

# 叠层复合材料杆弯曲的层间应力(II)\*

张福范

(清华大学, 1984年9月29日收到)

## 摘要

一矩形横截面的叠层复合材料杆, 由以一种材料为中心部分, 及另一种材料的上下两相同的盖板所组成. 以线性弯曲应力所组成的力偶, 作用于杆两端的中心部分(图1a), 使杆弯曲. 本文将探讨层间应力, 以表明力是怎样通过胶合面传递给盖板的.

## 一、引言

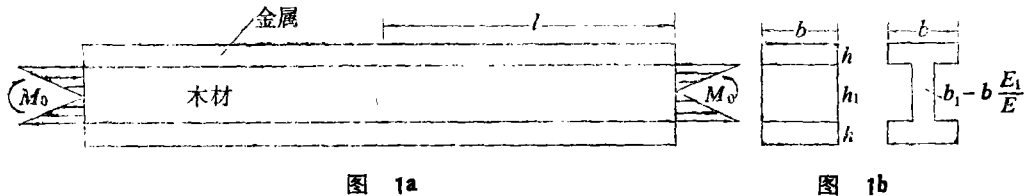
设有一矩形横截面的胶合叠层复合材料杆. 上下两对称的盖板为同一材料, 例如硬铝. 而杆的中心部分为另一材料, 例如木材. 在杆两端的中心部分, 作用由线性弯曲应力所组成的力偶(图1a), 使杆弯曲. 对于离杆端较远的横截面内的应力, 可按材料力学将这两种材料的矩形横截面, 转换为硬铝这同一材料的工形截面(图1b), 然后进而计算弯曲应力. 但要离杆端多远才能有这样的应力分布? 作用于杆端的中心部分的力偶, 是怎样通过胶合面将力传递给盖板?

按照杆端力偶的方向及各层变形的协调, 设剪应力  $\tau_0$  与正应力  $\sigma_0$  如图2. 并以两级数表示:

$$\tau_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \sigma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (1.1)$$

式中的系数  $a_n$  与  $b_n$  为待定.

以  $E, G, \mu$  为上下两盖板的弹性常数, 以  $E_1, E_2, G_1, \mu_{21}, \mu_{12}$  ( $E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12}$ ) 为中心部分木材的弹性常数.



\* 叠层复合材料杆弯曲的层间应力(I)刊于: 应用数学和力学, 第6卷, 第7期(1985).

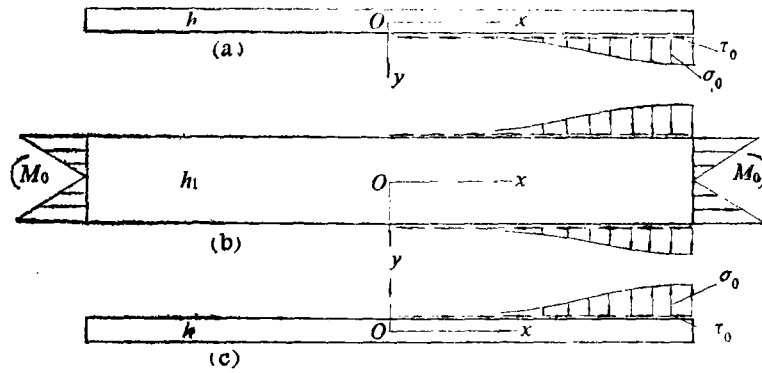


图 2

## 二、盖板与中心部分的内力分量

自上盖板 (图2a) 截取一微段  $dx$  (图3)。由它的平衡, 得:

$$\frac{dS}{dx} = b\tau_0, \quad \frac{dQ}{dx} = -b\sigma_0, \quad \frac{dM}{dx} = \frac{bh}{2} \tau_0 - Q \quad (2.1)$$

式中的  $S$  为轴力,  $Q$  为剪力,  $M$  为弯矩。积分以上三式, 并得:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right), \quad Q = -\frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ M &= \frac{bh}{2} \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) + \frac{bl^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

