

文章编号: 1000-0887(2004) 10-1083-10

Couette_Taylor 流的谱 Galerkin 逼近*

王贺元^{1,2}, 李开泰²

(1. 辽宁工学院 数理系, 辽宁锦州 121001;
2. 西安交通大学 理学院, 西安 710049)

(我刊原编委周显初推荐)

摘要: 利用谱方法对轴对称的旋转圆柱间的 Couette_Taylor 流进行数值模拟。首先给出 Navier-Stokes 方程流函数形式, 利用 Couette 流把边界条件齐次化。其次给出 Stokes 算子的特征函数的解析表达式, 证明其正交性, 并对特征值进行估计。最后利用 Stokes 算子的特征函数作为逼近子空间的基函数, 给出谱 Galerkin 逼近方程的表达式。证明了 Navier-Stokes 方程非奇异解的谱 Galerkin 逼近的存在性、唯一性和收敛性, 给出了解谱 Galerkin 逼近的误差估计, 并展示了数值计算结果。

关键词: Navier-Stokes 方程; Couette_Taylor 流; 谱逼近; Stokes 算子

中图分类号: O357.1; O241.82 **文献标识码:** A

引 言

关于同轴圆柱之间的旋转流动的 Couette_Taylor 流问题已有很多的研究, 具体可见[1~5]等参考文献, 它是一种典型的旋转流动问题, 在润滑理论和工程实践中有广泛的应用。这种流动随雷诺数的增大, 在从稳态层流发展到湍流的过程中, 表现了一些典型的非线性动力学行为, 因此对它的研究具有重要的理论意义。这个问题是和两个同心球之间的流动问题紧密相连的, 比如, 球 Couette 流在赤道附近的流态很接近于同轴柱之间的流动(详细比较可参见文献[6])。但球不象圆柱那样受端口的影响, 因此研究起来更加单纯。记入记号

(r, ϕ, z)	柱坐标;
r_1, r_2	内、外圆柱的半径;
ω_1, ω_2	内、外圆柱旋转的角速度;
$\omega = \omega_2 / \omega_1$	外、内圆柱的角速度比;
$\eta = r_2 / r_1$	外、内圆柱的半径比;
$Re_i = \omega_i r_i^2 / \nu, i = 1, 2$	Reynolds 数;
ϕ	流函数;
ν	动力粘性系数;
$u = (u_1, u_2, u_3)$	流体速度协变分量;

收稿日期: 2003_01_10; 修订日期: 2004_06_08

基金项目: 国家基础研究专项基金资助项目(G1999032801_07); 国家自然科学基金资助项目(10101020)

作者简介: 王贺元(1963—), 男, 辽宁黑山人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_416_4199018; E_mail: wangheyuan@hotmail.com)。

$(u_r, u_\phi, u_z), p$

柱坐标下流体速度及压力的物理分量

如果内圆柱旋转, 外圆柱静止, 在低雷诺数的情况下, 基本 Couette 流是唯一的, 即如果 ω_1 很小, 则流体绕圆筒的轴线作水平圆周运动, 这种流动称为 Couette 流动. 当 ω_1 达到某个临界值 ω_c 时, Couette 流动开始失去稳定性, 并出现新的定常流动^[7]. 这种流动是轴对称的, 沿着轴线方向规则地分布着旋涡, 相邻的旋涡是反向的, 称其为 Taylor 涡流. 从数学角度上讲, 如果把 Couette 流动作为基本流动, 则 Couette 流变为 Taylor 涡流是超临界的定态分叉. 我们用谱 Galerkin 方法对这种情形进行数值模拟, 与前人工作不同的是, 我们给出了同轴旋转圆柱间隙区域的 Stokes 算子的特征函数的具体表达式, 采用此特征函数作为逼近子空间的基函数, 并利用其正交性. 其优点在于它具有一定的物理意义: 每一个基函数都可以看成是一种基本的流动模式, 实际的流动可以看成是这些基本流动模式的叠加.

本文的安排是这样的: 在第 1 节, 我们推导 Navier-Stokes 方程的流函数形式, 并利用 Couette 流将边界条件齐次化. 在第 2 节, 我们给出 Stokes 算子的特征函数的具体表达式, 证明其正交性, 并对特征值进行估计. 在第 3 节, 我们给出谱 Galerkin 逼近方程的表达式, 证明逼近方程中系数大部分为零, 证明了非奇异解的谱 Galerkin 逼近的存在性、唯一性和收敛性, 给出谱 Galerkin 逼近的误差估计. 第 4 节我们给出了数值计算结果.

