

N度对称径向扇回旋加速器的动力学 稳定性及系统的相平面特征*

罗诗裕

(重庆交通学院, 1984年3月3日收到)

摘 要

本文导出了 N 度对称径向扇回旋加速器中粒子的非线性运动方程, 并用数值方法分析了 $N=4, 5, 6, 8, 10$ 等情况下粒子的自由振荡频率及 $\nu_r=4/3$ 共振线前后系统的相平面特征, 讨论了系统的动力学稳定性和非线性效应, 并同文献[1]进行了比较, 结果表明, 当不考虑系统的非线性特征时, 二者完全一致。

一、引 言

N 度对称径向扇回旋加速器, 在中能和低能原子核物理中占有十分重要的地位, 六十年代以来, 受到了人们的普遍重视。

N 度对称径向扇回旋加速器, 由 N 块扇形磁体对称地安放在一个环面上构成; 线性分析表明^[1], 粒子绕机器一周的平衡轨道由 N 段圆弧(扇区)和 N 段直线(谷区)组成。在硬边近似下, 磁体内部的磁场强度为 B , 外部为零, 在磁体边界上, 粒子受到边缘场的聚焦作用, 保证了轴向运动的稳定性。文献[1]曾在硬边近似下, 从线性运动方程出发, 对粒子的轨道特征进行过数值分析, [2~5]也曾用解析方法, 对它的某些非线性特征作过近似处理。本文试图在硬边近似下, 导出 N 度对称径向扇回旋加速器中粒子的非线性运动方程, 并对粒子的振荡频率及 $\nu_r=4/3$ 共振线前后的相平面特征作一数值分析, 同时还对系统的非线性效应进行详细讨论, 同文献[1]的比较表明, 当不考虑系统的非线性特征时, 二者是完全一致的。

二、运 动 方 程

假设粒子的平衡轨道 $\vec{r}_0(s)$ 是一条平面曲线, 选择与这条轨道相连接的自然坐标系为

$$\vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}, \quad \vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}, \quad \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j} \quad (2.1)$$

由 Frenet 公式^[6], \vec{i} , \vec{j} 和 \vec{k} 对 s 的微商满足

* 许政范推荐。

$$\vec{i}' = \kappa(s)\vec{j}, \quad \vec{j}' = -\kappa(s)\vec{i}, \quad \vec{k}' = 0 \quad (2.2)$$

其中 $\kappa(s) = |\vec{r}_0''(s)|$ (2.3)

是曲线 $\vec{r}_0(s)$ 的曲率, 且定义恒为正值, s 是沿平衡轨道的弧长, 字母右上角的一撇“'”表示对弧长 s 的微商. 在该坐标系中, $\vec{r}(s)$ 可表示为

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0(s) + x\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.4)$$

其中 x 和 z 分别是 $\vec{r}(s)$ 在 \vec{j} 和 \vec{k} 方向上的投影, 则长度元的平方 dl^2 可表示为

$$dl^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du^i du^j = (1+\kappa x)^2 ds^2 + dx^2 + dz^2 \quad (2.5)$$

其中 $ds = du^1, \quad dx = du^2, \quad dz = du^3$ (2.6)

g_{ij} 称为度规系数, 且

$$g_{11} = (1+\kappa x)^2, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.7)$$

任意矢量 \vec{F} 在该坐标系中的散度和旋度为^[6]

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial s} (h_2 h_3 F_s) + \frac{\partial}{\partial x} (h_3 h_1 F_x) + \frac{\partial}{\partial z} (h_1 h_2 F_z) \right] \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} = & \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x} (h_3 F_z) - \frac{\partial}{\partial z} (h_2 F_x) \right] \vec{i} + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial z} (h_1 F_s) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial s} (h_3 F_z) \right] \vec{j} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial s} (h_2 F_x) - \frac{\partial}{\partial x} (h_1 F_s) \right] \vec{k} \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中 $h_1^2 = g_{11}, \quad h_2^2 = g_{22}, \quad h_3^2 = g_{33}$

由式(2.8)和(2.9), 再根据静磁场的麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = 0 \quad (2.10)$$

可分别得到

$$\frac{\partial B_s}{\partial s} + \kappa B_x + (1+\kappa x) \frac{\partial B_x}{\partial x} + (1+\kappa x) \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

$$(1+\kappa x) \frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial s} - (1+\kappa x) \frac{\partial B_s}{\partial x} - \kappa B_s = 0 \quad (2.14)$$

