应用数学和力学，第6卷第5期（1985年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇异摄动问题的一致收敛差分格式

吴启光

（南京大学，1984年2月1日收到）

摘　要

本文给出了奇异摄动问题的一族一致收敛的差分格式．

一、引　言

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon u''(x)+p(x)u'(x)=f(x) \quad (0<x<1) \\ u(0)=A,\ u(1)=B, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$0<\alpha<p(x)<\beta$，α，β为常数，$\varepsilon>0$是小参数，当$\varepsilon=0$时方程(1.1)退化为

$$L_0 v\equiv p(x)v'(x)=f(x) \tag{1.2}$$

相应的定解条件为

$$v(0)=A$$

退化问题在$x=1$处失去一个边界条件，因而(1.1)的解u在$x=1$处产生边界层．

在[1]中我们对一阶导数u'引进了新的差分逼近

$$u_{\tilde{x}}=\frac{(1+\theta)(u_{i+1}-u_i)+(1-\theta)(u_i-u_{i-1})}{2h} \tag{1.3}$$

其中θ是非零参数．

若参数θ满足下列条件

$$\frac{2\varepsilon}{p_i h}-\frac{2\varepsilon}{\alpha h}-1<\theta\leqslant\frac{2\varepsilon}{p_i h}-1 \quad (1\leqslant i\leqslant N-1) \tag{1.4}$$

则有一族一致收敛的差分格式：

$$L_h u_i\equiv-\varepsilon D_+D_-u_i+p_i\frac{(1+\theta)}{2}D_+u_i+p_i\frac{(1-\theta)}{2}D_-u_i=f_i \quad (1\leqslant i\leqslant N-1) \tag{1.5}$$

本文的目的是给出差分格式离散化误差的界，当参数θ满足条件

$$\frac{2\varepsilon}{p_i h}-\mathrm{cth}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)\leqslant\theta\leqslant\frac{2\varepsilon}{p_i h}-1 \quad (1\leqslant i\leqslant N-1) \tag{1.6}$$

时误差的界对于一切$\varepsilon>0$一致有效．

若$\theta=-1$则差分算子就是[2]中的L_h^1。

若$\theta=\frac{2\varepsilon}{p_ih}-\operatorname{cth}\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)$则差分算子就是[2]中的$L_h^3$。

二、几 个 引 理

考虑下列问题

$$\begin{cases}Lu=g(x,\varepsilon)\\u(0)=A,\ u(1)=B\end{cases}\tag{2.1}$$

其中g满足

$$|g^{(i)}(x,\varepsilon)|\leqslant k\{1+\varepsilon^{-i-1}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(1-x)]\}\tag{2.2}$$

如果对于一切$0\leqslant i\leqslant j$，(2.2)式均成立，则称g为(k,j)类函数。

引理1 若g是(k,j)类函数，则(2.1)的解u满足

$$|u^{(i)}(x)|\leqslant c\{1+\varepsilon^{-i}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(1-x)]\}\qquad(0\leqslant i\leqslant j+1)\tag{2.3}$$

其中$c>0$是与ε无关的常数。

证 见[2]

引理2 若u满足(1.1)，则

$$u(x)=r\exp[-p(1)\varepsilon^{-1}(1-x)]+z(x)\tag{2.4}$$

其中$|r|\leqslant c_1$，且

$$|z^{(i)}(x)|\leqslant c_2\{1+\varepsilon^{-i+1}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(1-x)]\}\tag{2.5}$$

$c_1>0$，$c_2>0$是与ε无关的常数。

证 见[2]。

引理3 若非零参数θ满足下列条件

$$\theta\leqslant\frac{2\varepsilon}{p_ih}-1\quad(1\leqslant i\leqslant N-1)\tag{2.6}$$

则系数矩阵是一个不可约的M矩阵，且有正的逆。

证 见[1]。

如果θ满足条件(2.6)，不难验证

引理4 若 $u_0\leqslant v_0$，$u_N\leqslant v_N$，$L_hu_i\leqslant L_hv_i$，$(1\leqslant i\leqslant N-1)$

