

# 重力场中二维空腔流动的有限元分析\*

林炳尧

许协庆

(水利水电科学研究院)

(水利水电科学研究院, 清华大学)

(1982年8月9日收到, 钱伟长推荐)

## 摘 要

本文利用可变域泛函一阶变分表达式讨论了现有的几种自由面重力流 $\psi$ 模式变分原理。证明了几种变分原理所以有差别是因为在自由表面采用的贯截条件不同, 据此将 $\psi$ 模式变分原理概括成四种类型。

分析重力场中二维空腔流动时, 根据有限元特点在空腔尾部置放一虚拟平板。计算中, 每给出一个空腔长度, 均可得到一收敛的自由表面, 选取在脱流点流线光滑的曲线作为解答, 从而得到空腔流动的一组可能解。此算法适用于单宽流量及总能头给定时通气空腔流动计算。最后, 给出不同 $Fr$ 数、空腔压力及坝面坡度等各种情况下的空腔长度曲线。

## 一、引 言

高速水流绕流物体, 往往产生空腔现象, 使物体表面剥蚀, 机械的效率下降, 因此, 空腔流动研究日益受到重视。空腔流动分析包括明渠水流表面及空腔表面二条自由表面的确定、空腔尾部流动的模拟两个主要问题。

自由面重力流问题的特点是需确定自由表面, 其必须是流线, 且满足非线性压力条件。一些作者在采用有限元方法求解这问题时, 建立同时满足这二个条件的计算格式。这些工作大多从可变域变分原理出发。Luke研究了自由面重力流 $\phi$ 模式变分原理。Ikegawa及Washizu<sup>[2]</sup>、许协庆<sup>[3][4]</sup>、Varoğlu及Finn<sup>[5]</sup>、Betts<sup>[6]</sup>等研究了 $\psi$ 模式的自由面重力流变分原理。但是各作者得到的 $\psi$ 模式变分原理形式各不相同(表1), 因此引起一些讨论。例如Betts<sup>[6]</sup>认为Ikegawa及Washizu在推导变分原理过程中, 遗漏了沿自由表面的线积分项。本文利用可变域泛函一阶变分表达式, 分析了各个 $\psi$ 模式变分原理, 证明了几种变分原理所以有差别, 是各自采用了不同的自由表面贯截条件。由于贯截条件不同, 存在四种可能的 $\psi$ 模式变分原理。不同类型的变分原理存在与之相应的计算格式。

空腔流动存在强烈的振荡, 且在尾部大量掺气。各种定常有限空腔流动模型难免存在物理上的缺陷, 由于反映了实际流动部分特性, 计算绕流物体水动力时, 都有较好的结果<sup>[1]</sup>。

\* 此工作是第一作者在第一作者指导下完成的。部分为清华大学研究生论文内容, 部分是在水利水电科学研究院的工作成果。

本文根据有限元法特点, 在空腔尾部置放一平板, 构成“挑坎-空腔-尾端平板”系统, 得到空腔尾部一个可能的流动. 与 Riabouchisky 映象模型不同, 尾端平板位置、角度及长短均不给定. 尾端平板长短与断面间距有关, 可以缩小断面间距, 使空腔表面在尽可能长的范围内满足压力条件.

表 1 自由面重力流  $\psi$  模式变分原理各种形式\*

作 者	泛 函 或 变 分 表 达 式
Ikegawa, Washiza <sup>[2]</sup>	$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{d\psi}{d\vec{r}} \right)^2 d\Omega + \frac{1}{2} g \int_0^{x_T} (z-E)^2 dx$
许协庆 <sup>[3][4]</sup>	$J = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{d\vec{r}} \right)^2 + g(y-E) \right] d\Omega$
Varoğlu, Finn <sup>[5]</sup>	$\delta J = \delta \int_{\Omega} \left( \frac{d\psi}{d\vec{r}} \right)^2 d\Omega - 2 \int_{\Gamma_s} \sqrt{2gz} \delta\psi ds - 2g \int_{\Gamma_s} z \vec{n} \cdot \delta \vec{r} ds$
Betts <sup>[6]</sup>	$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{d\psi}{d\vec{r}} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{2} g \int_0^{x_T} (z-E)^2 dx$

\*  $\vec{r}=(x, y)$ ;  $z$  为自由表面高程;  $E$  为总能头;  $\Omega$  为依赖于自由表面的可变区域;  $\Gamma_s$  为自由表面.

