应用数学和力学，第6卷第5期（1985年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

无共振转向点问题的数值解*

林鹏程　颜鹏翔

（福州大学，1984年3月21日收到）

摘　要

本文用Kellogg[3]的估计方法，证明了 IL'in[1]格式对于无共振转向点问题具有一阶的一致收敛性，并证明了这个估计是最佳的．

一、引　言

研究微分方程边值问题：

$$\begin{cases} L[y]\equiv \varepsilon y''+p(x)y'+g(x)y=f(x) & (-a<x<b) \\ y(-a)=A,\ \ y(b)=B \end{cases}$$

若 $p(x)\neq 0$，那么无论在渐近解方面，在数值解方面都得到较圆满的结果，若 $p(x)$ 存在零点，在渐近解方面已得到了深刻的结果[3,6,8,9,10]，在数值解方面，Kellogg[3]研究了 $p'(x)<0$的情况，得到了一个小于1且依赖于 $p(x)$，$g(x)$ 的误差估计．Farrell[7] 研究了 $p(x)=x\bar{a}$，$g(x)=\bar{b}$ 且$\bar{a}>0$的情况，得到了类似的结果．本文改进了 Kellogg[3] 的证明方法，提高了误差精度，最后，我们还得到一个在数值解方面摄动问题的误差阶与退化问题的误差阶之间的关系，从而证明了所得到的估计是最佳的．

注：文中出现的与 ε 无关的常数都用 c 表示．

二、渐近性态

研究如下问题：

$$\begin{cases} Ly\equiv \varepsilon y''+p(x)y'+g(x)y=f(x) & (-a<x<b) \\ y(-a)=A,\ \ y(b)=B \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1$，$p(0)=0$，$p'(x)<0$，$g(x)\leqslant -\beta<0$．首先，我们有：

定理2.1　若 $Ly\leqslant 0$，$y(x_1)\geqslant 0$，$y(x_2)\geqslant 0$，则$y(x)\geqslant 0$，其中 $x\in[x_1,\ x_2]$．

证明　若 y 在 $x^*\in(x_1,\ x_2)$上取到负的最小值，那么，在 $x=x^*$ 点有：

$$y''\geqslant 0,\ y'=0,\ g(x^*)y>0$$

* 林宗池推荐．

故在 $x=x^*$

$$Ly\equiv\varepsilon y''+p(x)y'+g(x)y\geqslant g(x)y>0$$

与假设矛盾，说明 $y(x)\geqslant 0$。

定理证毕。

推论2.1 若 $|f(x)|\leqslant M$，那么，(2.1) 的解满足：

$$|y|\leqslant\max\{|A|,\ |B|\}+\frac{1}{\beta}M$$

这个推论可直接利用定理 2.1 得到。

由[2]中的引理 2.3 及本文的推论 2.1，这就可以推出：

引理2.2 $\left|\frac{d^j}{dx^j}y(\pm\eta)\right|\leqslant c\quad(j=1,\ 2,\ \cdots)$

而 η 为满足 $0<\eta<\min\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$ 的任意常数。

引理2.3 $\left|\frac{d^j}{dx^j}\ y(x)\right|\leqslant c\qquad x\in[-\eta,\ \eta]$

证明 设 $z_j(x)=\frac{d^j}{dx^j}y(x)$，对(2.1)两边进行微分 j 次，则有：

$$\begin{cases}\varepsilon z_j''(x)+p(x)z_j'(x)+(g(x)+p'(x))z_j(x)=f_j(x)-\sum\limits_{v=0}^{j-1}A_{j,v}z_v(x)\\ |z_j(\pm\eta)|\leqslant c\end{cases}$$

其中，$f_j=\frac{d^j}{dx^j}f(x)$，$A_{j,v}=\binom{j}{v-1}p_{j+1-v}-\binom{j}{v}g_{j-v}$。

因为 $p'<0$，由归纳法并利用推论 2.1，有 $|z_j(x)|\leqslant c$。

引理证毕。

利用引理 2.3 及[2]中引理2.4，就有：

定理2.2 若 η 为上述常数，且 $|p(x)|>a$，$x\in[-a,\ -\eta]\cup[\eta,\ b]$，$y(x)$ 为 (2.1) 的解，那么 $y(x)$ 具有下述性态：

$$y(x)=\begin{cases}r_1\exp[-p(-a)(x+a)\varepsilon^{-1}]+z^{(1)}(x) & x\in[-a,\ -\eta]\\ y(x) & x\in[-\eta,\ \eta]\\ r_2\exp[p(b)(b-x)\varepsilon^{-1}]+z^{(2)}(x) & x\in[\eta,\ b]\end{cases}$$

