

静止裂纹尖端的理想塑性应力场*

林 拜 松

(中南矿冶学院, 1984年6月4日收到)

摘 要

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是 θ 的函数的假设下, 利用平衡方程和屈服条件, 本文导出了裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式. 将这些一般解析表达式用于具体裂纹, 我们就得到 I 型, II 型, III 型及 I-III 复合型裂纹尖端的理想塑性应力场.

一、前 言

关于静止裂纹尖端的理想塑性应力场问题, Hutchinson^[1]、Shih^[2]及 Hult 和 McClintock^[3]曾进行过研究. 但是, 他们都未对静止裂纹尖端的理想塑性应力场作过全面而完整的论述. 另外, 平面应力下 II 型裂纹和 I-III 复合型裂纹尖端的理想塑性应力场在文献中未给出. 为此, 本文提出一个很简单的方法来解决上述问题.

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是 θ 的函数的假设下, 利用平衡方程和屈服条件, 本文导出了裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式. 将这些一般解析表达式用于具体裂纹, 我们就得到 I 型、II 型、III 型及 I-III 复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式. 本文的一些结果与文献[1,2,3]中的对应结果相同, 这就证明了本文的方法是正确的.

二、反平面剪切

将极坐标系 (r, θ) 的原点放在裂纹的尖点 O 上, 如图1所示.

对于反平面剪切情形, 设剪应力分量 τ_r 和 τ_θ 都只是 θ 的函数, 于是, 平衡方程变成:

$$\frac{d\tau_\theta}{d\theta} + \tau_r = 0 \quad (2.1)$$

而屈服条件为:

$$\tau_r^2 + \tau_\theta^2 = k^2 \quad (2.2)$$

其中 k 为材料的剪切屈服极限.

利用(2.1)和(2.2), 我们导出 III 型裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式

* 钱伟长推荐.

为:

$$\tau_{\theta} = \pm k, \quad \tau_r = 0 \quad (2.3)$$

和

$$\tau_r = a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta, \quad \tau_{\theta} = a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta \quad (2.4)$$

其中 a_1 和 a_2 为积分常数.

将 (2.3) 和 (2.4) 直接用于 III 型裂纹, 我们就得到 III 型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式为:

$$(1) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \tau_r = 0, \quad \tau_{\theta} = k \quad (2.5)$$

$$(2) \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi \quad \tau_r = -k \cos \theta, \quad \tau_{\theta} = k \sin \theta \quad (2.6)$$

该结果与 [3] 的相同.

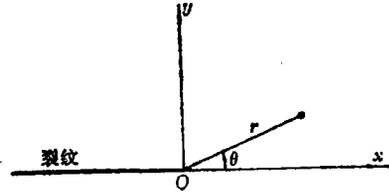


图 1

三、平面应变

假设裂纹尖端的正应力分量 σ_r 、 σ_{θ} 和剪应力分量 $\tau_{r\theta}$ 都只是 θ 的函数, 则平衡方程变成:

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} + \sigma_r - \sigma_{\theta} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\theta}}{d\theta} + 2\tau_{r\theta} = 0 \quad (3.1)$$

而平面应变屈服条件为:

$$(\sigma_r - \sigma_{\theta})^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2 \quad (3.2)$$

利用 (3.1) 和 (3.2), 我们导出平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式为:

$$\tau_{r\theta} = \pm k, \quad \sigma_r = \sigma_{\theta} = b_1 \mp 2k(\theta - \theta_0) \quad (3.3)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= b_2 \sin 2(\theta - \theta_0) + b_3 \cos 2(\theta - \theta_0) \\ \sigma_r &= -b_2 \cos 2(\theta - \theta_0) + b_3 \sin 2(\theta - \theta_0) + b_4 \\ \sigma_{\theta} &= b_2 \cos 2(\theta - \theta_0) - b_3 \sin 2(\theta - \theta_0) + b_4 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

这里, b_i ($i=1, 2, 3, 4$) 为积分常数, θ_0 为待定常数.

若平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场存在着径向的应力间断线, 则有^[2]:

$$\sigma_{\theta}^+ = \sigma_{\theta}^-, \quad \tau_{r\theta}^+ = \tau_{r\theta}^-, \quad \sigma_r^+ - \sigma_r^- = 4\sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2} \quad (3.5)$$

从式 (3.3) ~ (3.5) 容易看出, 径向间断线只能出现在应力区 (3.4) 中, 而应力区 (3.3) 中的应力分量 σ_r 、 σ_{θ} 、 $\tau_{r\theta}$ 都是连续的.