对于下盖板, 由它的微段  $dx$  (图4) 的平衡, 得到:

$$\frac{dS_1}{dx} = -b\tau_0, \quad \frac{dQ_1}{dx} = -b\sigma_0, \quad \frac{dM_1}{dx} = -\frac{bh}{2} \tau_0 - Q_1 \quad (2.3)$$

积分以上诸式, 得:

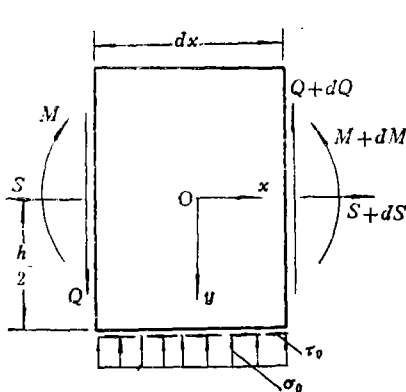


图 3

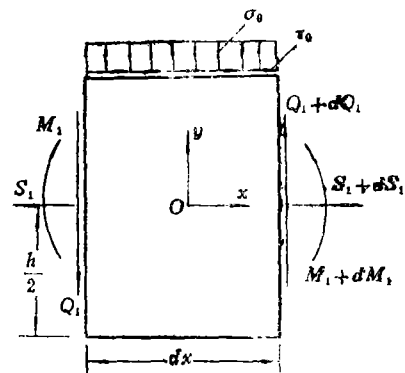


图 4

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right), \quad Q_1 = -\frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ M_1 &= \frac{bh}{2} \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) + \frac{bl^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

对于中心部分, 由它的微段  $dx$  (图5) 的平衡, 得:

$$\frac{dQ_2}{dx} = 2b\sigma_0, \quad \frac{dM_2}{dx} = bh_1\tau_0 - Q_2 \quad (2.5)$$

积分以上两式, 得:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= \frac{2bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ M_2 &= M_0 + h_1 \frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) - \frac{2bl^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

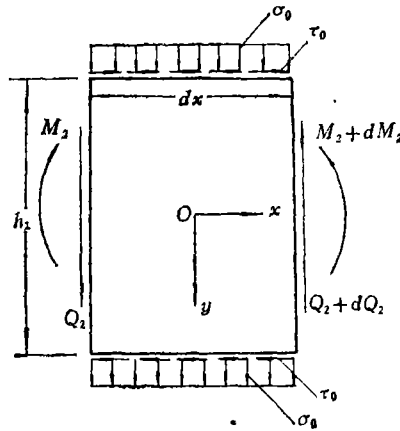


图 5

### 三、系数 $a_n$ 与 $b_n$ 之间的联系

这可由上盖板右半段的平衡条件来获得。图 6a 所示的工形截面, 对中性轴的惯性矩

$I_z$  为:

$$I_z = \frac{bh_1^3}{12} \frac{E_1}{E} + 2 \left[ \frac{bh^3}{12} + \frac{bh}{4} (h+h_1)^2 \right] \quad (3.1)$$

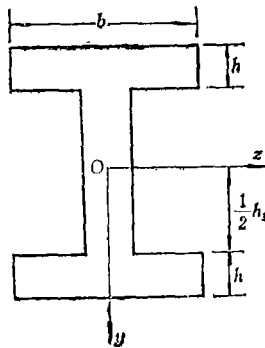


图 6a

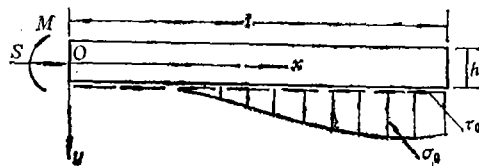


图 6b

于是在离两端较远的横截面内，例如杆中点的横截面，正应力 $\sigma_x$ 为：

$$\sigma_x = M_0 y / I_z$$

作用于上盖板中点横截面内的轴力与弯矩各为：

$$\left. \begin{aligned} S &= - \int_{h_1/2}^{(h+h_1)/2} \frac{M_0 y}{I_z} b dy = - \frac{M_0}{I_z} \cdot \frac{bh}{2} (h+h_1) \\ M &= \int_{h_1/2}^{(h+h_1)/2} \frac{M_0 y}{I_z} \left[ y - \frac{1}{2}(h+h_1) \right] b dy = \frac{M_0}{I_z} \frac{bh^3}{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