## 二、自由面重力流 $\psi$ 模式变分原理

分析图 1 所示自由面重力流流场  $\Omega$ . 若采用流函数  $\psi$  为流动参量, 且考虑到有势流动假设, 以及沿固定边界  $\Gamma_f$  法向分速  $v_n$  为零; 沿进出口断面  $\Gamma_i$ 、出口断面  $\Gamma_o$  切向分速  $v_s$  为零; 沿自由表面  $\Gamma_s$  法向分速为零, 压力为常值的条件, 则自由面重力流  $\psi$  模式边值问题提法为:

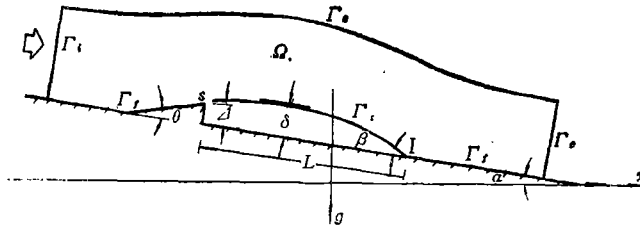


图 1 二维空腔流动流场

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi &= 0 \quad (x, y \in \Omega); \quad \psi = \text{const} \quad (x, y \in \Gamma_f) \\ \psi_{,n} &= 0 \quad (x, y \in \Gamma_i + \Gamma_o); \quad \psi = \text{const}, \quad \frac{1}{2} \psi_{,s}^2 + g(y-E) = 0 \quad (x, y \in \Gamma_s) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

这是不定边界椭圆型方程拟线性边值问题.

自由面重力流变分原理的分析, 可以从 Courant<sup>[7]</sup>给出的可变域泛函的一阶变分表达式出发.

令

$$J_1 = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{d\vec{r}} \right)^2 d\Omega \quad (2.2)$$

$$J_2 = \iint_{\Omega} g(y-E) d\Omega \quad (2.3)$$

考虑到边界  $\Gamma_f$ 、 $\Gamma_t$  及  $\Gamma_s$  位置固定,  $\delta\vec{r}=(\delta x, \delta y)=0$ ; 在  $\Gamma_f$  上  $\psi$  值已知  $\delta\psi=0$ , 则根据泛函一阶变分表达式, 得到  $J_1$ 、 $J_2$  的一阶变分为:

$$\delta J_1 = -\iint_{\Omega} \nabla^2 \psi \delta\psi d\Omega + \int_{\Gamma_s} \psi_{,n} \delta\psi ds + \int_{\Gamma_t+\Gamma_e} \psi_{,n} \delta\psi ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} \psi_{,z} \vec{n} \cdot \delta\vec{r} ds \quad (2.4)$$

$$\delta J_2 = \int_{\Gamma_s} g(y-E) \vec{n} \cdot \delta\vec{r} ds \quad (2.5)$$

另外, 引入

$$\delta J_3 = \int_{\Gamma_s} \sqrt{2g(E-y)} \delta\psi ds \quad (2.6)$$

$$\delta J_4 = \int_{\Gamma_s} \sqrt{2g(E-y)} \delta\vec{r} ds \quad (2.7)$$

式中,  $\delta\psi$  为对应于解答曲线  $\vec{r}_s$  上  $\psi$  的变分;  $\delta\psi$  为在边界变动后的边界线即允许曲线  $\vec{r}_s + \delta\vec{r}_s$  上  $\psi$  的变分, 两者存在关系

$$\delta\psi = \bar{\delta}\psi + \psi_{,n} \vec{n} \cdot \delta\vec{r} \quad (2.8)$$

泛函  $J_1$  的一阶变分由两部分构成: (1) 区域不变而  $\psi$  改变时所产生的,  $\psi$  的改变由  $\bar{\delta}\psi$  表示; (2) 区域变化产生的, 区域变化由边界曲线变分  $\delta\vec{r}$  的法向分量  $\vec{n} \cdot \delta\vec{r}$  表出。

自由表面上流速与  $\Gamma_s$  相切,  $\psi_{,n} \neq 0$ 。若  $\bar{\delta}\psi$  独立变动, 式(2.4)等号右边第二项线积分项不为零。为构成与边值问题(2.1)等价的变分问题, 须做某些处理。事实上, 根据不同的贯截条件组合式(2.4)、(2.5)、(2.6)及(2.7), 可以得到四种类型的变分原理。