这里，$|r_j|\leqslant c\quad(j=1,\ 2)$，而

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}z^{(1)}(x)\right|\leqslant c(\varepsilon^{1-j}\exp[-a\varepsilon^{-1}(x+a)]+1)\qquad x\in[-a,\ -\eta]$$

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}z^{(2)}(x)\right|\leqslant c(\varepsilon^{1-j}\exp[-a\varepsilon^{-1}(b-x)]+1)\qquad x\in[\eta,\ b]$$

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}\ y(x)\right|\leqslant c\qquad\qquad x\in[-\zeta,\ \zeta]$$

若我们设 w_0 满足方程：

$$p(x)w_0'+g(x)w_0=f(x)$$

那么，利用[4]，即可得到：

定理2.3 设

$$\tilde{y}(x)=w_0(x)+\begin{cases}(\psi_0^{(1)}(x)+\varepsilon\psi_1^{(1)}(x))\exp\left[-\varepsilon^{-1}\int_{-a}^{x}p(s)ds\right] & (-a\leqslant x\leqslant 0)\\ (\psi_0^{(2)}(x)+\varepsilon\psi_1^{(2)}(x))\exp\left[-\varepsilon^{-1}\int_{x}^{b}p(s)ds\right] & (0\leqslant x\leqslant b)\end{cases}$$

其中 $\psi_i^{(j)}(x)(i=0,\ 1;\ j=1,\ 2)$ 为无限次可微函数，且 $w_0(-a)+\psi_0^{(1)}(-a)=A$， $w_0(b)+\psi_0^{(2)}(b)=B$。

则 $$|\tilde{y}(x)-y(x)|\leqslant c\varepsilon$$

三、差 分 逼 近

把$[-a,\ b]$ N等分，设步长为h，引进记号：

$$D_+u_i=(u_{i+1}-u_i)/h,\qquad D_-u_i=(u_i-u_{i-1})/h$$
$$D_0u_i=(u_{i+1}-u_{i-1})/2h,\qquad D_+D_-u_i=(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})/h^2$$
$$\rho=h/\varepsilon$$

对于微分问题(2.1)，若用带拟合因子$\sigma_i(\rho)$的差分格式：

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon\sigma_i(\rho)D_+D_-y_i+p(x_i)D_0y_i+g(x_i)y_i=f(x_i)\\ y_0=A,\quad y_N=B\qquad(i=1,\ \cdots,\ N-1)\end{array}\right\}\tag{3.1}$$

来逼近，那么有如下结论：

定理3.1 设(3.1)的解关于ε一致地收敛于(2.1)的解，又设$\rho=\dfrac{h}{\varepsilon}$、$n$（非负整数）为确定值，则当$h\to 0$时有：

$$\sigma_n(\rho)=\frac{1}{2}\rho p(-a)\coth\left(\frac{1}{2}\rho p(-a)\right)+\rho o(1)$$

$$\sigma_{N-n}(\rho)=\frac{1}{2}\rho p(b)\coth\left(\frac{1}{2}\rho p(b)\right)+\rho o(1)$$

证明 当ρ，n为确定值时，由定理2.3，有：

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}y(-a+nh)&=\lim_{h\to 0}\{w_0(-a+nh)+(\psi_0^{(1)}(-a+nh)\\&\quad+\varepsilon\psi_1^{(1)}(-a+nh))\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{-a+nh}p(s)ds\right]\}\\&=w_0(-a)+\psi_0^{(1)}(-a)\exp[-n\rho p(-a)]\end{aligned}\tag{3.2}$$

而由(3.1)得到：

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sigma_n(\rho)}{\rho}(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1})+\frac{1}{2}p(-a+nh)(y_{n+1}-y_{n-1})\right]=0$$

由于y_n关于ε一致地收敛于$y(-a+nh)$，从而在上式中以(3.2)式代入：

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sigma_n(\rho)}{\rho}[y(-a+(n+1)h)-2y(-a+nh)+y(-a+(n-1)h)]\right.$$

$$+\frac{1}{2}p(-a)[y(-a+(n+1)h)-y(-a+(n-1)h)]\Big\}=0$$

即：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma_n(\rho)}{\rho}=\frac{1}{2}p(-a)\coth\left[\frac{1}{2}\rho p(-a)\right]$$