1 流函数方程及边界条件齐次化

考察忽略了重力情形原始变量的 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \nu \nabla^2 u = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (2)$$

内外圆筒壁上流体随圆柱以同样的角速度旋转, 从物理实验知, 沿 z 轴方向上满足周期性边界条件.

在柱坐标下其形式化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} - \nu \left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\ \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{r} u_\phi^2 + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} - \nu \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right] + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \\ \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r u_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} - \nu \nabla^2 u_z + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

边界条件为

$$\begin{cases} u_\phi|_{r=r_1} = r_1 \omega_1, \quad u_r|_{r=r_1} = u_z|_{r=r_1} = 0, \\ u_\phi|_{r=r_2} = r_2 \omega_2, \quad u_r|_{r=r_2} = u_z|_{r=r_2} = 0, \\ u(t, r, \phi, z) = u(t, r, \phi, z + 2\pi/\alpha_0), \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,

α_0 为波数, 是待定常数. 并假设流动是轴对称的, 引入流函数 ϕ

$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad u_z = D^* \phi = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \phi \quad (5)$$

由(5)的定义易知 u_r, u_z 满足(3)中的连续性方程(第4式), (5)代入(3), 消去 p 经计算, 我们得到轴对称情况下 Navier-Stokes 方程的流函数形式

$$\frac{\partial}{\partial t} L^2 \phi - \frac{\partial(\phi, L^2 \phi)}{\partial(z, r)} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\phi L^2 \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi^2}{\partial z} - \mathcal{M}^4 \phi = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} + D^* \phi \frac{\partial u_\phi}{\partial z} - \mathcal{M}^2 u_\phi = 0, \quad (7)$$

其中 $L^2 = \Delta^2 - \frac{1}{r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}$,

边界条件化为

$$\begin{cases} u_\phi|_{r=r_1} = r_1 \omega_1, \quad u_\phi|_{r=r_2} = r_2 \omega_2, \\ \phi|_{r=r_1} = \phi|_{r=r_2} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = 0, \\ \phi(r, z) = \phi\left(r, z + \frac{2\pi}{\alpha_0}\right), \quad u_\phi(r, z) = u_\phi\left(r, z + \frac{2\pi}{\alpha_0}\right). \end{cases} \quad (8)$$

为了将边界条件齐次化, 引入基本流 u_0^* , 即与粘性无关的 Couette 流^[8]

$$u_0^* = (0, u_\phi^*, 0), \quad u_\phi^* = \alpha + \beta r^{-1},$$

$$p_0 = \frac{1}{2}(\alpha^2 r^2 + \beta^2 r^{-2}) + 2\alpha\beta \ln r + \text{const},$$

其中 $\alpha = \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad \beta = -\frac{(\omega_1 - \omega_2)r_1 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$.

容易验证 u_ϕ^* 满足边界条件

$$u_\phi^*|_{r=r_1} = r_1 \omega_1, \quad u_\phi^*|_{r=r_2} = r_2 \omega_2,$$

并且有 $L^2 u_\phi^* = (\Delta^2 - 1/r^2) u_\phi^* = 0$, 设 $u_\phi = U + u_\phi^*$, 这样我们得到 U 和 ϕ 的方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} D^* U - \frac{\partial U}{\partial z} D^* \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} D^* u_\phi^* + \mathcal{M}^2 U, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L^2 \phi = \frac{\partial(\phi, L^2 \phi)}{\partial(z, r)} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\phi L^2 \phi) - \frac{2u_\phi^*}{r} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial U^2}{\partial z} + \mathcal{M}^4 \phi, \quad (10)$$

及边界条件

$$\begin{cases} U|_{r=r_1} = U|_{r=r_2} = 0, \\ \phi|_{r=r_1} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \phi|_{r=r_2} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = 0, \\ U(r, z) = U\left(r, z + \frac{2\pi}{\alpha_0}\right), \quad \phi(r, z) = \phi\left(r, z + \frac{2\pi}{\alpha_0}\right). \end{cases} \quad (11)$$

2 Stokes 算子的特征值和特征函数

一般区域上 Stokes 算子的特征函数是无法给出解析表达式的. 对于同轴旋转圆柱间隙区域的 Stokes 算子的特征值问题, 采用分离变量法, 利用 Bessel 函数, 可以给出其特征函数的解

析形式· 我们将给出无限长柱间隙区域 $\Omega = \{(r, \phi, z); 1 \leq r \leq \eta, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$ 上的 Stokes 算子的特征值和特征函数, 证明特征函数的正交性, 并对 Stokes 算子的特征值的增长性进行估计·