### (I) 第 I 类变分原理

令  $J_1 = J_1 + J_2$ , 利用式(2.2)、(2.3)、(2.4)及(2.5)则

$$J_1 = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{d\vec{r}} \right)^2 + g(y-E) \right] d\Omega \quad (2.9)$$

$$\delta J_1 = -\iint_{\Omega} \nabla^2 \psi \delta\psi d\Omega + \int_{\Gamma_s} \psi_{,n} \delta\psi ds + \int_{\Gamma_t+\Gamma_e} \psi_{,n} \delta\psi ds + \int_{\Gamma_s} \left( \frac{1}{2} \psi_{,z} + gy - gE \right) \vec{n} \cdot \delta\vec{r} ds$$

只要给出贯截条件  $\bar{\delta}\psi=0$  (沿  $\Gamma_s$ ), 则方程  $\delta J_1=0$  即等价于边值问题(2.1)。也即许协庆<sup>[3][4]</sup>采用的变分原理。又因为在  $\delta x=0$  时, 成立

$$\delta \iint_{\Omega} g(y-E) d\Omega = \delta \frac{1}{2} \int_0^{x^*} g(y-E)^2 dx \quad (2.10)$$

可见, Ikegawa 等<sup>[2]</sup>采用的泛函是式(2.9)的另一种形式。

### (I) 第 I 类变分原理

令  $J_1 = J_1 - J_2$ , 则

$$J_1 = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{d\vec{r}} \right)^2 - g(y-E) \right] d\Omega \quad (2.11)$$

考虑到式(2.4)及(2.5), 并利用自由表面上  $\delta\psi$  与  $\bar{\delta}\psi$  的关系(2.8), 将  $\bar{\delta}\psi$  代换成  $\delta\psi$ , 则得

$$\begin{aligned} \delta J_{\text{I}} = & - \iint_{\Omega} \nabla^2 \psi \bar{\delta} \psi d\Omega + \int_{\Gamma_s} \psi_{,n} \delta \psi ds + \int_{\Gamma_i + \Gamma_e} \psi_{,n} \bar{\delta} \psi ds \\ & - \int_{\Gamma_s} \left( \frac{1}{2} \psi_{,n}^2 + gy - gE \right) \bar{n} \cdot \delta \bar{r} ds \end{aligned}$$

式中,  $\delta\psi$  是定义在允许曲线上的, 等号右边第二项积分须将  $\delta\psi$  从  $\bar{r}_s + \delta\bar{r}_s$  映照到  $\bar{r}_s$  上进行. 由此关系可知, 给出贯截条件  $\delta\psi=0$  (沿  $\bar{r}_s + \delta\bar{r}_s$ ), 则变分方程  $\delta J_{\text{I}}=0$  即与边值问题(2.1)等价. 由于  $\delta\bar{r} \neq 0$ , 贯截条件  $\delta\psi=0$  等价于

$$\bar{\delta}\psi = -\psi_{,n} \bar{n} \cdot \delta\bar{r} \quad (2.12)$$

考虑到式(2.10), 可见 Betts<sup>[6]</sup>所用泛函是式(2.11)的另一种形式.

### (III) 第 III 类变分原理

Varoğlu 等没有直接给出  $\psi$  的贯截条件, 而是增加一线积分项, 构成第 III 类变分原理. 令  $\delta J_{\text{I}} = \delta J_1 - \delta J_2 - \delta J_3$ , 利用(2.2)、(2.3)及(2.6)诸式, 则

$$\delta J_{\text{I}} = \delta \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{d\bar{r}} \right)^2 d\Omega - \delta \int_{\Omega} g(y-E) d\Omega - \int_{\Gamma_s} \sqrt{2g(E-y)} \delta\psi ds \quad (2.13)$$

考虑到式(2.4)、(2.5)且利用式(2.8)将  $\bar{\delta}\psi$  代换成  $\delta\psi$ , 则

$$\begin{aligned} \delta J_{\text{I}} = & - \iint_{\Omega} \nabla^2 \psi \delta \psi d\Omega + \int_{\Gamma_s} [\psi_{,n} - \sqrt{2g(E-y)}] \delta \psi ds \\ & - \int_{\Gamma_s} \left( \frac{1}{2} \psi_{,n}^2 + gy - gE \right) \bar{n} \cdot \delta \bar{r} ds + \int_{\Gamma_i + \Gamma_e} \psi_{,n} \bar{\delta} \psi ds \end{aligned}$$