同理可以证明第二式。

定理证毕。

因此，我们自然地选取$\sigma_i=\frac{1}{2}\rho p(x_i)\coth\left(\frac{1}{2}\rho p(x_i)\right)$，若$x_{i_0}=0$，那么取极限值$\sigma_{i_0}=1$，即(3.1)式为著名的IL'in格式：

$$L_h y_i=\frac{1}{2}p_i h\left(\coth\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)\right)D_+D_-y_i+p_iD_0y_i+g_iy_i=f_i \tag{3.3}$$

这里，$p_i=p(x_i)$，$g_i=g(x_i)$，$f_i=f(x_i)$。

对于差分算子L_h，有下列性质：

引理3.1 若u为网格函数，且$u_0\geqslant 0$，$u_N\geqslant 0$，$L_hu_i\leqslant 0$ $(i=1\cdots N_{-1})$，则$u_i\geqslant 0$，$0\leqslant i\leqslant N$。

证明 u满足：

$$A(u_1,\cdots,u_{N-1})^T=\left(-\frac{p_1}{2h}\left(\coth\left(\frac{p_1h}{2\varepsilon}\right)-1\right)u_0+L_hu_1,\ L_hu_2\cdots L_hu_{N-2},\right.$$

$$\left.-\frac{p_{N-1}}{2h}\left(\coth\left(\frac{p_{N-1}h}{2\varepsilon}\right)-1\right)u_N+L_hu_{N-1}\right)^T \tag{3.4}$$

A为三对角阵$[a_{i,i-1},\ a_{i,i},\ a_{i,i+1}]$：

$$a_{i,i-1}=\frac{p_i}{2h}\left(\coth\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)-1\right)\qquad(i=2,\cdots,N-1)$$

$$a_{i,i}=-\frac{p_i}{2h}\left(\coth\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)-1\right)\qquad(i=1,\cdots,N-1)$$

$$a_{i,i+1}=\frac{p_i}{2h}\left(\coth\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)+1\right)\qquad(i=1,\cdots,N-2)$$

因此，$a_{i,j}>0(i\neq j)$，$a_{i,i}<0$，且$\sum_{j=1}^{N-1}a_{i,j}<0$，故由[11]，即有$A^{-1}\leqslant 0$，而(3.4)的右端向量为非正，即有$u_i\geqslant 0$，$0\leqslant i\leqslant N$。

引理证毕。

直接计算有：

引理3.2 $L_h[1]\leqslant -\beta$。

定理3.2 设y_i为(3.1)的解，$y(x_i)$为(2.1)的解，则$|y_i-y(x_i)|\leqslant ch$。

证明 我们分段估计：$|\tau_i|=|L_hy_i-L_hy(x_i)|$。在$[-a,\ -\eta]$上，设

$$L_hv_i^{(1)}=L\exp[-p(-a)\varepsilon^{-1}(x_i+a)]=Lv^{[1]}(x_i)$$

那么：

$$Lv^{(1)}(x)=\varepsilon^{-1}p(-a)[p(-a)-p(x)]v^{(1)}(x)+g(x)v^{(1)}(x)$$

$$L_hv^{(1)}(x)=\frac{2p(x)\sinh\left(\frac{1}{2}p(-a)h\varepsilon^{-1}\right)\sinh\left(\frac{\rho}{2}(p(-a)-p(x))\right)}{h\sinh\left(\frac{1}{2}p(x)h\varepsilon^{-1}\right)}v^{(1)}(x)$$

$$+g(x)v^{(1)}(x)$$

故

$$|L_hv^{(1)}(x)-Lv^{(1)}(x)|\leqslant c\frac{h}{\varepsilon}\exp[-\alpha(x+a)\varepsilon^{-1}]$$

而设：

$L_hz_i^{(1)}=Lz^{(1)}(x_i)$，那么

$$|L_hz^{(1)}(x_i)-Lz^{(1)}(x_i)|\leqslant c\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left(\varepsilon\left|\frac{d^3z^{(1)}(x)}{dx^3}\right|+\left|\frac{d^2z^{(1)}(x)}{dx^2}\right|\right)dx$$

$$\leqslant c\left(h+\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(t+a)]dt\right)$$

$$\leqslant c\{h+(\sinh(\alpha\rho))\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(x_i+a)]\}$$