考察 Stokes 算子的特征值问题

$$\begin{cases} -\mathcal{L}^2 U = \lambda U, & -\mathcal{L}^4 \phi = \mathcal{L}^2 \phi, \\ U|_{r=1} = U|_{r=\eta} = 0, \\ \phi|_{r=1} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \phi|_{r=\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\bigg|_{r=\eta} = 0, \\ U(r, z) = U\left(r, z + \frac{2\pi}{\alpha_0}\right), & \phi(r, z) = \phi\left(r, z + \frac{2\pi}{\alpha_0}\right). \end{cases} \quad (12)$$

定义空间 H_{0p}^1 为 $\{u \mid u \in C^\infty(\Omega), u|_{r=1, \eta} = 0, u(r, z) = u(r, z + 2\pi/\alpha_0)\}$ 在 H^1 范数下的闭包, 并赋予 H^1 范数; 空间 H_{0p}^2 为

$$\left\{u \mid u \in C^\infty(\Omega), u|_{r=1, \eta} = 0, u(r, z) = u(r, z + 2\pi/\alpha_0)\right\}$$

在 H^2 范数下的闭包, 并赋予 H^2 范数, 因此相应于 Stokes 算子的特征值问题(12)为:

求 $(\lambda, U, \phi) \in \mathbf{R} \times H_{0p}^1(\Omega) \times H_{0p}^2(\Omega)$, 使得

$$\mathcal{L}^2 U + \lambda U = 0, \quad (13)$$

和

$$\mathcal{L}^4 \phi + \mathcal{L}^2 \phi = 0, \quad (14)$$

这里 $\lambda = \mathcal{L}^2 \nu = \text{Re} \cdot \lambda$

下面采用分离变量法求解问题(13)、(14)·

设 $U = w(r)f(z)$, 问题(13)可化为如下 Sturm-Liouville 问题^[9,10]

$$r^2 \frac{d^2 w}{dr^2} + r \frac{dw}{dr} + [(\lambda - \mu)r^2 - 1]w = 0, \quad w|_{r=1} = w|_{r=\eta} = 0 \quad (15)$$

及问题

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \mathcal{F}(z) = 0, \quad f(z) = f\left(z + \frac{2\pi}{\alpha_0}\right). \quad (16)$$

由周期性边界条件知, 当 $\mu = \alpha_0^2 n^2 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 时, (16) 的通解为 $f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$, 其中 $f_1(z) = \cos(n\alpha_0 z)$, $f_2(z) = \sin(n\alpha_0 z)$ 为其两个线性独立的非零解, 对任何固定的 n , (15) 化为

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + \left[(\lambda - \alpha_0^2 n^2) r - \frac{1}{r} \right] w = 0, \quad w|_{r=1} = w|_{r=\eta} = 0. \quad (17)$$

众所周知, 问题(17)中方程的通解可以表示为^[9]

$$W_n(\lambda, r) = c_1 J_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} r) + c_2 Y_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} r), \quad (18)$$

其中 J_1, Y_1 分别为一阶第一类、第二类 Bessel 函数, 将其边界条件代入后得

$$\begin{cases} c_1 J_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2}) + c_2 Y_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2}) = 0, \\ c_1 J_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} \eta) + c_2 Y_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} \eta) = 0. \end{cases}$$

由于 $W_n(\lambda, r)$ 不恒为 0, 故 c_1, c_2 中至少有一个不为零, 即上述方程有非零解, 从而有^[11]

$$\begin{vmatrix} J_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2}) & Y_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2}) \\ J_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} \eta) & Y_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} \eta) \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

由 Bessel 函数性质可知, 对任一固定的 n , (19) 有无穷多个实根 λ_k^n , $k = 1, 2, \dots$. 记 $\lambda_k^n = \alpha_{k, n}$, 则有^[10]

$$\alpha_{k, n} > 0, \alpha_{k+1, n} > \alpha_{k, n}; \alpha_{k, n+1} > \alpha_{k, n}, \quad (20)$$

而这时常数 c_1, c_2 分别取 $c_1 = cY_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} \eta)$, $c_2 = -cJ_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} \eta)$, 由(18) 得解

$$W_n(\lambda, r) = c \begin{vmatrix} J_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} r) & Y_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} r) \\ J_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} \eta) & Y_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} \eta) \end{vmatrix}.$$

因此对应(13)的二重特征值 $\alpha_{k, n}$, $k, n = 1, 2, \dots$ 的两个线性独立的特征函数为

$$U_{kn}^1 = W_{kn}(r) \cos(n\alpha_0 z), \quad U_{kn}^2 = W_{kn}(r) \sin(n\alpha_0 z) \quad (k, n = 1, 2, \dots) \cdot \quad (21)$$

其中 $W_{kn}(r) = W_n(\alpha_{k, n}, r)$.