因此,  $\delta\psi$  独立变动时, 方程  $\delta J_{\text{I}}=0$  与边值问题(2.1)等价, 成立第 IV 类变分原理

### (IV) 第 IV 类变分原理

令  $\delta J_{\text{IV}} = \delta J_1 + \delta J_2 - \delta J_4$ , 则

$$\delta J_{\text{IV}} = \delta \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{d\bar{r}} \right)^2 d\Omega + \delta \int_{\Omega} g(y-E) d\Omega - \int_{\Gamma_s} \sqrt{2g(E-y)} \bar{\delta} \psi ds \quad (2.14)$$

考虑到式(2.4)、(2.5)和(2.7),

$$\begin{aligned} \delta J_{\text{IV}} = & - \iint_{\Omega} \nabla^2 \psi \bar{\delta} \psi d\Omega + \int_{\Gamma_i + \Gamma_e} \psi_{,n} \bar{\delta} \psi ds \\ & + \int_{\Gamma_s} \left[ \frac{1}{2} \psi_{,n}^2 + gy - gE \right] \bar{n} \cdot \delta \bar{r} ds + \int_{\Gamma_s} [\psi_{,n} - \sqrt{2g(E-y)}] \bar{\delta} \psi ds \end{aligned}$$

故  $\bar{\delta}\psi$  独立变动时, 方程  $\delta J_{\text{IV}}=0$  与边值问题(2.1)等价.

这几种贯截条件可用图 2 给予几何说明.  $\Gamma_s$  及  $\Gamma'_s$  分别为自由表面的解答曲线及允许曲线, 两者相差  $|\delta\bar{r}|$ . 贯截条件  $\bar{\delta}\psi=0$  要求允许曲线须通过  $\Gamma_s$  与  $\psi=\psi_s$  的交点 A. 贯截条

件  $\delta\psi=0$  则要求允许曲线的端点  $B$  始终沿着  $\psi=\psi_0$  滑动, 因  $\delta\psi=0$  与  $\delta\bar{\psi}=0$  不相容, 此时  $\delta\bar{\psi}\neq 0$ 。第 III、IV 类变分原理相应的变分方程自动满足压力条件。第 III 类变分原理独立变量是  $\delta\psi$ , 故  $\delta\bar{\psi}$  须满足关系 (2.8); 第 IV 类变分原理独立变量是  $\delta\bar{\psi}$ , 故  $\delta\psi$  须满足式 (2.8)。

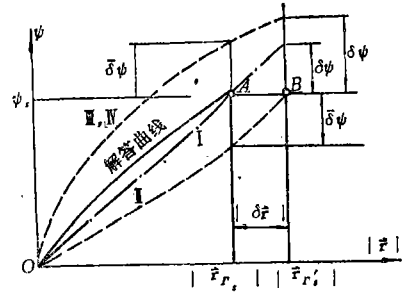


图2 各种贯截条件的几何说明

### 三、有限元方程

设剖分后的流场有  $n_1$  个内部结点, 相应的  $\psi_i$  值未知; 有  $n_2$  个自由表面结点, 相应的座标  $\bar{r}_j$  及  $\psi_j$  值未知。用下标  $i, j$  分别表示内部结点及表面结点编号, 并考虑到  $\psi_j$  即为流量  $\psi_0$ , 离散化后, 泛函  $J$  的一阶变分为

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial J}{\partial \psi_i} \delta \psi_i + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial J}{\partial \bar{r}_j} \delta \bar{r}_j + \frac{\partial J}{\partial \psi_0} \delta \psi_0 \quad (3.1)$$

假设流量  $\psi_0$  已知, 考虑到相应于允许曲线上的  $\psi_0^{(0)}$  始终等于  $\psi_0$ , 即保证了贯截条件  $\delta\psi=0$  的实现, 故采用第 II 类变分原理时, 式 (3.1) 等号右边第三项不复存在, 表面结点也仅有一组未知量  $\bar{r}_j$ 。将各结点未知量分别定义为相应的广义座标, 并记单元及整体广义座标向量分别为  $\bar{R}_e$  及  $\bar{R}$ , 两者关系为

$$\bar{R}_e = T_e \bar{R}, \quad \bar{R} = T_e^T \bar{R}_e \quad (3.2)$$

式中  $T_e$  为座标转换阵。若方程排列方式与广义座标分量排列方式一致, 在广义座标相互独立时, 变分方程  $\delta J=0$  等价于方程组

$$\frac{dJ}{d\bar{R}} = \sum_{e=1}^m T_e^T \frac{dJ_e}{d\bar{R}_e} = 0 \quad (3.3)$$