结合上面的估计，即有：

$$|\tau_i|\leqslant c\left\{\left(\frac{h}{\varepsilon}+\sinh(\alpha h\varepsilon^{-1})\right)\exp[-\alpha(x_i+a)\varepsilon^{-1}]+h\right\}\qquad(-a\leqslant x_i\leqslant-\eta)$$

而在$[-\eta,\ \eta]$上，由$\left|\frac{d^j}{dx^j}y(x)\right|\leqslant c$，得：

$$|\tau_i|\leqslant c\left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left(\varepsilon\left|\frac{d^3}{dx^3}y(x)\right|+\left|\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right|\right)dx\leqslant ch\right.$$

类似的证明可以得到$[\eta,\ b]$上的估计为：

$$|\tau_i|\leqslant c\left\{\left(\frac{h}{\varepsilon}+\sinh(\alpha h\varepsilon^{-1})\right)\exp[-\alpha(b-x_i)\varepsilon^{-1}]+h\right\}$$

由于

$$L_h[\exp[-\alpha(x_i+a)\varepsilon^{-1}]]\leqslant-\frac{c}{\varepsilon}\exp[-\alpha(x_i+a)\varepsilon^{-1}]\qquad(-a\leqslant x_i\leqslant-\eta)$$

$$L_h[\exp[-\alpha(b-x_i)\varepsilon^{-1}]]\leqslant-\frac{c}{\varepsilon}\exp[-\alpha(b-x_i)\varepsilon^{-1}]\qquad(\eta\leqslant x_i\leqslant b)$$

这里的$c>0$，及引理 3.2，可以选取闸函数：

$$\psi_i=c\begin{cases}(h+\varepsilon\sinh(\alpha\rho))\exp(-\alpha(x_i+a)\varepsilon^{-1})+h & (-a\leqslant x_i\leqslant-\eta)\\ h & (-\eta\leqslant x_i\leqslant\eta)\\ (h+\varepsilon\sinh(\alpha\rho))\exp(-\alpha(x_i+a)\varepsilon^{-1})+h & (\eta\leqslant x_i\leqslant b)\end{cases}$$

满足：

$$L_h(\psi_i\pm\tau_i)\leqslant0$$

由引理 3.1，即得到：

$$|\tau_i| \leqslant \psi_i \leqslant ch$$

定理证毕。

已经有许多用 IL'in 格式解具有转向点问题的数值例子([5], [7]), 计算结果是令人满意的。

附 录

引理2.2的证明

考虑方程:

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) & (\eta \leqslant x \leqslant b) \\ y(\eta)\text{假设给定}, \ y(b) = B \end{cases}$$

化为等价的形式:

$$\begin{cases} -\varepsilon y'' + (-p(x)y') = -f(x) + g(x)y = h(x), & (\eta \leqslant x \leqslant b) \\ y(\eta), \ y(b) = B \end{cases}$$

由推论(2.1), 有$|y(\eta)| \leqslant c$.

引理1 $|y^{(i)}(b)| \leqslant c$.

证明 设$P(x)$为 $-p(x)$的一个不定积分, 则我们得到:

$$y(x) = y_p(x) + k_1 + k_2 \int_x^b \exp[-\varepsilon^{-1}(P(b) - P(t))]dt \qquad (\eta \leqslant x \leqslant b)$$

此处: $$y_p(x) = -\int_x^b z(t)dt$$

$$z(x) = \int_x^b \varepsilon^{-1} h(t) \exp[-\varepsilon^{-1}(P(t) - P(x))]dt$$

利用不等式:

$$\exp[-\varepsilon^{-1}(P(t) - P(x))] \leqslant \exp[-a\varepsilon^{-1}(t - x)] \qquad (t \geqslant x)$$

又由推论2.1, 即有$|h(x)| = |g(x)y - f(x)| \leqslant c$

从而

$$|z(x)| \leqslant \left| \int_x^b \varepsilon^{-1} h(t) \exp[-a\varepsilon^{-1}(t - x)]dt \right|$$

$$\leqslant c \left| \int_x^b \varepsilon^{-1} \exp[-a(t - x)\varepsilon^{-1}]dt \right| \leqslant c$$

因此 $|y_p(x)| \leqslant c$.