用同样的方法可以求解问题(14), 设 $\phi = w(r)f(z)$, 则(14)可化为两个问题: 问题

$$G^4 w = \lambda G^2 w, \quad w|_{r=1} = w|_{r=\eta} = w'|_{r=1} = w'|_{r=\eta} = 0 \quad (22)$$

及问题(16), 其中

$$G^2 w = -\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \left(\alpha_0^2 n^2 + \frac{1}{r^2} \right) w, \quad G^4 w = G^2(G^2 w).$$

故问题(22)中方程的通解为

$$w_n(r) = c_1 w_n^1(r) + c_2 w_n^2(r) + c_3 w_n^3(r) + c_4 w_n^4(r), \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} w_n^1(r) = I_1(n\alpha_0 r), & w_n^2(r) = K_1(n\alpha_0 r), \\ w_n^3(r) = J_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} r), & w_n^4(r) = Y_1(\sqrt{\lambda - \alpha_0^2 n^2} r) \end{cases}$$

分别为变形的一阶、二类 Bessel 函数及一阶一类、二类 Bessel 函数, 边界条件为

$$\begin{cases} w_n(1) = c_1 w_n^1(1) + c_2 w_n^2(1) + c_3 w_n^3(1) + c_4 w_n^4(1) = 0, \\ w_n(\eta) = c_1 w_n^1(\eta) + c_2 w_n^2(\eta) + c_3 w_n^3(\eta) + c_4 w_n^4(\eta) = 0, \\ \frac{dw_n(1)}{dr} = c_1 \frac{dw_n^1(1)}{dr} + c_2 \frac{dw_n^2(1)}{dr} + c_3 \frac{dw_n^3(1)}{dr} + c_4 \frac{dw_n^4(1)}{dr} = 0, \\ \frac{dw_n(\eta)}{dr} = c_1 \frac{dw_n^1(\eta)}{dr} + c_2 \frac{dw_n^2(\eta)}{dr} + c_3 \frac{dw_n^3(\eta)}{dr} + c_4 \frac{dw_n^4(\eta)}{dr} = 0. \end{cases}$$

由于 $w_n(r) \neq 0$, 故 c_1, c_2, c_3, c_4 不全为 0, 故有^[11]

$$\begin{vmatrix} w_n^1(1) & w_n^2(1) & w_n^3(1) & w_n^4(1) \\ w_n^1(\eta) & w_n^2(\eta) & w_n^3(\eta) & w_n^4(\eta) \\ \frac{dw_n^1(1)}{dr} & \frac{dw_n^2(1)}{dr} & \frac{dw_n^3(1)}{dr} & \frac{dw_n^4(1)}{dr} \\ \frac{dw_n^1(\eta)}{dr} & \frac{dw_n^2(\eta)}{dr} & \frac{dw_n^3(\eta)}{dr} & \frac{dw_n^4(\eta)}{dr} \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

从而可以确定(22)的特征值 $\beta_{k, n}$, $k, n = 1, 2, \dots$, 且满足

$$\beta_{k, n} > 0, \beta_{k+1, n} > \beta_{k, n}; \beta_{k, n+1} > \beta_{k, n}. \quad (25)$$

由通解(23)得解

$$w_n(\lambda, r) = c \begin{vmatrix} w_n^1(r) & w_n^2(r) & w_n^3(r) & w_n^4(r) \\ w_n^1(\eta) & w_n^2(\eta) & w_n^3(\eta) & w_n^4(\eta) \\ \frac{dw_n^1(1)}{dr} & \frac{dw_n^2(1)}{dr} & \frac{dw_n^3(1)}{dr} & \frac{dw_n^4(1)}{dr} \\ \frac{dw_n^1(\eta)}{dr} & \frac{dw_n^2(\eta)}{dr} & \frac{dw_n^3(\eta)}{dr} & \frac{dw_n^4(\eta)}{dr} \end{vmatrix}.$$

则对应(14)的二重特征值 $\beta_{k,n}$, $k, n = 1, 2, \dots$ 的两个线性独立的特征函数为

$$\phi_{kn}^1 = w_{kn}(r) \cos(n\alpha_0 z), \quad \phi_{kn}^2 = w_{kn}(r) \sin(n\alpha_0 z) \quad (k, n = 1, 2, \dots) \quad (26)$$

其中 $w_{kn}(r) = w_n(\beta_{k,n}, r)$.