式中,  $J_e$  为单元泛函;  $m$  为单元总数。若采用 Newton-Raphson 迭代法求解非线性方程 (3.3), 则迭代方程为

$$\left( \sum_{e=1}^m T_e^T L_e^{(0)} T_e \right) \bar{R} = \sum_{e=1}^m T_e^T \left( L_e^{(0)} \bar{R}_e^{(0)} - \frac{dJ_e^{(0)}}{d\bar{R}_e} \right) \quad (3.4)$$

式中,  $L_e$  为  $J_e$  的 Hessian 阵

$$L_e = \frac{d^2 J_e}{d\bar{R}_e d\bar{R}_e} \quad (3.5)$$

采用三角形三结点单元 Lagrange 型插值函数,  $J_e$  近似式为

$$\begin{aligned} J_e = & \frac{1}{8\omega_e} \{ [(y_j - y_k)\psi_i + (y_k - y_i)\psi_j + (y_i - y_j)\psi_k]^2 \\ & + [(x_k - x_j)\psi_i + (x_i - x_k)\psi_j + (x_j - x_i)\psi_k]^2 \} \\ & - g\omega_e \left[ \frac{1}{3} (y_i + y_j + y_k) - E \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

式中,  $i, j, k$  为单元结点编号;  $\omega_e$  为单元面积。

## 四、明渠突体绕流计算

考虑图3所示流场。令表面结点  $\delta x=0$ 。每结点定义一个广义座标，表面结点为该点高程  $y$ ，其它均为该点  $\psi$  值。并假设进口断面流速均匀， $\psi$  成线性分布；固定壁面  $\psi$  值已知。

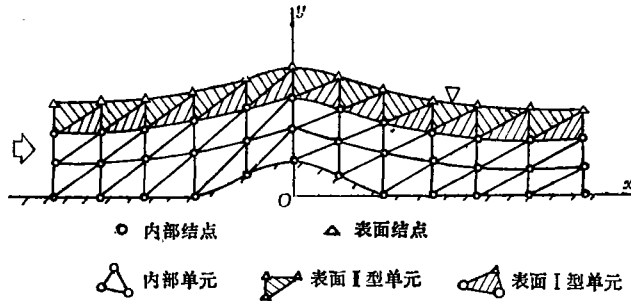


图3 明渠流动流场划分

为提高收敛速度，初始自由表面给定后，调用固定域计算过程计算  $\psi$  分布，作为初值，求解方程(3.4)，得到高阶自由表面，如是反复，直至满足精度要求为止。计算精度用指标

$$\sigma = \left[ \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (E - z_j - q_j^2/2g)^2 \right]^{1/2} / E \quad (4.1)$$

估计。 $z_j$  与  $q_j$  分别为第  $j$  表面结点的高程及流速模。 $q_j$  用二维 Lagrange 插值方法求得。

图4、5分别为明渠圆弓形及半圆弓形突体绕流压力系数计算值与实验值比较。实验数据引自文献[8](长度单位: m)。计算表明，算法收敛快，对初值要求甚低。对于  $\sigma_0=71.4\%$  的初始水面线，迭代四次， $\sigma_4=0.44\%$ 。

