(t, \omega) = H_a(\omega) \cdot \left\{ \exp[-\alpha\omega t] - \exp[-(\zeta\omega_0 + j\omega)t] \cdot \left[\cos \omega_1 t + \frac{\zeta\omega_0 - \alpha\omega + j\omega}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 t \right] \right\} \quad (\omega \geq 0) \quad (1.34)$$

式中

$$H_a(\omega) = \frac{\omega_0^2}{k(\omega_1^2 + a^2)}, \quad a = \zeta\omega_0 - \alpha\omega + j\omega$$

由 (1.34) 便可利用 [1] 中结果进一步求得响应 $x(t)$ 的均方值 $E x^2(t)$ 及谱密度 $S_x(t, \omega)$ 等; 同样可得 $\dot{x}(t)$ 的相应结果, 此不赘述了.

二、二自由度系统之非平稳随机振动

考虑如图 2 所示的二自由度系统, 一个质量为 m , 中心迴转半径为 ρ 的刚体支承于弹簧阻尼器的两点上.

$y_0(t)$ 为重心垂直位移;

$y_1(t)$, $y_2(t)$ 为支点垂直位移;

$\varphi(t)$ 为刚体绕重心转角;

$P(t)$ 为作用于重心的力.

运动方程为: (小摆角)

$$\begin{cases} m\ddot{y}_0 + c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2 + k_1y_1 + k_2y_2 = P(t) & (2.1) \\ m\rho^2\ddot{\varphi} + c_2b\dot{y}_2 + k_2by_2 - c_1a\dot{y}_1 - k_1ay_1 = 0 & (2.2) \end{cases}$$

$$\text{由 } \varphi = \frac{y_2 - y_1}{l}, \quad y_0 = \frac{ay_2 + by_1}{l} \quad (2.3)$$

可将方程 (2.1), (2.2) 化为:

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + m_3\ddot{y}_2 = \frac{b}{l}P(t) & (2.4) \\ m_2\ddot{y}_2 + c_2\dot{y}_2 + k_2y_2 + m_3\ddot{y}_1 = \frac{a}{l}P(t) & (2.5) \end{cases}$$

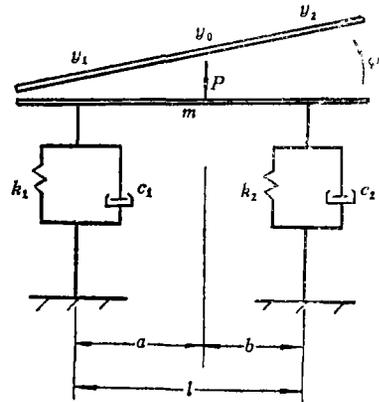


图 2

其中

$$m_1 = \frac{b^2 + \rho^2}{I^2} m, \quad m_2 = \frac{a^2 + \rho^2}{I^2} m, \quad m_3 = \frac{ab - \rho^2}{I^2} m \quad (2.6)$$

系统的单位脉冲响应函数 $W_k(t-\tau)$ (对应 y_k , $k=1, 2$) 乃下述方程之解: ($t > \tau$)

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{W}_1 + c_1 \dot{W}_1 + k_1 W_1 + m_3 \ddot{W}_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{W}_2 + c_2 \dot{W}_2 + k_2 W_2 + m_3 \dot{W}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 \dot{W}_1(0) + m_3 \dot{W}_2(0) &= \frac{b}{I} \\ m_2 \dot{W}_2(0) + m_3 \dot{W}_1(0) &= \frac{a}{I} \\ W_1(0) &= 0 = W_2(0) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

($W_1(t-\tau) = W_2(t-\tau) = 0$, 当 $t < \tau$)

为解上述方程, 令 $W_1 = A_1 \exp[\lambda(t-\tau)]$, $W_2 = A_2 \exp[\lambda(t-\tau)]$, 代入之, 得

$$A_1[m_1 \lambda^2 + c_1 \lambda + k_1] + A_2[m_3 \lambda^2] = 0, \quad A_1[m_3 \lambda^2] + A_2[m_2 \lambda^2 + c_2 \lambda + k_2] = 0 \quad (2.9)$$