假定磁场具有一个对称平面 $z=0$, 而 $\vec{r}_0(s)$ 又正好位于这个平面内, 则理想磁场 $\vec{B}(s, x, z)$ 将满足如下关系^[7]

$$\left. \frac{\partial^{\xi+\zeta+\eta} B_z(s, x, z)}{\partial x^\xi \partial s^\zeta \partial z^\eta} \right|_{z=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial^{\xi+\zeta} B_{x,s}(s, x, z)}{\partial x^\xi \partial s^\zeta} \right|_{z=0} \equiv 0 \quad (2.15)$$

其中 η 是奇数, ξ 和 ζ 为任意整数 (包括零). 注意到式(2.11)~(2.15), 在 $\vec{r}_0(s)$ 附近, 由多元函数的泰劳展开, 可得磁场强度 $\vec{B}(s, x, z)$ 的三个分量 (取至三次项)

$$B_z(s, x, z) = B_{z_0}(s) \left[1 - n\kappa x + \frac{\kappa^2}{2} m x^2 + \frac{\kappa^2}{2} \left(\frac{n}{1+\kappa x} - m \right) z^2 \right]$$

$$-\frac{\kappa^3}{6}lx^3 + \frac{\kappa^3}{2}\left(1 - \frac{m}{1+\kappa x} - \frac{n}{(1+\kappa x)^2}\right)xz^2 \quad (2.16)$$

$$B_x(s, x, z) = B_{z_0}(s)\kappa \left[-nz + \kappa mxz - \frac{\kappa^2}{2}lx^2z \right. \\ \left. + \frac{\kappa^2}{6}\left(1 - \frac{m}{1+\kappa x} - \frac{n}{(1+\kappa x)^2}\right)z^3 \right] \quad (2.17)$$

$$B_s(s, x, z) = 0 \quad (2.18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} n &= -\frac{1}{\kappa B_{z_0}(s)} \left. \frac{\partial B_z(s, x, z)}{\partial x} \right|_{x=z=0} \\ m &= \frac{1}{\kappa^2 B_{z_0}(s)} \left. \frac{\partial^2 B_z(s, x, z)}{\partial x^2} \right|_{x=z=0} \\ l &= -\frac{1}{\kappa^3 B_{z_0}(s)} \left. \frac{\partial^3 B_z(s, x, z)}{\partial x^3} \right|_{x=z=0} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

κ 的定义由式(2.3)给出, 根据平衡轨道的定义, 还可进一步将它表示为

$$\kappa(s) = \frac{qB_{z_0}(s)}{cp} \quad (2.20)$$

其中 c 是光速, p 是粒子动量, q 是粒子电荷. 当动量 p 为常数时, 从牛顿方程出发可导出^[7]

$$\frac{d\bar{v}_0}{dl_1} + \frac{q}{cp}[\bar{v}_0 \times \bar{B}] = 0 \quad (2.21)$$

其中 l_1 是粒子沿“瞬时”轨道的弧长, 第二项是“罗伦兹”力, 而 \bar{v}_0 是单位速度矢量, 当选择 s 为独立坐标时

$$\bar{v}_0 = \frac{d\bar{r}(s)}{ds} \bigg/ \frac{dl_1}{ds} \quad (2.22)$$

其中 dl_1/ds 由式(2.5)给出, 而

$$\frac{d\bar{r}(s)}{ds} = (1+\kappa x)\bar{i} + x'\bar{j} + z'\bar{k} \quad (2.23)$$

注意到式(2.15)及(2.22)、(2.23), 可得式(2.21)的三个分量方程为

$$\kappa'x + 2\kappa x' - (1+\kappa x)\frac{l_1''}{l_1'} + \frac{ql_1'}{cp}(x'B_x - z'B_z) = 0, \quad \bar{j} \text{ 方向} \quad (2.24)$$

$$x'' - \kappa(1+\kappa x) - x'\frac{l_1''}{l_1'} + \frac{ql_1'}{cp}[(1+\kappa x)B_x - z'B_s] = 0, \quad \bar{i} \text{ 方向} \quad (2.25)$$

$$z'' - z'\frac{l_1''}{l_1'} + \frac{ql_1'}{cp}[(1+\kappa x)B_x - x'B_s] = 0, \quad \bar{k} \text{ 方向} \quad (2.26)$$

鉴于 N 度对称径向扇回旋加速器中, 粒子的平衡轨道由 N 段圆弧和 N 段直线组成, 故在磁体内部 κ =常数, 磁体外部 $\kappa=0$. 由式(2.16)~(2.18)及(2.24)~(2.26)可导出粒子的径向和轴向运动方程.