将 (3.3) 和 (3.4) 用于 I 型裂纹、II 型裂纹及 I-II 复合型裂纹, 我们就可以导出这些裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式. 结果表示如下:

(1) I 型裂纹 I 型裂纹尖端的理想塑性应力场为:

$$1) \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad \tau_{r\theta} = k \sin 2\theta, \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{\theta} \\ \sigma_r \end{aligned} \right\} = k(1 + \pi \pm \cos 2\theta) \quad (3.6a)$$

$$2) \quad \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, \quad \tau_{r\theta} = k, \quad \sigma_r = \sigma_{\theta} = k \left[1 - 2 \left(\theta - \frac{3\pi}{4} \right) \right] \quad (3.6b)$$

$$3) \quad 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi, \quad \tau_{r\theta} = -k \sin 2\theta, \quad \left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = k(1 \pm \cos 2\theta) \quad (3.6c)$$

当 $k = \sigma_s / \sqrt{3}$ 时, 本结果与 [1] 的相同, 但 [1] 未给出解析表达式 (3.6). σ_s 是材料的屈服强度.

(2) I 型裂纹 I 型裂纹尖端的理想塑性应力场为:

$$1) \quad 0 \leq \theta \leq (\pi+2)/8, \quad \tau_{r\theta} = k, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -2k\theta \quad (3.7a)$$

$$2) \quad (\pi+2)/8 \leq \theta \leq (5\pi+2)/8, \quad \tau_{r\theta} = -k \cos 2\left(\theta - \frac{5\pi+2}{8}\right),$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \mp k \sin 2\left(\theta - \frac{5\pi+2}{8}\right) - \frac{\pi+2}{4} k \quad (3.7b)$$

$$3) \quad (5\pi+2)/8 \leq \theta \leq 3\pi/4, \quad \tau_{r\theta} = -k, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -k \left[1 + 2\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) \right] \quad (3.7c)$$

$$4) \quad 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi, \quad \tau_{r\theta} = k \sin 2\theta, \quad \left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = -k(1 \pm \cos 2\theta) \quad (3.7d)$$

该应力场 ($k = \sigma_s / \sqrt{3}$) 与 [1] 的相同, 但 [1] 未给出 (3.7b).

(3) I-II 复合型裂纹 I-II 复合型裂纹尖端的理想塑性应力场为:

第一种: 间断应力场

该应力场由六个应力区组成, 径向线 $\theta = \pi - \alpha$ 是应力间断线.

$$1) \quad -\pi \leq \theta \leq -3\pi/4, \quad \tau_{r\theta} = -k \sin 2\theta, \quad \left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = k(1 \pm \cos 2\theta) \quad (3.8a)$$

$$2) \quad -3\pi/4 \leq \theta \leq -\frac{\pi}{4} + \delta, \quad \tau_{r\theta} = -k, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = k \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta \right) \quad (3.8b)$$

$$3) \quad -\frac{\pi}{4} + \delta \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} + \delta, \quad \tau_{r\theta} = k \sin 2(\theta - \delta),$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = k[(1 + \pi + 2\delta) \mp \cos 2(\theta - \delta)] \quad (3.8c)$$

$$4) \quad \frac{\pi}{4} + \delta \leq \theta \leq 3\pi/4 + \gamma, \quad \tau_{r\theta} = k, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = k \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta + 4\delta \right) \quad (3.8d)$$

$$5) \quad 3\pi/4 + \gamma \leq \theta \leq \pi - \alpha, \quad \tau_{r\theta} = k \sin 2(\gamma - \theta)$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = [(1 + 4\delta - 2\gamma) \pm \cos 2(\gamma - \theta)] \quad (3.8e)$$

$$6) \quad \pi - \alpha \leq \theta \leq \pi, \quad \tau_{r\theta} = k \sin 2\theta, \quad \left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = -k(1 \pm \cos 2\theta) \quad (3.8f)$$

其中

$$\gamma = -2\alpha, \quad \delta = -\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{2} \quad (3.9)$$