则 $u_i\leqslant v_i\qquad(1\leqslant i\leqslant N-1)$

引理5 若 $z_i=(1+x_i)\qquad(0\leqslant i\leqslant N)$

则 $L_hz_i\geqslant\alpha$

证 见[1]。

引理6 存在一个仅依赖于$p(x)$的常数$M>0$使得

$$|R_i|\leqslant M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\{\varepsilon|u^{(3)}(s)|+|u^{(2)}(s)|\}ds\tag{2.7}$$

其中$R_i=L_hu(x_i)-Lu(x_i)$，M是不依赖于ε的常数。

证 见[1]。

引理7 若非零参数θ满足下列条件

$$\theta \geqslant \frac{2\varepsilon}{p_i h} - \mathrm{cth}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right) \quad (1 \leqslant i \leqslant N-1) \tag{2.8}$$

则存在一个与ε，h无关的常数$M>0$使得

$$L_h S^{-(N-i)} \geqslant \frac{M}{\max(h,\varepsilon)} S^{-(N-i)} \tag{2.9}$$

其中 $S=\exp\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)$.

证 $L_h S^i = -\varepsilon D_+ D_- S^i + p_i D_0 S^i + \frac{p_i}{2}\theta(D_+ - D_-)S^i$

$$= -\varepsilon h^{-2} S^{i-1}(S-1)^2 + \frac{p_i}{2h} S^{i-1}(S^2-1) + \frac{p_i}{2h}\theta S^{i-1}(S-1)^2$$

$$= \frac{p_i}{2h} S^{i-1}(S-1)^2 \left\{\theta + \frac{S+1}{S-1} - \frac{2\varepsilon}{p_i h}\right\}$$

$$\geqslant \frac{p_i}{2h} S^{i-1}(S-1)^2 \left\{\frac{S+1}{S-1} - \mathrm{cth}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)\right\}$$

$$= \frac{p_i}{2h} S^{i-1}(S-1)^2 \left\{\frac{\exp\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)+1}{\exp\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)-1} - \mathrm{cth}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)\right\}$$

$$= \frac{p_i}{2h} S^{i-1}(S-1)^2 \left\{\frac{\exp\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)+\exp\left(-\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)}{\exp\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)-\exp\left(-\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)} - \mathrm{cth}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)\right\}$$

$$= \frac{p_i}{2h} S^{i-1}(S-1)^2 \left\{\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)}\right\}$$

$$= \frac{p_i}{2h} S^{i-1}(S-1)^2 \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{(p_i-\alpha)h}{2\varepsilon}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)}$$

若$h \leqslant \varepsilon$，因为$0 \leqslant x \leqslant c$时$c_1 x \leqslant \mathrm{sh}x \leqslant c_2 x$

故有

$$\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{(p_i-\alpha)h}{2\varepsilon}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)} \geqslant \frac{c_1 \frac{(p_i-\alpha)h}{2\varepsilon}}{c_2^2\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right)\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right)} \geqslant c\frac{\varepsilon}{h}$$

$$\frac{(S-1)^2}{S} = (S^{1/2} - S^{-1/2})^2 = 4\mathrm{sh}^2\left(\frac{\alpha h}{2\varepsilon}\right) \geqslant c\frac{h^2}{\varepsilon^2}$$

$$\therefore \quad L_h S^i \geqslant M\frac{S^i}{\varepsilon}$$

若$h\geqslant\varepsilon$，因为$c\leqslant x<\infty$时

$$c_1\exp(x)\leqslant \mathrm{sh}x\leqslant c_2\exp(x)$$

故有

$$\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{(p_i-a)h}{2\varepsilon}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{ah}{2\varepsilon}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)}\geqslant\frac{c_1\exp\left(\frac{p_i-a)h}{2\varepsilon}\right)}{c_2^2\exp\left(\frac{(a+p_i)h}{2\varepsilon}\right)}\geqslant c\exp\left(-\frac{ah}{\varepsilon}\right)$$