A_1 与 A_2 不全为零的充要条件是

$$\begin{vmatrix} m_1 \lambda^2 + c_1 \lambda + k_1, & m_3 \lambda^2 \\ m_3 \lambda^2, & m_2 \lambda^2 + c_2 \lambda + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\begin{aligned} (m_1 m_2 - m_3^2) \lambda^4 + (c_1 m_2 + c_2 m_1) \lambda^3 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + c_1 c_2) \lambda^2 \\ + (c_1 k_2 + c_2 k_1) \lambda + k_1 k_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

此为系统之特征方程。由

$$m_1 m_2 - m_3^2 = \frac{m^2 \rho^2}{I^2} > 0$$

及 Hurwitz 条件 (见 [1](3°)) 知, 系统稳定的充要条件是

$$\begin{vmatrix} c_1 m_2 + c_2 m_1 & \frac{m \rho^2}{I^2} & 0 \\ c_1 k_2 + c_2 k_1 & m_1 k_2 + m_2 k_1 + c_1 c_2 & c_1 m_2 + c_2 m_1 \\ 0 & k_1 k_2 & c_1 k_2 + c_2 k_1 \end{vmatrix} > 0 \quad (2.11)$$

当诸参数给定时, 可由 (2.10) 解出四个特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 于是可写 (当 $t > \tau$; 假定无重根即 $\lambda_i \neq \lambda_j$; $i \neq j$; $i, j=1, 2, 3, 4$):

$$W_1(t-\tau) = \sum_{i=1}^4 A_{1i} \exp[\lambda_i(t-\tau)], \quad W_2(t-\tau) = \sum_{i=1}^4 A_{2i} \exp[\lambda_i(t-\tau)] \quad (2.12)$$

式中 A_{ij} 为常数, 由方程 (2.8) 中条件确定, 考虑到 (2.9), 应

$$\frac{A_{1i}}{A_{2i}} = \frac{m_2 \lambda_i^2 + c_2 \lambda_i + k_2}{-m_3 \lambda_i^2} = \frac{-m_3 \lambda_i^2}{m_1 \lambda_i^2 + c_1 \lambda_i + k_1} \quad (2.13)$$

所以 (2.12) 中八个 A_{ij} ($i=1, 2$; $j=1, 2, 3, 4$) 中只有四个是独立的, 它们正好由 (2.8) 中四个条件确定之!

设外力函数 $P(t)$ 为具有下列谱展式的非平稳过程:

$$P(t) = \int_{R_1} f(t, \omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega) \quad (2.14)$$

则在 [1] 中定理 3 的条件满足时 (比如, 系统稳定, $f(t, \omega)$ 有界) 可写

$$y_i(t) = \int_{R_1} K_i(t, \omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega) \quad (i=1, 2) \quad (2.15)$$

式中

$$K_i(t, \omega) = \int_{-\infty}^t W_i(t-\tau) f(\tau, \omega) \exp[-j\omega(t-\tau)] d\tau \quad (i=1, 2) \quad (2.16)$$

其中 W_i 之求法已如上述。

知道了 y_1 及 y_2 的谱展式 (2.15) 及调制函数 (2.16) 式, 便不难求得它们的均方值 ($E|y_1|^2$, $E|y_2|^2$) 及谱密度 ($S_{y_1}(t, \omega)$, $S_{y_2}(t, \omega)$) 等; 同样可得 \dot{y}_1 , \dot{y}_2 , φ , y_0 , $\dot{\varphi}$, \dot{y}_0 的相应结果。

特别地, 当 $m_3 = 0$, 即 $ab = \rho^2$ 时, 二自由度系统变为非耦合的^[4], 此时运动方程 (2.4)、(2.5) 化为关于 y_1 及 y_2 的两个独立方程, 互不牵连, 这就实际归结为单自由度系统之问题了。