由上盖板（图6b）右半段的平衡条件 $\Sigma X=0$ 得：

$$\frac{M_0}{I_z} \frac{bh}{2} (h+h_1) = - \frac{bl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\cos n\pi - 1)$$

以坐标原点为力矩中心，由 $\Sigma M=0$ 得：

$$\frac{M_0}{I_z} \frac{bh^3}{12} - \frac{bhl}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\cos n\pi - 1) - \frac{bl^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} (\cos n\pi - 1) = 0$$

由以上两式消去 $M_0$ ，得：

$$- \frac{h}{2} \left[ \frac{h}{3(h+h_1)} + 1 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\cos n\pi - 1) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} (\cos n\pi - 1)$$

使等式左右两边恒等，取

$$b_n = - \frac{h\pi}{2l} \left[ \frac{1}{3\left(1+\frac{h_1}{h}\right)} + 1 \right] a_n \quad (3.3)$$

或简写为：

$$b_n = k a_n \quad (3.4)$$

式中的

$$k = - \frac{h\pi}{2l} \left[ \frac{1}{3\left(1+\frac{h_1}{h}\right)} + 1 \right] \quad (3.5)$$

从中心部分的右半段的平衡，将得到相同的结果。数值例子的计算将证实，取(3.3)式所示的 $b_n$ 与 $a_n$ 的联系是正确的。用(3.4)式并由级数(1.1)，得

$$\sigma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} k a_n n \cos \frac{n\pi x}{l} = k \frac{l}{\pi} \frac{d\tau_0}{dx} \quad (3.6)$$

(3.6)式表明：沿盖板胶合面内各点的正应力 $\sigma_0$ ，与该点的 $\tau_0$ 的导数成比例。如果绘出 $\tau_0$ 的分布曲线，则任一点的 $\sigma_0$ 与 $\tau_0$ 曲线在该点的斜率成比例。

#### 四、盖板与中心部分的应力分量

由算式(3.4)，可将盖板与中心部分的应力分量以 $a_n$ 来表示。由(2.2)式及图2a所示的坐标系统，得上盖板的应力分量 $\sigma_x$ 为：

$$\sigma_x = \frac{S}{bh} + \frac{My}{I} = \frac{l}{\pi h} \left[ 1 + 12 \frac{y}{h} \left( \frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l}) \quad (4.1a)$$

式中的  $I = bh^3/12$ . 将  $\sigma_x$  代入由平衡方程所得的积分式:

$$\int_y^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dy + \int_{\tau_{xy}}^{-\tau_0} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy = 0$$

得 
$$\tau_{xy} = - \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{h} \right) + 6 \left( \frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right) \left( \frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right) \right\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (4.1b)$$

将  $\tau_{xy}$  代入 
$$\int_{\sigma_y}^{-\sigma_0} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy + \int_y^{h/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy = 0$$

得: 
$$\sigma_y = - \left\{ k + \frac{\pi h}{l} \left[ \left( \frac{3}{8} - \frac{y}{2h} - \frac{y^2}{2h^2} \right) + 6 \left( \frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right) \left( -\frac{1}{12} + \frac{y}{4h} - \frac{y^3}{3h^3} \right) \right] \right\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (4.1c)$$

下盖板的应力分量: 由算式(2.4)以及图2c所示的坐标系, 下盖板的应力分量与上盖板的只差一正负号. 因而上下两盖板的变形能相等.

中心部分的应力分量: 由(2.6)式及图2b所示的坐标系, 得:

$$\sigma'_x = -\frac{M_2 y}{I_1} = \frac{M_0 y}{I_1} + 12 \frac{y}{h_1} \frac{l}{\pi h_1} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (4.2a)$$

式中的  $I_1 = \frac{bh_1^3}{12}$ . 将  $\sigma'_x$  代入 
$$\int_{\tau'_{xy}}^{-\tau_0} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} dy + \int_y^{h_1/2} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} dy = 0$$

得: 
$$\tau'_{xy} = \left\{ -1 + 6 \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right) \left( \frac{1}{4} - \frac{y^2}{h_1^2} \right) \right\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (4.2b)$$