磁体内部的径向运动方程

$$\begin{aligned}
 \dot{x} + (1-n)x &= \kappa \left(2n-1-\frac{m}{2} \right) x^2 + \frac{\kappa}{2} (m-n)z^2 + \frac{\kappa}{2} (\dot{x}^2 - \dot{z}^2) \\
 &- 2\kappa^2 \left(1-\frac{3}{4}n \right) x\dot{x}^2 + \frac{\kappa^2}{2} nx\dot{z}^2 - \frac{\kappa^2}{2} (l-3m)xz^2 \\
 &+ \kappa^2 \left(n-m+\frac{l}{6} \right) x^3 + \kappa^2 n\dot{x}z\dot{z}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

和轴向运动方程

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} + nz &= \kappa(m-2n)xz + \kappa\dot{x}\dot{z} + \kappa^2 \left(2m-n-\frac{l}{2} \right) x^2z \\
 &- \frac{\kappa^2}{6} (n+m-l)z^3 - \frac{\kappa^2}{2} n\dot{x}^2z - \frac{3}{2} \kappa^2 nz\dot{z}^2 \\
 &+ \kappa^2(n-2)x\dot{x}\dot{z}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

其中字母上方的黑点“·”表示对方位角 ϕ 的微商。

磁体外部的粒子径向和轴向运动方程分别为

$$x'' = 0 \tag{2.29}$$

$$z'' = 0 \tag{2.30}$$

磁体边界上, 粒子受到边缘场的聚焦作用, 其大小由加速器的对称度 N 和磁体张角决定。即

$$n_e = -\text{tg}(\delta-\alpha)\Delta(\phi-\delta) \tag{2.31}$$

其中 2α 是磁体张角, $\Delta(\phi-\delta)$ 是 Dirac delta 函数, 而

$$\delta = \pi/N \tag{2.32}$$

δ 和 α 等均是系统的几何参数。径向扇回旋加速器1/2结构周期的几何关系如图1所示。

对于 N 度对称径向扇回旋加速器, 方程(2.27)和(2.28)中的参数 n , l , m 和 κ 等还可具体表示为

$$\left. \begin{aligned}
 n &= -(2E + E^2)(1 + b\cos\phi)^{-1} \\
 m &= (2E + E^2)(1 + 6E + 3E^2)(1 + b\cos\phi)^{-2} \\
 l &= -3(2E + E^2)^2(3 + 10E + 5E^2)(1 + b\cos\phi)^{-3} \\
 b &= \sin(\delta - \alpha)/\sin\alpha, \quad \alpha = f\delta, \quad \kappa = 1/\rho
 \end{aligned} \right\} \tag{2.33}$$

其中 f 是加速器的磁体系数, E 是粒子能量(以粒子静止质量为单位), ρ 是磁体内部平衡轨道的曲率半径, 且由公式

$$\rho = \frac{c(2E + E^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega(1 + E)} \tag{2.34}$$

给出, 而

$$\omega = 9.649 \times 10^8 B \frac{q}{A} \tag{2.35}$$

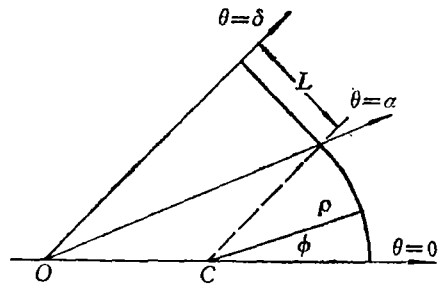


图1 $N=4$, $2\alpha=45^\circ$ 的径向扇回旋加速器1/2结构周期的几何关系

是磁体内部粒子的回旋频率（单位赫兹，磁场强度 B 的单位千高斯）， A 是粒子质量数， q/A 是粒子的荷质比。

在计算中，我们引入了正则动量 p_x 和 p_z （而不用 \dot{x} 和 \dot{z} ），其定义为

$$p_x = \rho\gamma_1 \frac{dx}{ds} = \gamma_1 \frac{dx}{d\phi} \quad (2.36)$$

$$p_z = \rho\gamma_1 \frac{dz}{ds} = \gamma_1 \frac{dz}{d\phi} \quad (2.37)$$

其中 $\gamma_1 = 1 + E$ (2.38)