综上所述, 我们得到柱间隙区域 Ω 上的 Stokes 算子的特征值为

$$\alpha_{k,n} = \frac{1}{Re} \alpha_{k,n}, \quad \beta_{k,n} = \frac{1}{Re} \beta_{k,n} \quad (k, n = 1, 2, \dots),$$

相应的特征函数分别为 $(0, U_{kn}^i, 0)$, $(u_{r(kn)}^i, u_{z(kn)}^i)$, $k, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2$, 其中

$$u_{r(kn)}^i = -\frac{\partial \phi_{kn}^i}{\partial z}, \quad u_{z(kn)}^i = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \phi_{kn}^i.$$

关于特征函数的正交性, 我们有下列结论: 由于周期性, 只需在一个周期区域 $\Omega_0 = \{(r, \phi, z); 1 \leq r \leq \eta, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\pi/\alpha_0\}$ 上证明特征函数的正交性即可.

定理 2.1 特征函数 $U_{kn}^i = W_{kn}(r)f_i(z)$, $\phi_{kn}^i = w_{kn}(r)f_i(z)$, $k, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2$ 具有如下正交性

$$\int_{\Omega_0} r U_{kn}^i U_{lm}^j dr dz = p_{kn} \frac{\pi}{\alpha_0} \delta_{mn} \delta_{kl} \delta_{ij}, \quad (27)$$

$$-\int_{\Omega_0} r L^2 \phi_{kn}^i \cdot \phi_{lm}^j dr dz = Q_{kn} \frac{\pi}{\alpha_0} \delta_{mn} \delta_{kl} \delta_{ij}, \quad (28)$$

其中 $p_{kn} = \int_1^\eta r W_{kn}^2 dr$, $Q_{kn} = \int_1^\eta r G^2 w_{kn} w_{kn} dr$.

关于特征值的增长性估计, 有如下结论(证明略):

定理 2.2 Stokes 算子在圆柱间隙区域 Ω 上的特征值有如下估计

$$1) \alpha_{k,n} \geq \frac{k^2}{(\eta^2 - 1)^2} + \frac{\alpha_0^2 n^2 \eta^2 + 1}{\eta^2} \quad (k, n = 1, 2, \dots); \quad (29)$$

2) 当 $\alpha_0^2 n^2 \geq 3$, $\eta \leq \sqrt{3}$ 时,

$$\beta_{k,n} \geq \frac{k^2}{9(\eta^2 - 1)^2} + \alpha_0^2 n^2 \quad (k, n = 1, 2, \dots). \quad (30)$$

3 Couette-Taylor 流的谱 Galerkin 逼近

这部分我们将讨论 Couette-Taylor 流的谱 Galerkin 逼近和误差估计, 由于 z 方向的周期性, 我们只需在 Ω_0 上讨论即可. 引入记号

$$B_1(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} \end{vmatrix}, \quad B_2(u, v) = \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial z},$$

则定常(与时间无关)的流函数方程(9)、(10)可写成如下形式

$$\frac{1}{Re} L^2 U + B_1(\phi, U + u_\phi^*) + B_2(U + u_\phi^*, \phi) - B_2(\phi, U + u_\phi^*) = 0, \quad (31)$$

$$\frac{1}{Re} L^4 \phi + B_1(\phi, L^2 \phi) - B_2(L^2 \phi, \phi) - B_2(\phi, L^2 \phi) - 2B_2(U + u_\phi^*, U + u_\phi^*) = 0 \quad (32)$$

引入空间

$$H = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega_0)]^3, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \right\},$$

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega_0)]^3, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\},$$

其中 \mathbf{n} 为 $\partial \Omega_0$ 的外法向, 分别以 $|\cdot|$ 、 $\|\cdot\|$ 记 H 、 V 中的范数. 定义有限维特征子空间

$$U_{L_0 N_0}^\sigma = \operatorname{span} \left\{ U_{kn}^\sigma, k = 1, 2, \dots, L_0; n = 1, 2, \dots, N_0; \sigma = 1, 2 \right\},$$

$$\Psi_{L_0 N_0}^\sigma = \operatorname{span} \left\{ \phi_{kn}^\sigma, k = 1, 2, \dots, L_0; n = 1, 2, \dots, N_0; \sigma = 1, 2 \right\},$$