将  $\tau'_{xy}$  代入 
$$\int_{\sigma'_y}^{\sigma_0} \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} dy + \int_y^{h_1/2} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} dy = 0$$

得: 
$$\sigma'_y = \left\{ k + \frac{\pi h_1}{l} \left[ \left( \frac{y}{h_1} - \frac{1}{2} \right) + 6 \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right) \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \frac{y}{h_1} + \frac{y^3}{3h_1^3} \right) \right] \right\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (4.2c)$$

### 五、由最小变形能原理计算层间应力

对于图1所示这叠层复合材料杆, 其变形能为:

$$U = 2 \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\mu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \right\} b dx dy$$

$$+ \int_0^l \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma'_x{}^2}{E_1} + \frac{\sigma'_y{}^2}{E_2} \right) - \frac{\mu_{21}}{E_2} \sigma'_x \sigma'_y + \frac{1}{2G_1} \tau'_{xy}{}^2 \right\} b dx dy$$

对于木材这正交各向异性材料, 以  $x$  与  $y$  轴为弹性主方向.  $x$  轴为木材纤维方向, 相应的弹性系数为  $E_1$ .  $E_2$  为垂直于纤维方向的弹性系数.  $G_1$  为年轮层的剪切模量.  $\mu_{21}, \mu_{12}$  为泊桑系数而  $E_1 \mu_{21} = E_2 \mu_{12}$ . 由最小变形能原理, 得到:

$$\frac{\partial U}{\partial a_n} = 2 \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{1}{E} \left[ \sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial a_n} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial a_n} - \mu \left( \sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial a_n} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial a_n} \right) \right] + \frac{\tau_{xy}}{G} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial a_n} \right\} b dx dy$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left\{ \sigma'_x \frac{\partial \sigma'_x}{\partial a_n} + \sigma'_y \frac{\partial \sigma'_y}{\partial a_n} - \frac{\mu_{21}}{E_2} \left( \sigma'_x \frac{\partial \sigma'_y}{\partial a_n} + \sigma'_y \frac{\partial \sigma'_x}{\partial a_n} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\tau'_{xy}}{G_1} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial a_n} \right\} b dx dy = 0 \quad (5.1)
\end{aligned}$$

将(4.1a, b, c), (4.2a, b, c)式所示的应力分量代入上式, 经整理后, 得:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{a_n}{n^2} \left\{ \frac{1}{E} \left[ 1 + 12 \left( \frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] + 6 \frac{1}{E_1} \frac{h}{h_1} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 \right\} \\
& + \frac{h^4}{l^4} \frac{\pi^2}{35} a_n n^2 \left\{ \frac{2}{E} \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} - \frac{13}{6} \right) \right] + \frac{1}{E_2} \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{1}{6} + \frac{kl}{\pi h_1} \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \left( 17 \frac{kl}{\pi h_1} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\} + \frac{h^2}{l^2} a_n \left\{ \frac{2}{5G} \left[ \frac{2}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( 6 \frac{kl}{\pi h} + 1 \right) \right] \right. \\
& + \frac{4}{5} \frac{\mu}{E} \left[ -\frac{2}{3} - 6 \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} + 1 \right) \right] + \frac{1}{5G_1} \frac{h_1}{h} \left[ 1 + \frac{4kl}{\pi h_1} \left( 6 \frac{kl}{\pi h_1} - 1 \right) \right] \\
& + \frac{2}{5} \frac{\mu_{21}}{E_2} \frac{h_1}{h} \left[ -1 - 2 \frac{kl}{\pi h_1} \left( 12 \frac{kl}{\pi h_1} - 7 \right) \right] \left. \right\} + \frac{2}{E_1} \frac{h}{l\pi} \frac{M_0}{I_1} h_1 \frac{\cos n\pi}{n} \\
& + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1} a_n \cos n\pi \left\{ \frac{24}{E_1} \frac{h}{h_1} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 + \frac{4}{E} \left[ 1 + 12 \left( \frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] \right\} \\
& \cdot \frac{\cos n\pi}{n} = 0 \quad (5.2)
\end{aligned}$$