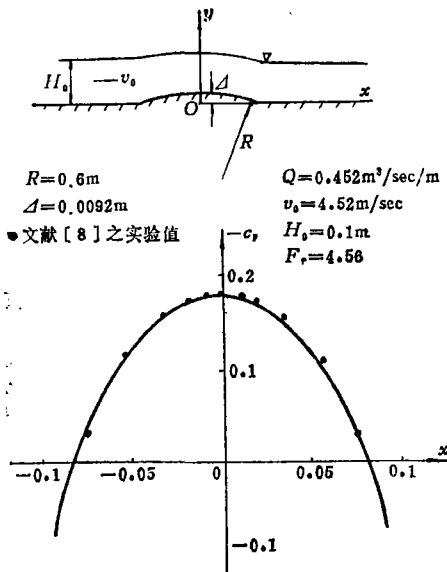


图4 圆弓形突体绕流壁面压力分布

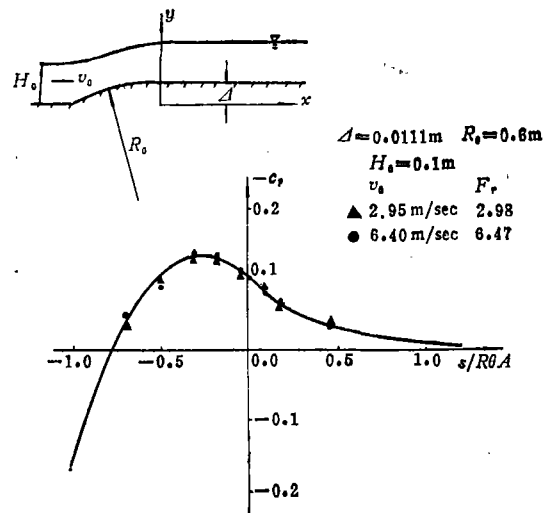


图5 半圆弓形突体绕流壁面压力分布

## 五、空腔流动计算

分析图6所示有压平面管道及图1所示明渠中的空腔流动。水流在角点 $S$ 脱体，射流下缘与固壁之间形成空腔，通过尾端平板 $AI$ 与下游固壁衔接。分别定义点 $S$ 的 $\psi$ 、 $y$ 值及点 $I$ 的 $x$ 值为相应点的广义坐标。点 $S$ 的 $\psi$ 、 $y$ 值均已知，求解时以强迫条件方式输入。下游固壁曲线为 $y=\varphi(x)$ ，因此增加一关于 $x_I$ 的贯截条件。点 $S$ 及 $I$ 的计算格式见图7。

对于同一初始误差造成的扰动， $x_I$ 调整幅度远大于自由表面高程，故 $x_I$ 不收敛。计算发现，固定 $x_I$ 求解自由面高程 $y$ 则收敛甚快。且只要另外给出流线在点 $S$ 处光滑的条件，空腔表面均能满足压力条件。故采用方程

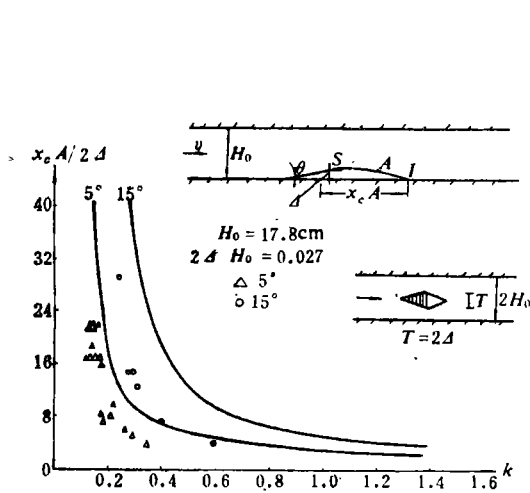


图6 二维有压管道空腔计算

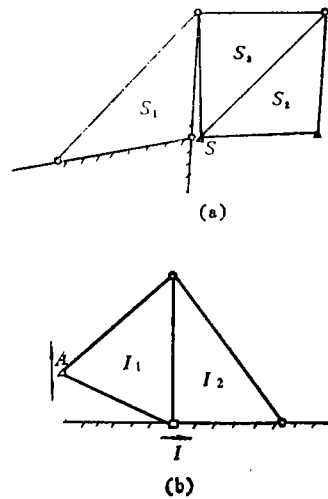


图7 脱流点与碰撞点计算格式

$$F(x_I) = \left( \frac{dy_c}{dx} \right)_{x=x_S} - \operatorname{tg}\theta = 0 \quad (5.1)$$