则方程(31)、(32)的谱 Galerkin 逼近方程为求 $U \in U_{L_0 N_0}^\sigma$, $\phi \in \Psi_{L_0 N_0}^\sigma$, 使得

$$\frac{1}{Re} a_1(U, v) + b_1(\phi, U + u_\phi^*, v) + b_2(U + u_\phi^*, \phi, v) - b_2(\phi, U + u_\phi^*, v) = 0, \quad \forall v \in U_{L_0 N_0}^\sigma, \quad (33)$$

$$\frac{1}{Re} a_2(\phi, w) + b_1(\phi, L^2 \phi, w) - b_2(L^2 \phi, \phi, w) - b_2(\phi, L^2 \phi, w) - 2b_2(U + u_\phi^*, U + u_\phi^*, w) = 0, \quad \forall w \in \Psi_{L_0 N_0}^\sigma, \quad (34)$$

其中

$$a_1(v, w) = ((Lv, Lw)) = \int_{\Omega_0} rLv \cdot Lw \, drdz,$$

$$a_2(v, w) = \int_{\Omega_0} rL^2 v \cdot L^2 w \, drdz,$$

$$b_i(u, v, w) = \int_{\Omega_0} rB_i(u, v) \cdot w \, drdz \quad (i = 1, 2).$$

如果设 $U = \sum_{k=1}^{L_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{\sigma=1}^2 x_{kj}^\sigma U_{kj}^\sigma$, $\phi = \sum_{k=1}^{L_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{\sigma=1}^2 z_{ij}^\sigma \phi_{ij}^\sigma$, $v = U_{kn}^\sigma$, $w = \phi_{kn}^\sigma$, 利用(13)、(14)及正交性公式(27)、(28), 则(33)、(34)可化为如下方程组

$$\frac{p_{kn} \pi \alpha_{k,n}^\sigma}{\alpha_0 Re} x_{kn}^\sigma + \sum_{k=1}^{L_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{l=1}^{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \sum_{\sigma=1}^2 C_{i,j,l,m,k,n}^\sigma x_{ij}^\sigma z_{lm}^\sigma + \sum_{l=1}^{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \sum_{\sigma=1}^2 D_{l,m,k,n}^\sigma z_{lm}^\sigma = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, L_0; n = 1, 2, \dots, N_0; \sigma = 1, 2), \quad (35a)$$

$$\frac{Q_{kn} \pi \beta_{k,n}^\sigma}{\alpha_0 Re} z_{kn}^\sigma + \sum_{k=1}^{L_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{l=1}^{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \sum_{\sigma=1}^2 E_{i,j,l,m,k,n}^\sigma x_{ij}^\sigma z_{lm}^\sigma + \sum_{i=1}^{L_0} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{l=1}^{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \sum_{\sigma=1}^2 H_{i,j,l,m,k,n}^\sigma x_{ij}^\sigma x_{lm}^\sigma + \sum_{l=1}^{L_0} \sum_{m=1}^{N_0} \sum_{\sigma=1}^2 T_{l,m,k,n}^\sigma x_{lm}^\sigma = F_{k,n}^\sigma$$

$$(k = 1, 2, \dots, L_0; n = 1, 2, \dots, N_0; \sigma = 1, 2), \quad (35b)$$

其中

$$C_{i,j,l,m,k,n}^\sigma = b_1(\phi_{ij}^\sigma, U_{lm}^\sigma, U_{kn}^\sigma) + b_2(U_{ij}^\sigma, \phi_{lm}^\sigma, U_{kn}^\sigma) - b_2(\phi_{ij}^\sigma, U_{lm}^\sigma, U_{kn}^\sigma),$$

$$D_{l,m,k,n}^\sigma = b_1(\phi_{lm}^\sigma, u_\phi^*, U_{kn}^\sigma) + b_2(u_\phi^*, \phi_{lm}^\sigma, U_{kn}^\sigma) - b_2(\phi_{lm}^\sigma, u_\phi^*, U_{kn}^\sigma),$$

$$E_{i,j,l,m,k,n}^\sigma = b_1(\phi_{ij}^\sigma, \phi_{lm}^\sigma, \phi_{kn}^\sigma) - b_2(\phi_{ij}^\sigma, L^2 \phi_{lm}^\sigma, \phi_{kn}^\sigma) - b_2(L^2 \phi_{ij}^\sigma, \phi_{lm}^\sigma, \phi_{kn}^\sigma),$$

$$\begin{aligned}
 H_{i,j,l,m,k,n}^\sigma &= -2b_2(U_{ij}^\sigma, U_{lm}^\sigma, \phi_{kn}^\sigma), \\
 T_{l,m,k,n}^\sigma &= -2b_2(u_\phi^*, U_{lm}^\sigma, U_{kn}^\sigma) - 2b_2(U_{lm}^\sigma, u_\phi^*, U_{kn}^\sigma), \\
 F_{k,n}^\sigma &= 2b_2(u_\phi^*, u_\phi^*, U_{kn}^\sigma).
 \end{aligned}$$