方程(5.2)可用以解  $a_n$ , 并可简写为:

$$a_n = - \frac{C n \cos n\pi}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} \quad (5.3)$$

(5.3)式中的

$$\begin{aligned}
p^2 = & \frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{E} \left[ 1 + 12 \left( \frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] + 6 \frac{1}{E_1} \frac{h}{h_1} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 \right\} \\
& \frac{h^4}{l^4} \frac{\pi^2}{35} \left\{ \frac{2}{E} \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} - \frac{13}{6} \right) \right] + \frac{1}{E_2} \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{1}{6} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 17 \frac{kl}{\pi h_1} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\} \\
2\eta = & \left\{ \frac{2}{5G} \left[ \frac{2}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( 6 \frac{kl}{\pi h} + 1 \right) \right] + \frac{4}{5} \frac{\mu}{E} \left[ -\frac{2}{3} - 6 \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} + 1 \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{5G_1} \frac{h_1}{h} \left[ 1 + 4 \frac{kl}{\pi h_1} \left( 6 \frac{kl}{\pi h_1} - 1 \right) \right] + \frac{2}{5} \frac{\mu_{21}}{E_2} \frac{h_1}{h} \left[ -1 - 2 \frac{kl}{\pi h_1} \left( 12 \frac{kl}{\pi h_1} - 7 \right) \right] \right\} \\
C = & \frac{h^2}{l^2} \frac{\pi^2}{35} \left\{ \frac{2}{E} \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} - \frac{13}{6} \right) \right] + \frac{1}{E_2} \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{1}{6} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 17 \frac{kl}{\pi h_1} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\} \\
& \left\{ \frac{2}{E_1} \frac{M_0}{I_1} \frac{h}{l\pi} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right) h_1 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1} a_n \cos n\pi \left\{ \frac{24}{E_1} \frac{h}{h_1} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4}{E} \left[ 1 + 12 \left( \frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] \right\} \right\} \\
& \frac{h^4}{l^4} \frac{\pi^2}{35} \left\{ \frac{2}{E} \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} - \frac{13}{6} \right) \right] + \frac{1}{E_2} \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{1}{6} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 17 \frac{kl}{\pi h_1} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\} \quad (5.4)
\end{aligned}$$

当盖板与中心部分为相同材料, 且为各向同性材料, 则  $E_1=E_2=E$ ,  $G=G_1=E/2(1+\mu)$ ,  $\mu_{12}=\mu_{21}=\mu$ . 于是(5.4)成为:

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{h^4}{l^4} \frac{\pi^2}{35} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} - \frac{13}{6} \right) \right] + \frac{h^3}{h_1^3} \left[ \frac{1}{6} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 17 \frac{kl}{\pi h_1} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\} \\ 2\eta &= \frac{\frac{4}{5} \left[ \frac{2}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( 6 \frac{kl}{\pi h} + 1 \right) \right] + \frac{2}{5} \frac{h_1}{h} \left[ 1 + 4 \frac{kl}{\pi h_1} \left( 6 \frac{kl}{\pi h_1} - 1 \right) \right]}{\frac{h^2}{l^2} \frac{\pi^2}{35} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} - \frac{13}{6} \right) \right] + \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{1}{6} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 17 \frac{kl}{\pi h_1} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\}} \\ C &= \frac{2M_0}{I_1} \frac{h}{l\pi} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right) h_1 + \frac{1}{\pi^2} \left\{ 24 \frac{h}{h_1} \left( 1 - \frac{2kl}{\pi h_1} \right)^2 + 4 \left[ 1 + 12 \left( \frac{1}{2} + \frac{kl}{\pi h} \right)^2 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\pi \right\} \\ &\quad \frac{h^4}{l^4} \frac{\pi^2}{35} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{kl}{\pi h} \left( \frac{kl}{\pi h} - \frac{13}{6} \right) \right] + \frac{h_1^3}{h^3} \left[ \frac{1}{6} + \frac{kl}{\pi h_1} \left( 17 \frac{kl}{\pi h_1} - \frac{3}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