确定点 $I$ 的 $x$ 坐标。式中 $\theta$ 为挑坎在点 $S$ 处的倾角， $y=y_c(x)$ 为计算空腔表面曲线。

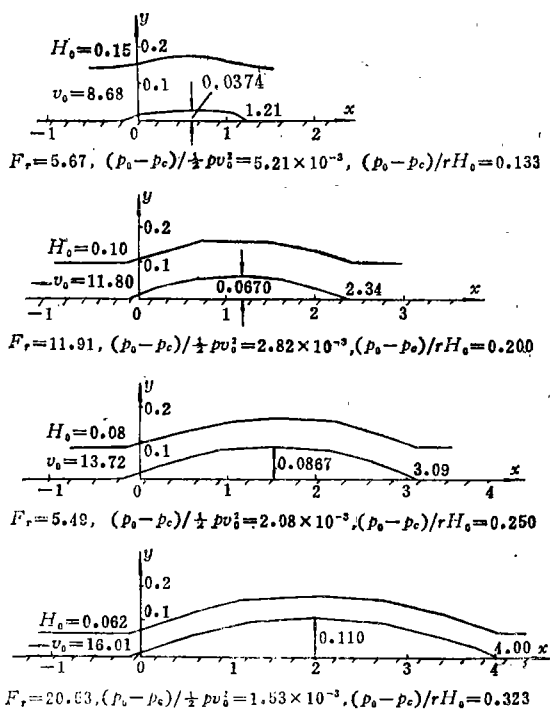
计算表明，对于明渠通气空腔流动，方程(5.1)的根总存在。用弦截法求根，一般迭代三次可满足 $|F(x_I)/\operatorname{tg}\theta| < 0.05\%$ 的要求。对于平面有压管道空腔流动，在空腔数 $k = (p_c - p_\infty) / \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$ 相当大时，方程(5.1)没有合理的根，其中 $p_c$ 、 $p_\infty$ 分别为空腔及参考点压力。此时，假设碰撞点 $I$ 的 $x$ 坐标为相应于函数 $F(x_I)$ 绝对值极小时的 $x_I$ 值，求解方程为

$$|F(x_I)| = \min \quad (5.2)$$

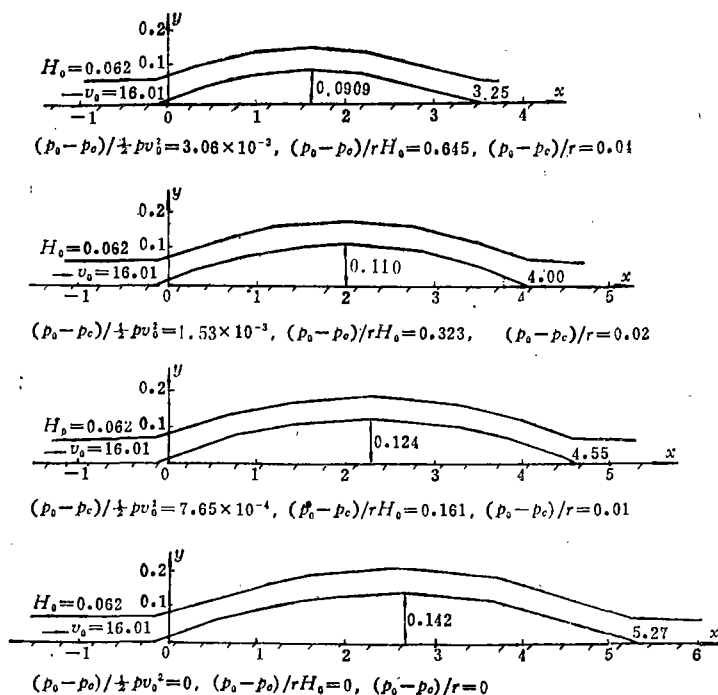
显然， $k$ 值小时，方程(5.2)与(5.1)同解。

图6中 $AI$ 为一直线段，相当于在点 $I$ 处置放一虚拟平板。显然， $AI$ 不是自由表面。这与非重力场中的Riabouchinsky映象模型类似。不同的是 $AI$ 不是上游绕流体的映象，且位置、角度及长度均不给定，而是解的一部分。 $AI$ 在 $x$ 轴上的投影即空腔尾部二断面间距，其长度可由此断面间距控制，使空腔表面在尽可能长的范围内满足压力条件。

图6为二组计算结果，实验值引自文献[9]。图8为不同 $F_r$ 数及 $k$ 值时，明渠通气空



(a)



(b)