三、弹性系统之非平稳随机振动

考虑图 3 所示, 弹性梁上具有移动随机力的情形。

运动方程为:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + c \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(t) \delta(x_p - x) \quad (3.1)$$

式中 $P(t)$ 为外力强度, δ 为 Dirac 函数, $x_p = x_p(t)$ 为外力作用点到原点 O 的距离; $y = y(x, t)$ 为梁的挠度; EJ 为梁的刚度, E 为杨氏 (纵) 弹性模量, J 为梁的截面惯矩; $\gamma F/g$ 为梁的线质量 (单位长度质量), γ 为比重, F 为梁的横截面积, g 为重力加速度; c 为阻尼系数。

方程 (3.1) 之解可写为:

$$y(x, t) = \sum_n q_n(t) X_n(x) \quad (3.2)$$

这里 $X_n(x)$ 为振型函数, 我们取为法正交的,

$$\int_l X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{当 } m=n \\ 0, & \text{当 } m \neq n \end{cases} \quad (3.3)$$

X_n 满足:

$$X_n^{IV} = k_n X_n \quad \left(X_n^{IV} = \frac{d^4 X_n}{dx^4} \right) \quad (3.4)$$

k_n 是特征根, 与固有频率 ω_n 之间有关系:

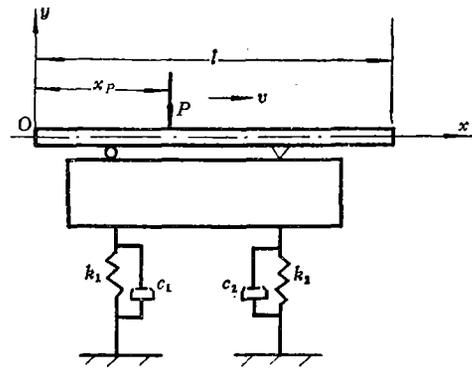


图3 均匀梁上作用有移动随机力

$$k_n^* = \frac{\gamma F}{g} \cdot \frac{1}{EJ} \omega_n^2 \quad (3.5)$$

振型函数 $\{X_n\}$ 及固有频率 $\{\omega_n\}$ 表征系统的固有特性，在一定模型下可从理论上计算之，实际上常用激振法获取。

将 (3.2) 代入 (3.1)，考虑到 (3.3)、(3.4)、(3.5)，可得：

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = b_n(t) P(t) \quad (3.6)$$

式中，

$$2\xi_n = \frac{c}{m\omega_n}, \quad \bar{m} = \frac{\gamma F}{g},$$

$$b_n(t) = -\frac{1}{\bar{m}} X_n(x_P(t)) \quad (3.7)$$

$$X_n(x_P(t)) = \int_I \delta(x_P(t) - x) X_n(x) dx \quad (3.8)$$

方程 (3.6) 代表一个“分频系统”，其单位脉冲响应函数 $W_n(t, \tau)$ 满足下列方程：

$$\left(\ddot{W} \triangleq \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) \begin{cases} \ddot{W}_n(t, \tau) + 2\xi_n \omega_n \dot{W}_n(t, \tau) + \omega_n^2 W_n(t, \tau) = 0 & (t > \tau) \\ W_n(t, \tau) \Big|_{t=\tau} = 0, \quad \dot{W}_n(t, \tau) \Big|_{t=\tau} = b_n(\tau) \\ W_n(t, \tau) = 0 & (t < \tau) \end{cases} \quad (3.9)$$

由此可得：

$$W_n(t, \tau) = \begin{cases} \frac{b_n(\tau)}{\bar{\omega}_n} \exp[-\xi_n \omega_n (t - \tau)] \cdot \sin \bar{\omega}_n (t - \tau) & (t > \tau) \\ 0 & (t < \tau) \end{cases} \quad (3.10)$$