从式 (3.8c) 得到裂纹线上的剪应力 $\tau_{r\theta}(0)$ 与角 δ 的关系为:

$$\tau_{r\theta}(0) = -k \sin 2\delta \quad (3.10)$$

当 $\tau_{r\theta}(0)=0$ 时, 我们有

$$\delta=\gamma=\alpha=0 \quad (3.11)$$

于是式(3.8)表示的应力场就变成 I 型裂纹尖端的理想塑性应力场(3.6)。所以, 间断应力场(3.8)是 I 型应力为主的 I-II 复合型裂纹尖端的理想塑性应力场。 δ 表示 I-II 复合型裂纹尖端的应力场偏离 I 型裂纹尖端的应力场的程度, 而应力间断正是由这种偏离产生的。

当 $k=\sigma_s/\sqrt{3}$ 时, 式(3.8)与文献[2]的相同。

第二种: 连续应力场

该应力场由七个应力区组成, 没有应力间断。

$$1) \quad -\pi \leq \theta \leq -3\pi/4, \quad \tau_{r\theta} = -k \sin 2\theta, \quad \left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = k(1 \pm \cos 2\theta) \quad (3.12a)$$

$$2) \quad -3\pi/4 \leq \theta \leq \theta_2', \quad \tau_{r\theta} = -k, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = k \left[1 + 2 \left(\frac{3\pi}{4} + \theta \right) \right] \quad (3.12b)$$

$$3) \quad \theta_2' \leq \theta \leq \theta_1', \quad \tau_{r\theta} = -k \cos 2(\theta - \theta_2'),$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = k \left[1 + 2 \left(\frac{3\pi}{4} + \theta_2' \right) \right] \mp k \sin 2(\theta - \theta_2') \quad (3.12c)$$

$$4) \quad \theta_1' \leq \theta \leq \theta_1$$

$$\tau_{r\theta} = k, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -k \left[1 + 2 \left(\frac{3\pi}{4} - \theta_2 \right) \right] - 2k(\theta - \theta_1) \quad (3.12d)$$

$$5) \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \tau_{r\theta} = -k \cos 2(\theta - \theta_2),$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = -k \left[1 + 2 \left(\frac{3\pi}{4} - \theta_2 \right) \right] \mp k \sin 2(\theta - \theta_2) \quad (3.12e)$$

$$6) \quad \theta_2 \leq \theta \leq 3\pi/4, \quad \tau_{r\theta} = -k, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -k \left[1 + 2 \left(\frac{3\pi}{4} - \theta \right) \right] \quad (3.12f)$$

$$7) \quad 3\pi/4 \leq \theta \leq \pi, \quad \tau_{r\theta} = k \sin 2\theta, \quad \left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = -k(1 \pm \cos 2\theta) \quad (3.12g)$$

其中

$$\left. \begin{matrix} \theta_2 \\ \theta_2' \end{matrix} \right\} = \pm \frac{5\pi + 2}{8} + \frac{\sigma_r(0)}{4k}, \quad \left. \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_1' \end{matrix} \right\} = \pm \frac{\pi + 2}{8} + \frac{\sigma_r(0)}{4k} \quad (3.13)$$

$\sigma_r(0)$ 是裂纹线($\theta=0$)上的径向正应力。

由式(3.13)容易看出, 当 $\sigma_r(0)=0$ 时, $\theta_1 = -\theta_1' = (\pi+2)/8$, $\theta_2 = -\theta_2' = (5\pi+2)/8$, 从而式(3.12)就变成 II 型裂纹尖端的理想塑性应力场(3.7)。所以, 连续应力场(3.12)是 II 型应力为主的 I-II 复合型裂纹尖端的理想塑性应力场。 $\sigma_r(0)$ 表示 I-II 复合型裂纹尖端的应力场偏离 II 型裂纹尖端的应力场的程度。式(3.12)~(3.13)文献[2]未给出。

四、平面应力

对于平面应力情形, Mises 屈服条件为:

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2 = \sigma_s^2 \quad (4.1)$$

利用式 (3.1) 和 (4.1), 我们得到平面应力裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= c_1 \sin(\theta - \theta_0) + c_2 \cos(\theta - \theta_0) \\ \sigma_\theta &= 2\sigma_r = 2c_1 \cos(\theta - \theta_0) - 2c_2 \sin(\theta - \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= c_3 \sin 2(\theta - \theta_0) + c_4 \cos 2(\theta - \theta_0) \\ \sigma_r &= -c_3 \cos 2(\theta - \theta_0) + c_4 \sin 2(\theta - \theta_0) + c_5 \\ \sigma_\theta &= c_3 \cos 2(\theta - \theta_0) - c_4 \sin 2(\theta - \theta_0) + c_5 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

这里 $c_i (i=1, \dots, 5)$ 是积分常数, θ_0 是待定常数.