因为在这种情形下存在常数$c>0$使得 $S-1\geqslant cS$

$$\therefore\quad L_hS^i\geqslant\frac{p_i}{ah}S^{i-1}(S-1)^2\cdot\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{(p_i-a)h}{2\varepsilon}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{ah}{2\varepsilon}\right)\cdot\mathrm{sh}\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)}\geqslant\frac{M}{h}S^i$$

所以对一切$\varepsilon>0$：我们有

$$L_hS^{-(N-i)}\geqslant\frac{M}{\max(h,\varepsilon)}S^{-(N-i)}$$

引理8

$$|v(x_i)-v_i^h|\leqslant\frac{Mh^2}{(h+\varepsilon)}\qquad（其中M>0与\varepsilon无关）\tag{2.10}$$

证明 因为 $v(x)=\exp[-p(1)\varepsilon^{-1}(1-x)]$

则我们有

$$Lv(x)=-\varepsilon^{-1}p(1)[p(1)-p(x)]v(x)$$

另一方面

$$L_hv(x_i)=-\varepsilon D_+D_-v(x_i)+p(x_i)D_0v(x_i)+\frac{p_i\theta h}{2}D_+D_-v(x_i)$$

$$=-\varepsilon h^{-2}v(x_i)\left\{\exp\left(\frac{p(1)h}{\varepsilon}\right)-2+\exp\left(-\frac{p(1)h}{\varepsilon}\right)\right\}$$

$$+\frac{p_i}{2h}v(x_i)\left\{\exp\left(\frac{p(1)h}{\varepsilon}\right)-\exp\left(-\frac{p(1)h}{\varepsilon}\right)\right\}$$

$$+\frac{p_i\theta}{2h}v(x_i)\left\{\exp\left(\frac{p(1)h}{\varepsilon}\right)-2+\exp\left(-\frac{p(1)h}{\varepsilon}\right)\right\}$$

$$=-\frac{2p_i}{h}v(x_i)\mathrm{sh}\left(\frac{p(1)h}{2\varepsilon}\right)\left\{\left(\frac{2\varepsilon}{p_ih}-\theta\right)\mathrm{sh}\left(\frac{p(1)h}{2\varepsilon}\right)-\mathrm{ch}\left(\frac{p(1)h}{2\varepsilon}\right)\right\}$$

则

$$Lv(x_i)-L_hv(x_i)$$

$$=\frac{2p_i}{h}v(x_i)\mathrm{sh}\left(\frac{p(1)h}{2\varepsilon}\right)\left\{\left(\frac{2\varepsilon}{p_ih}-\theta\right)\mathrm{sh}\left(\frac{p(1)h}{2\varepsilon}\right)-\mathrm{ch}\left(\frac{p(1)h}{2\varepsilon}\right)\right\}$$

$$-\varepsilon^{-1}p(1)[p(1)-p(x_i)]v(x_i)$$

因为

$$\frac{2\varepsilon}{p_ih}-\theta\leqslant\mathrm{cth}\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)$$

我们有

$$|Lv(x_i)-L_hv(x_i)|\leqslant|A|$$

其中

$$A=\frac{2p_i}{h}v(x_i)\frac{F_1\cdot F_2}{F_3}-\varepsilon^{-1}p(1)[p(1)-p(x_i)]v(x_i)$$