从式(2.36)和(2.37)可以看出， p_x 和 p_z 具有 x 或 z 的长度量纲，其优点是系统的四维相空间体积与粒子能量无关。

粒子通过两次边缘聚焦和长度 $2L_1$ 的漂移空间后，进入第二扇磁体，设粒子在第一扇磁体边界上的坐标为 x_0, p_{x0}, z_0 和 p_{z0} ，则由式(2.29)~(2.31)，可直接导出粒子在第二扇边界上的坐标 x_1, p_{x1}, z_1 和 p_{z1} 为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (1 + 2a\delta T)x_0 + \frac{2a\delta}{\gamma_1} p_{x0}, & p_{x1} &= 2\gamma_1 T(1 + a\delta T)x_0 + (1 + 2a\delta T)p_{x0} \\ z_1 &= (1 - 2a\delta T)z_0 + \frac{2a\delta}{\gamma_1} p_{z0}, & p_{z1} &= -2\gamma_1 T(1 - a\delta T)z_0 + (1 - 2a\delta T)p_{z0} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

其中

$$a = b\sin\delta/\delta, \quad T = \text{tg}(\delta - \alpha) \quad (2.40)$$

由定义(2.36)和(2.37)，又可将二阶非线性微分方程(2.27)和(2.28)改写为 $\dot{x} = p_x/\gamma_1$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_x &= (n-1)\gamma_1 x + \kappa\gamma_1 \left(2n-1-\frac{m}{2} \right) x^2 + \frac{\kappa\gamma_1}{2} (m-n)z^2 + \frac{\kappa}{2\gamma_1} (p_x^2 - p_z^2) \\ &\quad - \frac{2\kappa^2}{\gamma_1} \left(1 - \frac{3}{4}n \right) x p_x^2 + \frac{\kappa^2}{2\gamma_1} n x p_z^2 - \frac{\kappa^2}{2} \gamma_1 (l-3m)xz^2 \\ &\quad + \kappa^2 \gamma_1 \left(n-m + \frac{l}{6} \right) x^3 - \frac{\kappa^2}{\gamma_1} n p_x z p_z \\ \dot{z} &= p_z/\gamma_1 \\ \dot{p}_z &= -n\gamma_1 z + \kappa\gamma_1 (m-2n)xz + \frac{\kappa}{\gamma_1} p_x p_z + \kappa^2 \gamma_1 \left(2m-n - \frac{l}{2} \right) x^2 z \\ &\quad - \frac{\kappa^2}{6} \gamma_1 (n+m-l)z^3 - \frac{\kappa^2}{2\gamma_1} n p_x^2 z - \frac{3\kappa^2}{2\gamma_1} n z p_z^2 \\ &\quad + \frac{\kappa^2}{\gamma_1} (n-2)x p_x p_z \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

方程(2.41)和(2.39)就是 N 度对称径向扇回旋加速器中的粒子非线性运动方程。这组方程决定了系统的动力学稳定性及相空间特征；当非线性项不考虑时，化为文献[1]中的线性方程。

三、系统的动力学稳定性

系统的动力学稳定性决定于粒子的自由振荡频率。在工程上，通常要求在粒子加速过程

中不得穿过任何一条严重的共振线,为此,我们试图由运动方程(2.41)和(2.39)求出粒子的径向自由振荡频率 ν_r 和轴向自由振荡频率 ν_z 。

在硬边近似下,我们对 $N=4, 5, 6, 8, 10$ 和 $B=10$ kG 的情形,用龙格-库塔方法求解了方程(2.41)和(2.39),并根据[8]求得了粒子的自由振荡频率 ν_r 和 ν_z 。图2给出了 $N=4, f=0.3, 0.4, 0.5, 0.578$ 和 0.7 时的自由振荡频率。该图左边第一点的能量为 $E=0$, 相邻两点间的能量间隔 $\Delta E=0.05$,符号“ \times ”表示线性值;虚线是三阶本征非线性共振线(未包括和共振和差共振)。