若平面应力裂纹尖端的理想塑性应力场存在着径向的应力间断线, 则有^[1]:

$$\sigma_\theta^+ = \sigma_\theta^-, \quad \tau_{r\theta}^+ = \tau_{r\theta}^-, \quad \sigma_r^+ - \sigma_r^- = (4\sigma_\theta^2 - 3\sigma_r^2 - 12\tau_{r\theta}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

从 (4.2) ~ (4.4) 容易看出, 径向应力间断线只能出现在应力区 (4.3) 中.

将 (4.2) 和 (4.3) 用于 I 型裂纹, II 型裂纹及 I-II 复合型裂纹, 我们就可以导出这些裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式. 结果表示如下:

(1) I 型裂纹 I 型裂纹尖端的理想塑性应力场为:

1) $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_\theta = 2\sigma_r = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \cos \theta \quad (4.5a)$$

2) $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_s}{4} (1 + \cos 2\theta_2) \sin 2(\theta - \theta_2) + \frac{\sigma_s}{2} \sin 2\theta_2 \cos 2(\theta - \theta_2) \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= \frac{\sigma_s}{4} (-1 + 3 \cos 2\theta_2) \pm \frac{\sigma_s}{4} (1 + \cos 2\theta_2) \cos 2(\theta - \theta_2) \\ &\quad \pm \frac{\sigma_s}{2} \sin 2\theta \sin 2(\theta - \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.5b)$$

3) $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_s}{2} \sin 2\theta, \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = -\frac{\sigma_s}{2} (1 \pm \cos 2\theta) \quad (4.5c)$$

这里 $\theta = \theta_2$ 是应力间断线.

$\theta = \theta_1$ 上的应力连续条件给出确定 θ_1 和 θ_2 的两个方程为:

$$\begin{aligned} (-1 + 3 \cos 2\theta_2) + 3(1 + \cos 2\theta_2) \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \\ + 6 \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (-1 + 3 \cos 2\theta_2) - \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta_2) \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \\ - \frac{1}{2} \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (4.6b)$$

数值计算给出: $\theta_1 = 79.8^\circ$, $\theta_2 = 151.2^\circ$. 该结果与文献[1]的相同.

(2) II 型裂纹 II 型裂纹尖端的理想塑性应力场为:

1) $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$5) \quad -\pi \leq \theta \leq \theta_2'$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_s}{2} (1 \pm \cos 2\theta), \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_s}{2} \sin 2\theta \quad (4.8g)$$

确定 θ_1' 和 θ_2' 的方程与 (4.6) 相同, 但是, 要用 θ_1' 和 θ_2' 分别代替 θ_1 和 θ_2 , 以 $-2\sigma_r(\theta_1')/\sigma_s$ 来代替式 (4.6b) 的右边。

从式 (4.8) 容易看出, 若 $\sigma_r(0)=0$, 则 $\tau_{r\theta}(0)=\sigma_s/\sqrt{3}$, 从而应力场 (4.8) 就变成 II 型裂纹尖端的应力场 (4.7)。所以, 应力场 (4.8) 是 II 型应力为主的 I-II 复合型裂纹尖端的理想塑性应力场。

参 考 文 献

- [1] Hutchinson, J. W., Plastic stress and strain fields at a crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 5(1968), 337—347.
- [2] Shih, C. F., Small-scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems, *Fracture Analysis, ASTM STP*, 560(1974), 187—210.
- [3] Hult, J. A. and F. A. McClintock, Proc. Ninth International Congress, *Appl. Mech.*, 8, 51(1956).

Perfectly Plastic Stress Field at a Stationary Crack Tip

Lin Bai-song

(Central-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha)

Abstract

Under the hypothesis that all the perfectly plastic stress components at a crack tip are the functions of θ only, making use of yield conditions and equilibrium equations, we derive the generally analytical expressions of the perfectly plastic stress field at a crack tip. Applying these generally analytical expressions to the concrete cracks, the analytical expressions of perfectly plastic stress fields at the tips of Mode I, Mode II, Mode III, and Mixed-Mode I-II cracks are obtained.