而常数 k_1 和 k_2 必须满足:

$$k_1 + k_2 \int_\eta^b \exp[-\varepsilon^{-1}(P(b) - P(t))]dt = y(\eta) - y_p(\eta)$$

$$k_1 = B$$

因为 $p(x)$在$[-a, b]$上有界, $P(b) - P(t) \leqslant c(b - t)$, 因此:

$$\int_\eta^b \exp[-\varepsilon^{-1}(P(b) - P(t))]dt \geqslant c\varepsilon \qquad (c > 0)$$

我们即发现 $k_2 \leqslant c\varepsilon^{-1}$, 因此$|y'(b)| = |k_2| \leqslant c\varepsilon^{-1}$, 故当 $i = 1$ 时引理成立, 如果 $i > 1$, 可以通过归纳法及重复微分方程(2.1)而得到引理 1 的结果,

引理2 $|y^{(i)}(x)|\leqslant c(1+\varepsilon^{-i}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(b-x)])$

证明 用归纳法证明．由引理1，不等式当 $i=0$ 时成立．对方程（2.1）两边进行微分 $i-1$ 次，设 $z=y^{(i)}$，则我们得到：

$$-\varepsilon z'+(-p(x))z=h(x)$$

其中 $h(x)$ 仅依赖于 y，p，f 及它们直到 $i-1$ 阶的导数，由归纳法假设：

$$|h(x)|\leqslant c\{1+\varepsilon^{-i+1}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(b-x)]\}$$

设 P 是 $-p$ 的一个不定积分，则：

$$z(x)=z(b)\exp[-\varepsilon^{-1}(P(b)-P(x))]$$
$$+\varepsilon^{-1}\int_x^b h(t)\exp[-\varepsilon^{-1}(P(t)-P(x))]dt$$

由引理1及归纳法假设：

$$|z(x)|\leqslant c\varepsilon^{-i}\exp[-\varepsilon^{-1}(b-x)]$$
$$+c\varepsilon^{-1}\int_x^b(1+\varepsilon^{-i+1}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(b-t)])\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(b-t)]dt$$
$$\leqslant c(1+\varepsilon^{-i}\exp[-\varepsilon^{-1}(b-x)])$$

引理证毕．

我们若以 $x=\eta$ 代入引理2，则有：

$$|y^{(j)}(\eta)|\leqslant c(1+\varepsilon^{-j}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(b-\eta)])\leqslant c,\quad (c\text{与}\eta\text{有关，但与}\varepsilon\text{无关})$$

同理可以证明 $|y^{(j)}(-\eta)|\leqslant c$．

故有： $|y^{(j)}(\pm\eta)|\leqslant c \qquad (j=0,1,2,\cdots)$

引理证毕．

参 考 文 献

[1] IL'in, A.M., Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Mat. Zametiki.*, **6** (1969), 237—248.

[2] Kellogg, R. B. and A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning point, *Math. Comp.*, **32**(1978), 1025—1039.

[3] Kellogg, R. B., *Difference Approximation for a Singular Perturbation Problem with Turning Points, Analysis and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis*, S. Axelsson, L. S. Frank, V. Slusis(eds), North-Holland Publishing Company (1981), 133—139.

[4] Jiang Furu., On boundary value problems for a class of ordinary differential equations with turning points, *App. Math. Mech.*, **1**, 2(1978), 201—213.

[5] Doolan, E. P., J. J. H. Miller, and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems With Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[6] Ackerberg, R. C. and R. E. O'Malley, Boundary layer problem exhibiting resonance, *Studies in Appl Math*, **49**, 3(1970), 277—295.

[7] Farrell, P. A., A uniformly convergent difference scheme for turning point problems, The First Conference on Boundary and Interior Layers-computation and Asymptotic Methods, Dublin, Ireland, Jan. 14—18(1982).

[8] Lakin, W. D., Boundary value problems with a turning point, *Studies in Appl. Math*, **51**, 3(1972)261—275.

[9] O'Malley, R. E., *Introduction to Singular Perturbations*, Acad. Press, New York and London (1974).

[10] Cook, L. P. and W. Eckhaus, Resonance in a boundary value problem of singular perturbation type, *Studies in Appl. Math*, 52, 2(1973), 129—139.

[11] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962).

The Numerical Solution for Problems of Turning Point Without Resonance

Lin Peng-cheng Yan Peng-xiang

(*Fuzou University, Fujian*)

Abstract

In this paper the uniform covergence of IL'in scheme to the turning point problems without resonance is proved by means of Kellogg's method. The given estimation is shown to be optimal.