与文献[1]给出的结果进行比较,我们发现粒子的自由振荡频率 $\nu_{r,z}$ 不仅与参数 N, f, E 有关(线性近似),而且还与参数 $B, q/A$ 有关;在共振线附近,非线性效应表现特别明显,例如对于 $N=4, f=0.3, E=0.001$ 时,数值迭代不收敛;当 $N=4, f=0.578, E=0.20$ 时,粒子的自由振荡频率 ν_r 与线性结果有明显差别,其原因就在于上述二种情况下,粒子分别处于 $\nu_r=1$ 和 $\nu_r=4/3$ 共振线附近。当系统的非线性效应不考虑时,其结果与文献[1]相同。

四、非线性系统的相平面特征

我们对 $N=4, f=0.578, B=10$ kG 的情形,利用龙格-库塔方法,对系统的相平面特征进行了数值分析。

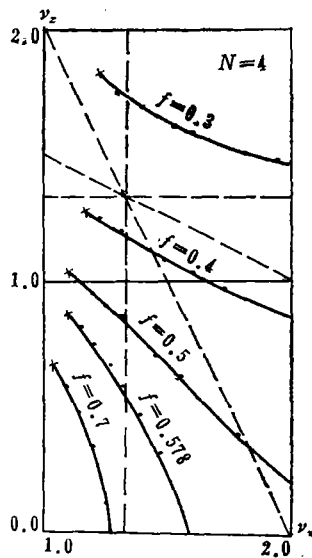


图2 $N=4, f=0.3, 0.4, 0.5, 0.578$ 和 0.7 时的粒子自由振荡频率

1. 平衡轨道

图3给出了 $E=0.05, q/A=1$ 时的粒子平衡轨道。由于非线性效应,系统的平衡轨道将发生变化。数值分析表明,在线性近似下,系统的平衡轨道始终位于相平面原点,考虑到非线性

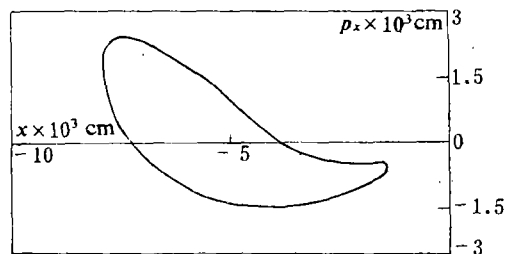


图3 $N=4, f=0.578, B=10$ kG, $q/A=1, E=0.05$ 时的粒子平衡轨道

性效应,系统的平衡轨道对应于相平面上一条封闭曲线,这正反映了平衡轨道的周期性。考虑到平衡轨道的周期性,可将 x 和 p_x 按富里叶级数展开,比如

$$x(\theta) = \sum_n A_n \sin n\theta \quad (4.1)$$

如果展开式中只保留一次项,即

$$x(\theta) = A_1 \sin\theta \quad (4.2)$$

则 p_x 就可表示为

$$p_x(\theta) = A_2 \cos \theta \quad (4.3)$$

其中

$$A_2 = A_1 \gamma_1 \frac{d\theta}{d\phi} \quad (4.4)$$

当 $d\theta/d\phi = \text{常数}$ 时, 则式(4.2)和(4.3)对应于相平面上的一个椭圆——一条简单的闭曲线。

2. $\nu_x = 4/3$ 共振线前后的相平面特征

图4和5是 $q/A=1$ 的粒子, 在 $\nu_x = 4/3$ 三阶本征非线性共振线前后的相平面特征。它们的原点均选在 $r=r_0, \theta=\phi=0$ 时的平衡轨道上, 粒子的能量分别为 $E=0.20$ 和 $E=0.21$, 相应的振荡频率为 $\nu_x=1.323$ 和 $\nu_x=1.336$ 。 $\nu_x=4/3$ 共振线的位置对应于粒子能量 $E=0.208$ 。从图4可以看出, 当初始振幅比较小时, (比如5cm左右), 相轨迹是一条闭曲线, 相应的运动状态是稳定的。当初始振幅为1cm时, 相轨迹是一个椭圆, 自由振荡频率 $\nu_x=1.324$ 。当初始振幅为5cm, 相轨迹演变为一个类三角形, 相应的自由振荡频率 $\nu_x=1.328$ 。随着初始振幅的增加, 粒子的振荡频率越来越接近 $\nu_x=4/3=1.333$ 这条共振线。当初始振幅比较大(比如10cm)时, 相轨迹由一条闭曲线退化为三个分支, 各分支上相邻相点之间都相差三个周期, 即 $3\pi/2$ 。随着 θ 的增加, 相点越来越发散, 粒子振幅越来越大。当振幅超过工程允许的限度时, 我们就说粒子的运动不稳定。这一特征可从方程(2.27)的一级近似解定性地看出。非线性分析表明, 方程(2.27)包含了各阶非线性效应, 但在 $\nu_x=4/3$ 共振线附近, 相平面特征主要方程(2.27)右端富里叶展开式中的4阶分量决定。在此共振线附近, 方程(2.27)的一阶渐近解可表示为