在以上的算式中不再包括材料的弹性常数. 正如可以预料到的, 对于一各向同性材料杆, 在盖板与中心部分的交接面内的应力与弹性常数无关. 将(5.3)式代入(1.1)式中的  $\tau_0$  的级数, 得:

$$\tau_0 = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} \quad (5.6)$$

以上这级数可以求和. 对于所讨论的叠层复合材料梁,  $p > \eta$ . 并且当  $\beta\pi$  为一较大值, 由附录中的级数和(2.5), 得:

$$\tau_0 = \frac{C\pi}{4\beta\gamma \sinh \pi\beta} \left\{ \sin \pi\gamma \sinh \frac{\pi\beta}{l} x \cos \frac{\pi\gamma}{l} x - \cos \pi\gamma \cosh \frac{\pi\beta}{l} x \sin \frac{\pi\gamma}{l} x \right\} \quad (5.7)$$

式中的  $\beta = \sqrt{(p+\eta)/2}$ ,  $\gamma = \sqrt{(p-\eta)/2}$ .

$\tau_0$  的分布可与一弹性地基梁的挠度曲线相比. 梁的两端为铰支并在这两端作用轴向拉力  $P$ , 而在右端作用一反时针方向的力偶  $M_0$ . 以梁的左端为原点, 用正弦级数表示这梁的挠度曲线, 则所得结果在形式上与(5.6)式相同. 因而这两问题在数学上相似.

因  $\beta\pi$  值并不很小, 在盖板端部  $\sinh \frac{\pi\beta}{l} x = \cosh \frac{\pi\beta}{l} x$ , (5.7)式简化为:

$$\tau_0 = \frac{C\pi}{4\beta\gamma} \cdot \frac{\sinh \frac{\pi\beta}{l} x}{\sinh \pi\beta} \sin \pi\gamma \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (5.8)$$

由(5.7)与(3.6)式, 得

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= k \frac{l}{\pi} \frac{d\tau_0}{dx} = k \frac{C\pi}{4\beta\gamma} \cdot \frac{1}{\sinh \pi\beta} \left\{ \cosh \frac{\pi\beta}{l} x \cos \frac{\pi\gamma}{l} x (\beta \sin \pi\gamma - \gamma \cos \pi\gamma) \right. \\ &\quad \left. - \sinh \frac{\pi\beta}{l} x \sin \frac{\pi\gamma}{l} x (\gamma \sin \pi\gamma + \beta \cos \pi\gamma) \right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

在盖板端部,  $\sigma_0$  可进一步简化为:

$$\sigma_0 = k \frac{C\pi}{4\beta\gamma} \cdot \frac{\sinh \frac{\pi\beta}{l} x}{\sinh \pi\beta} \left\{ \beta \sin \pi\gamma \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - \gamma \cos \pi\gamma \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right\} \quad (5.10)$$

由(5.7)式得盖板所传递的剪力为:

$$\int_0^l b\tau_0 dx = \frac{Chb}{4p\beta} \frac{h}{l} \quad (5.11)$$

$\sigma_0$  与  $\tau_0$  对盖板中点这横截面所产生的弯矩为:

$$M = -\frac{h}{2} \int_0^l b\tau_0 dx + b \int_0^l x\sigma_0 dx = -\frac{h}{2} \left(1 + \frac{2kl}{\pi h}\right) \frac{Cbl}{4p\beta} \quad (5.12)$$

在以上所得的结果中, 均带有一尚待确定的  $C$  值。这可以由 (5.4) 式的第三式来计算。但首先须得到该式分子中的这无穷级数的和。由算式 (5.6), 按附录中的级数和 (A.3) 并由于  $\beta\pi$  是个较大值, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\pi = -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} = -C \left( \frac{\pi}{4\beta p} - \frac{1}{2p^2} \right) \quad (5.13)$$