上述系数函数中大部分为零,下面以

$$U_{ij} = W_{ij}(r)\sin(j\alpha_0 z), \quad \phi_{lm} = w_{lm}(r)\sin(m\alpha_0 z)$$

为例,我们得到如下结论,当取其它特征函数时也有类似的结论(以下省略上标 σ , 证明略)•

定理 3. 1

- 1) 只有当 $m \pm j = \pm n$ 时, $C_{i,j,l,m,k,n}, E_{i,j,l,m,k,n}, H_{i,j,l,m,k,n}$ 才可能不为零;
- 2) $D_{l,m,k,n}, T_{l,m,k,n}, F_{k,n}$ 对任何 l, m, k, n 恒为零•

下面讨论定常的 Navier-Stokes 方程,非奇异解的谱 Galerkin 逼近的存在性、唯一性和收敛性•

$$\text{记 } \Lambda = \left\{ \alpha_{k,n} = \frac{1}{Re} \alpha_{k,n}, \beta_{k,n} = \frac{1}{Re} \beta_{k,n}; k = 1, 2, \dots, L_0; n = 1, 2, \dots, N_0 \right\}.$$

设 Stokes 算子的特征值由小到大排列依次为^[9,10]

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < \lambda_{m+1} < \dots,$$

且 $\lambda_i \in \Lambda, i = 1, 2, \dots, m, \lambda_{m+1} \notin \Lambda$ •

首先给出如下引理•

引理 3. 1 选取适当的 L_0, N_0 , 使得

$$\alpha_{L_0+1} \leq \alpha_{1,N_0+1} \leq \alpha_{L_0+1,1}, \beta_{L_0+1} \leq \beta_{1,N_0+1} \leq \beta_{L_0+1,1}, \tag{36}$$

则

$$\lambda_{m+1} > M_0, \tag{37}$$

$$\text{其中 } M_0 = c_1 L_0^2 + c_2 N_0^2, \quad c_1 = \frac{1}{18Re(\eta^2 - 1)^2}, \quad c_2 = \frac{\alpha_0^2}{2Re}.$$

关于谱 Galerkin 逼近方程(33)、(34)解的存在性、唯一性和收敛性,有如下结论:

定理 3. 2 设 u 是 Navier-Stokes 方程(3)、(4)在定常情形下的非奇异解,则存在 $\varepsilon > 0, L_1, N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $L_0 > L_1, N_0 > N_1$, 且使得(37)成立时,谱 Galerkin 逼近方程(33)、(34)存在唯一解 U, ϕ , 使得 $\|u, u_{L_0, N_0}\| \leq \varepsilon$, 且

$$\|u - u_{L_0, N_0}\| \leq c_1 M_0^{-1/2}, \quad |u - u_{L_0, N_0}| \leq c_2 M_0^{-1}, \tag{38}$$

其中

$$\begin{aligned}
 u_{L_0, N_0} &= \left[-\frac{\partial \phi}{\partial z}, U + u_\phi^*, \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \phi \right], \quad M_0 = c_1 L_0^2 + c_2 N_0^2, \\
 c_1 &= \frac{1}{18Re(\eta^2 - 1)^2}, \quad c_2 = \frac{\alpha_0^2}{2Re}.
 \end{aligned}$$

证明 定理的存在性可由[12]中的关于 Navier-Stokes 方程的非奇异解的谱 Galerkin 逼近的理论得到,误差估计则由引理 3. 1 及[12, 13]得到•

4 算 例

在实际计算中,我们选取 $\eta = 1.14, \omega_2 = 0$, 即考虑外圆柱不动,内圆柱旋转,柱间隙为中间隙的情形• 计算发现,如果选取基函数太少,比如模数为 20 以下,则不可能模拟实际的流动• 如果选取 $L_0 = 20, N_0 = 4$, 即选取 160 个模式,则可以模拟低雷诺数的情形;对于雷诺数