利用

$$\operatorname{sh}x=x+\tau;\quad |\tau|\leqslant 2|x^3|\exp(|x|)/(1+x^2)$$

则有

$$F_1=\frac{1}{2}p(1)\frac{h}{\varepsilon}+\tau_1,\qquad |\tau_1|\leqslant\frac{ch^3}{\varepsilon(h^2+\varepsilon^2)}\exp\left(\frac{p(1)h}{2\varepsilon}\right)$$

$$F_2=\frac{h}{2\varepsilon}(p(1)-p(x_i))+\tau_2$$

利用不等式

$$|p(1)-p(x)|\leqslant c(1-x)$$

则有

$$|\tau_2|\leqslant\frac{ch^3(1-x_i)}{\varepsilon(h^2+\varepsilon^2)}\exp\left(c(1-x_i)\frac{h}{\varepsilon}\right)$$

$$F_3=\frac{1}{2}p_i\frac{h}{\varepsilon}+\tau_3;\quad |\tau_3|\leqslant\frac{ch^3}{\varepsilon(h^2+\varepsilon^2)}\exp\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)$$

利用不等式

$$\operatorname{sh}x\geqslant cx(1+x)^{-1}\exp(x)\qquad(x>0)$$

则我们有

$$h^{-1}F_3^{-1}\leqslant ch^{-2}(\varepsilon+h)\exp\left(-\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)$$

由[2]不难验证

$$|v(x_i)-v_i^h|\leqslant\frac{Mh^2}{(h+\varepsilon)}$$

三、误 差 估 计

定理　若参数θ满足下列条件

$$\frac{2\varepsilon}{p_ih}-\operatorname{cth}\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)\leqslant\theta\leqslant\frac{2\varepsilon}{p_ih}-1\qquad(1\leqslant i\leqslant N-1)\tag{3.1}$$

则存在一个与h，ε无关的常数$M>0$使得　$|u(x_i)-u_i^h|\leqslant Mh$　(3.2)

证明　由引理2，我们利用分解

$$u(x)=rv(x)+z(x)$$

令

$$\tau=L_h(z(x_i)-z_i^h)=L_hz(x_i)-Lz(x_i)$$

利用引理 6 得到

$$|\tau|\leqslant M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\{\varepsilon|z^{(3)}(t)|+|z^{(2)}(t)|dt\leqslant M\left\{h+\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(1-t)]dt\right\}$$

$$\leqslant Mh+M\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(1-x_i)]=Mh+M\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)S^{-(N-i)}$$

利用引理5,7和引理4我们有

$$|\tau|\leqslant MhL_h(1+x_i)+M\max(h,\varepsilon)\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)L_hS^{-(N-i)}$$

$$|z(x_i)-z_i^h|\leqslant Mh+M\max(h,\varepsilon)\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)S^{-(N-i)}\leqslant Mh+M\max(h,\varepsilon)\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)S^{-(N-(N-1))}$$

$$=Mh+M\max(h,\varepsilon)\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)\exp\left(-\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)\leqslant Mh+M\max(h,\varepsilon)\left(1-\exp\left(-\frac{2\alpha h}{\varepsilon}\right)\right)$$

若$h\leqslant\varepsilon$，利用不等式

$$1-\exp(-t)\leqslant ct\qquad(t>0)$$

我们有

$$|z(x_i)-z_i^h|\leqslant Mh+M\varepsilon\cdot c\frac{2\alpha h}{\varepsilon}\leqslant Mh$$

若 $h\geqslant\varepsilon$，则

$$|z(x_i)-z_i^h|\leqslant Mh+Mh\left(1-\exp\left(-\frac{2\alpha h}{\varepsilon}\right)\right)\leqslant Mh$$

利用引理 8 我们有

$$|u(x_i)-u_i^h|\leqslant Mh$$

参 考 文 献

[1] 吴启光，奇异摄动问题的加权差分方法，应用数学和力学，5，5(1984)，633—638.

[2] Kellogg, R. Bruce and Alice Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular preturbation problem without turning points, *Math. Comp.*, 32, 144(1978), 1025—1039.

[3] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis*, (1962).

[4] Hemker, P. W., A numerical study of stiff two-point boundary probleme (1977).

Uniformly Convergent Difference Schemes for Singular Perturbation Problem

Wu Chi-kuang

(Nanjing University, Nanjing)

Abstract

In this paper, a class of uniformly convergence difference schemes for singular perturbation problem are given.