这里 $\bar{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$ ($0 < \xi_n < 1$)

$$\dot{W}_n(t, \tau) = \begin{cases} \frac{b_n(\tau)}{\bar{\omega}_n} \exp[-\xi_n \omega_n (t - \tau)] \cdot [\bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n (t - \tau) - \xi_n \omega_n \sin \bar{\omega}_n (t - \tau)] & (t > \tau) \\ 0 & (t < \tau) \end{cases} \quad (3.11)$$

现设外力强度 $P(t)$ 的谱展式为：

$$P(t) = \int_{R_1} f(t, \omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega) \quad (3.12)$$

当 $f(t, \omega)$ 为有界调制时，可写：

$$q_n(t) = \int_{R_1} K_n(t, \omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega) \quad (3.13)$$

这里

$$K_n(t, \omega) = \int_{-\infty}^t W_n(t, \tau) f(\tau, \omega) \exp[-j\omega(t - \tau)] d\tau \quad (3.14)$$

于是得 $y(x, t)$ 的谱展式：

$$y(x, t) = \int_{R_1} K(x; t, \omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega) \quad (3.15)$$

$$\text{其中} \quad K(x; t, \omega) = \sum_n X_n(x) K_n(t, \omega) \quad (3.16)$$

为 $y(x, t)$ 的调制函数。

由 (3.15) 可得位移响应 $y(x, t)$ 的均方值为：

$$E|y(x,t)|^2 = \int_{R_1} |K(x,t,\omega)|^2 S(\omega) d\omega \quad (3.17)$$

非平稳谱密度为:

$$S_y(x,t,\omega) = |K(x,t,\omega)|^2 S(\omega) \quad (3.18)$$

这里 $S(\omega)$ 为激励 $P(t)$ 之平稳基的谱密度.

类似可得 $\dot{y}(x,t)$ 的相应结果.

参 考 文 献

- [1] 孟庆生, 关于线性动力系统非平稳随机振动问题, 应用力学, 1 (1980).
 [2] Crandall, S. H. and W. D. Mark, *Random Vibration in Mechanical Systems*, Academic Press (1963).
 [3] 星谷胜, 《随机振动分析》, 常宝琦译, 地震出版社 (1977).
 [4] 吉米列夫, Г. Б., 《汽车理论》, 吉林工业大学汽车教研室译, 人民交通出版社 (1964).

Nonstationary Random Vibration of One-Degree and Multidegree of Freedom Systems

Meng Qing-sheng

(Nankai University, Tianjin)

Abstract

In the paper [1] for nonstationary random processes such as

$$\xi(t) = \int_{R_1} f(t,\omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega), \quad j = \sqrt{-1}$$

We defined the spectral density

$$S_\xi(t,\omega) = |f(t,\omega)|^2 S(\omega)$$

Where $Z(A)$ is an orthogonal random measure, $S(\omega)$ is the spectral density of the stationary random process

$$\xi_0(t) = \int_{R_1} \exp[j\omega t] Z(d\omega)$$

$f(t,\omega)$ is a complex function with two real variables, it is called modulation function and satisfied by

$$\int_{R_1} |f(t,\omega)|^2 S(\omega) d\omega < \infty$$

In the paper [1] we obtained the main results, for the linear dynamic systems which is described by such equations

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) y = \xi(t)$$

we obtained under certain conditions that

$$y(t) = \int_{R_1} K(t,\omega) \exp[j\omega t] Z(d\omega), \quad E y(t) \overline{y(s)} = \int_{R_1} K(t,\omega) \overline{K(s,\omega)} \exp[j\omega(t-s)] S(\omega) d\omega$$

$$E|y(t)|^2 = \int_{R_1} |K(t,\omega)|^2 S(\omega) d\omega, \quad S_y(t,\omega) = |K(t,\omega)|^2 S(\omega)$$

where

$$K(t,\omega) = \int_{-\infty}^t W(t,\tau) f(\tau,\omega) \exp[-j\omega(t-\tau)] d\tau$$

here $W(t,\tau)$ is the response function of the systems to the unit pulse.

This paper is continued on paper [1]. We obtain some results for the one-degree and multidegree of freedom systems.