较大, 超过临界雷诺数时, 则有较大误差。

如果选取 $L_0 = 50, N_0 = 4$, 则可以较准确地模拟雷诺数较大时的流动。

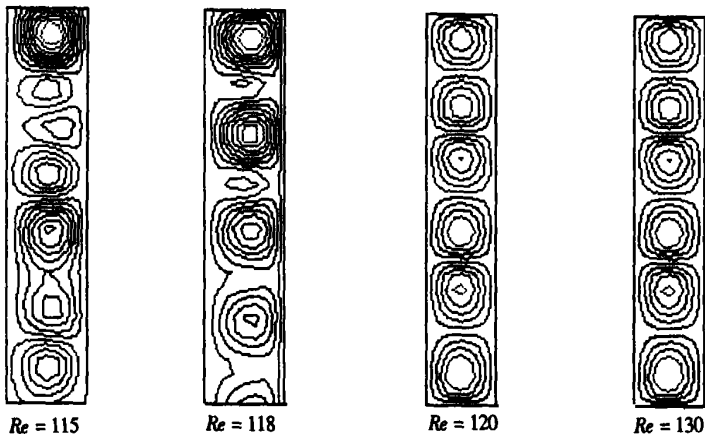


图 1 子午面上流函数等值线

计算结果表明, 当雷诺数较小时, 基本 Couette 流是唯一的、稳定的, 即流体绕圆筒的轴线作水平圆周运动; 当雷诺数增长到某个临界值时 ($Re_c \approx 118$), Couette 流开始不稳定, 并出现新的定常流动, 这种流动是轴对称的, 沿着轴线方向规则地分布着旋涡, 相邻的旋涡是反向的, 称其为 Taylor 涡流; 当雷诺数 Re 继续增大时, Taylor 涡流也失去稳定性, 转变成更为复杂的流动, 直至湍流。图 1 给出了子午面上流函数等值线图 ($L_0 = 50, N_0 = 4$), 计算结果和 Taylor 实验结果^[7] 基本相符。

[参 考 文 献]

- [1] Anderreck C D, Liu S S, Swinney H L. Flow regimes in a circular Couette system with independent rotating cylinders[J]. J Fluid Mech, 1986, **164**(1): 155—183.
- [2] Yasusi Takada. Quasi-periodic state and transition to turbulence in a rotating Couette system[J]. J Fluid Mech, 1999, **389**(1): 81—99.
- [3] Coughlin K T, Marcus P S, Tagg R P, et al. Distinct quasiperiodic modes with like symmetry in a rotating fluid[J]. Phys Rev Lett, 1991, **66**(1): 1161—1164.
- [4] Meincke O, Egbers C. Routes into chaos in small and wide gap Taylor-Couette flow[J]. Phys Chem Earth B, 1999, **24**(5): 467—471.
- [5] Takeda Y, Fischer W E, Sakakibara J. Measurement of energy spectral density of a flow in a rotating Couette system[J]. Phys Rev Lett, 1993, **70**(1): 3569—3571.
- [6] Wimmer M. Experiments on the stability of viscous flow between two concentric rotating spheres[J]. J Fluid Mech, 1980, **103**(1): 117—131.
- [7] Taylor G I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders[J]. Phil Trans Roy Soc London A, 1923, **223**(1): 289—343.
- [8] 李开泰, 黄艾香. 有限元方法及其应用——发展及应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988, 320—321.
- [9] 刘式达, 刘式适. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 1988, 202—203.
- [10] 杨应辰. 数学物理方程 特殊函数[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991, 160—162.
- [11] 萧树铁, 居余马, 李海中. 代数与几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000, 198—199.

- [12] 王立周, 李开泰. Navier-Stokes 方程非奇异解分支的谱 Galerkin 逼近[J]. 计算数学, 2002, 24(1): 39—52.
- [13] Brezzi F, Rappaz J, Raviart P A. Finite dimensional approximation of nonlinear problem—Part I : branches of nonsingular solution[J]. Numer Math, 1980, 36(1): 1—25.

Spectral Galerkin Approximation of Couette-Taylor Flow

WANG He_yuan^{1,2}, LI Kai_tai²

(1. Department of Mathematics and Physics, Liaoning Institute of Technology,

Jinzhou, Liaoning 121001, P. R. China;

2. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract: Axisymmetric Couette-Taylor flow between two concentric rotating cylinders was simulated numerically by the spectral method. First, stream function form of the Navier-Stokes equations which homogeneous boundary condition was given by introducing Couette flow. Second, the analytical expressions of the eigenfunction of the Stokes operator in the cylindrical gap region were given and its orthogonality was proved. The estimates of growth rate of the eigenvalue were presented. Finally, spectral Galerkin approximation of Couette-Taylor flow was discussed by introducing eigenfunctions of Stokes operator as basis of finite dimensional approximate subspaces. The existence, uniqueness and convergence of spectral Galerkin approximation of nonsingular solution for the steady-state Navier-Stokes equations are proved. Moreover, the error estimates are given. Numerical result is presented.

Key words: Navier-Stokes equation; Couette-Taylor flow; spectral approximation; Stokes operator