$$x(\theta) = A(\theta) \cos[(4/3)\theta + \alpha(\theta)] \quad (4.5)$$

其中 $A(\theta)$ 和 $\alpha(\theta)$ 是 θ 的慢变函数。上式表明, $x(\theta)$ 恰好是一个周期为 $3\pi/2$ 的“准周期”函数。

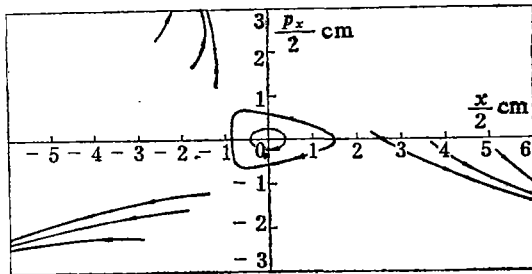


图4 粒子在 $\nu_x = 4/3$ 共振线前的相平面特征

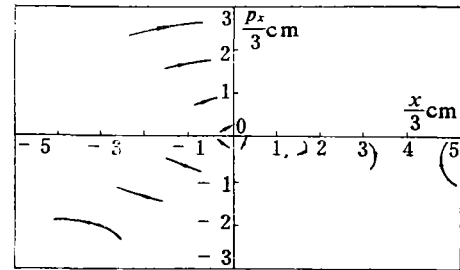


图5 粒子在 $\nu_x = 4/3$ 共振线后的相平面特征

图5是粒子穿越 $\nu_x = 4/3$ 共振线后的相平面特征。同图4相比, 它更接近于 $\nu_x = 4/3$ 这条共振线, 共振效应比较明显。三组相点分别向三个相位集中, 相轨线演变为三条分裂的线段。随着初始振幅的增加, 这些线段对原点的张角越来越小, 表明共振效应愈趋显著。

数值分析表明, 在远离共振线的地方, 相轨迹基本上是一个椭圆, 说明在这些地方, 系统的非线性效应比较弱。

本文从经典物理出发, 导出了 N 度对称径向扇回旋加速器中粒子的非线性运动方程, 并对系统的动力学稳定性及相平面特征进行了数值分析。结果表明, 在共振线附近, 系统的非线性

性效应比较强；当非线性项不考虑时，其结果与文献[1]一致。

参 考 文 献

- [1] Gordon, M. M., *Ann. Phys.*, 50, 3 (1968), 571.
- [2] 罗诗裕, 共振线附近粒子运动的非线性行为, *力学学报*, 1 (1979).
- [3] 罗诗裕, 粒子穿越 $\nu_x=4/3$ 共振线的动力学特征, *力学学报* (1980), 213.
- [4] 罗诗裕, 马丢方程的一阶不稳定区及其在回旋加速器中的应用, *应用数学和力学*, 3, 4 (1982), 555.
- [5] Luo Shi-yu, Liu Zheng-rong, Li Ji-bin and Shao Ming-zhu, *Acta Mathematica Scientia*, 3, 3 (1983), 285.
- [6] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory* (1941), 49.
- [7] Kolomenski, A. A., *CERN Symposium*, Vol. 1 (1956), 265.
- [8] Servranckx, R., *Particle Accelerators*, 6, 2 (1975), 83.

Dynamic Stability and Phase Planar Property for Radial Sector Cyclotrons with N-Folded Symmetry

Luo Shi-yu

(Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing)

Abstract

The particle non-linear motion equation for a radial sector cyclotron with N -folded Symmetry was derived. The betatron oscillations frequency with $N=4, 5, 6, 8, 10$ and the phase planar properties before and after $\nu_x=4/3$ resonance with $N=4, f=0.578$ were analyzed, by using numerical method. The dynamic stabilities and nonlinear properties were discussed, the results compared with those of ref. [1] show that both are consistent when nonlinear terms are neglected.