图8 空腔流动的自由表面曲线

腔流动水面线形态(长度单位: m); 图9为流速分布(长度单位: m); 图10表示不同倾角下空腔长度与  $F_r$  数及  $k$  的关系。



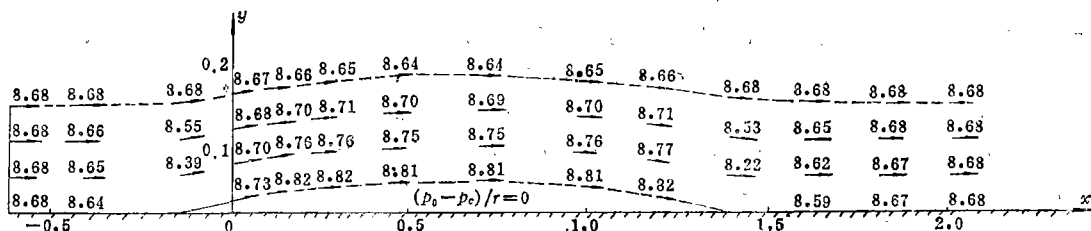


图9 空腔流动流场流速分布

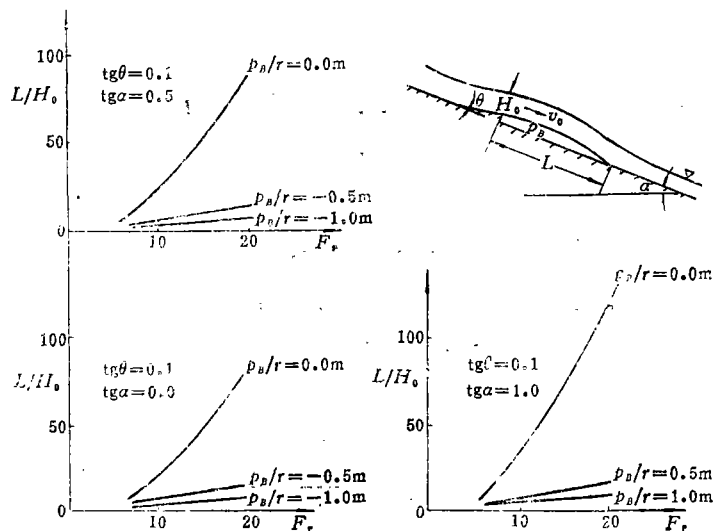


图10 大坝通气槽流动计算

## 六、结 论

(1) 采用  $\psi$  模式时, 自由表面  $\psi$  的法向导数不为零, 引用不同的贯截条件, 自由面重力流变分原理亦不相同. 计算时须采用相应的计算格式, 保证贯截条件得到满足.

(2) 本文采用的计算方法, 在给定一空腔长度时, 可得到相应的空腔表面曲线, 给出流线在脱流点光滑的条件后, 可得到一满足压力条件的空腔自由表面曲线.

(3) 计算结果表明, 可以构造一适应有限元法的尾流模型. 即在碰撞点置放一长度很小的虚拟平板. 流线上端与挑坎相切, 下端与尾端平板衔接. 从而得到重力场中空腔流动的一个存在的解.

## 参 考 文 献

- [1] Wu, Th. y-t. (吴耀祖), Cavity and wake flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 4, (1972).
- [2] Ikegawa, M., K. Washizu, Finite element method applied to analysis of flow over a spillway crest, *Inter. J. of Num. Mech. in Eng.*, 6 (1973).
- [3] 水电部水利调度研究所, 乌江渡水电站右岸泄洪洞溢流面压力分布的有限元法计算, 1(1976年1月)

- [4] 许协庆, 自由面重力流的一种有限元解法, 水利学报, 1 (1980).
- [5] Varoğlu, E. and W. D. Liam Finn, Variable domain finite element analysis of free-surface gravity flow, *Computer and Fluids*, 6 (1978).
- [6] Betts, P. L., A variational principle in terms of stream function for free-surface flows and its application to the finite element method, *Computer and Fluids*, 7 (1979).
- [7] 柯朗、希尔伯特, 《数学物理方法》, I, 科学出版社, (1958)。
- [8] 许协庆、周胜, 圆弧弓形和半弓形突体绕流的压力分布和初生空穴数, 水利水电科学研究院论文集, (1964年)。
- [9] Knapp, R. T., J. W. Daily and F. G. Hammit, *Cavitation*, (1970)。

## Analysis of Two-Dimensional Cavity Flow by Finite Elements

Lin Bin-yao

(*Institute of Water Conservancy and Hydroelectric  
Power Research, Beijing*)

Xu Xie-qing

(*Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power  
Research, Qinghua University, Beijing*)

### Abstract

The variational principle in terms of stream function  $\psi$  for free surface gravity flow is discussed by the formulation of first-order variation in a variable domain. Because of different transversal conditions adopted, there are four forms of variational principle in terms of  $\psi$ .

An air-filled cavity flow with given discharge and total energy is then analysed by finite element method. At the end of the cavity, the free stream line is tangent to a short virtual plate of given length, which joins the fixed boundary at an angle to be determined. The condition that the free stream line should be tangent to the fixed boundary at the point of separation makes the solution unique.

Finally curves giving the cavity length as a function of the Froude number, cavity pressure and channel bottom slope are presented.