有了这级数和即可求解  $C$  的值。

## 六、数值例子

(1) 设叠层复合材料杆的上下两对称盖板为硬铝材料, 中心部分为正交各向异性材料 (松木)。硬铝的弹性常数为:  $E = 7 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ ,  $G = 2.69 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ ,  $\mu = 0.3$ 。松木的弹性常数为:  $E_1 = 10^5 \text{kg/cm}^2$ ,  $E_2 = 0.042 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ ,  $G_1 = 0.075 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ ,  $\mu_{21} = 0.01$ 。

$$h_1 = 6h, \quad l/(2h + h_1) = l/8h = 4$$

由 (3.5) 式,

$$k = -\frac{\pi h}{2l} \left[ \frac{1}{3 \left(1 + \frac{h_1}{h}\right)} + 1 \right] = -\frac{\pi}{2 \times 32} \left[ \frac{1}{3(1+6)} + 1 \right] = -0.051425$$

$$\frac{kl}{\pi h} = -0.52381, \quad \frac{kl}{\pi h_1} = -0.087302$$

由 (5.4) 式,

$$p^2 = 522.43, \quad p = 22.857, \quad 2\eta = 38.725, \quad \eta = 19.363$$

$$\beta = \sqrt{(22.857 + 19.363)/2} = 4.5946, \quad \gamma = \sqrt{(22.857 - 19.363)/2} = 1.3217$$

由 (5.13) 式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\pi = -C \left( \frac{\pi}{4 \times 4.5946 \times 22.857} - \frac{1}{2 \times 522.43} \right) = -0.0065215C$$

再由 (5.4) 式的第三式, 得:

$$C = 60.727 \frac{M_0}{h_1} \cdot \frac{1}{bh_1}$$

用 (5.11) 式计算盖板所传递的剪力, 以校核以上的计算。

$$\int_0^l \tau_0 b dx = \frac{60.727 \frac{M_0}{h_1} \times 32}{4 \times 4.5946 \times 22.857 \times 6} = 0.77099 \frac{M_0}{h_1}$$



对于离杆端较远的横截面,例如中点这截面,作用于上盖板的轴向压力即等于这剪力.现用(3.2)式,按材料力学计算这轴向压力.式中的 $I_z$ 由(3.1)式所给,即

$$I_z = \frac{bh^3}{12} 6^3 \frac{10^6}{7 \times 10^6} + 2bh^3 \left[ -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} (1+6)^2 \right] = 27.238bh^3$$

于是  $S = -\frac{M_0}{27.238bh^3} \cdot \frac{bh^2}{2} (1+6) = 0.77098 \frac{M_0}{h_1}$

由算式(5.12),上盖板中点截面的弯矩为:

$$M = 0.77099 \frac{M_0}{h_1} \cdot \frac{h}{2} (-1 + 2 \times 0.52381) = 0.0030595M_0$$

由(3.2)式按材料力学所得的结果为:

$$M = \frac{M_0}{12I_z} bh^3 = \frac{M_0bh^3}{27.238 \times 12 \times bh^3} = 0.0030595M_0$$

以上的校核证实,所得的结果是与梁的理论完全相同的.这表明(3.3)式所给的 $a_n$ 与 $b_n$ 的关系是可取的.

将 $C, \beta, \gamma$ 等值代入 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 的算式(5.8)与(5.10),并将所得的结果列于表1.

表 1

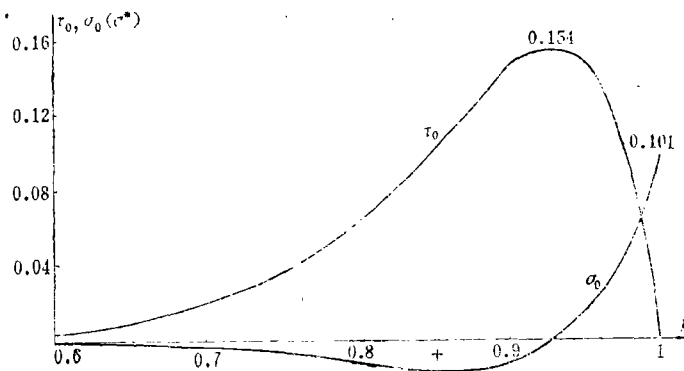
|            |                    |                      |                      |                      |                      |                      |                       |
|------------|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| $x$        | $l$                | 0.99 $l$             | 0.98 $l$             | 0.96 $l$             | 0.94 $l$             | 0.92 $l$             | 0.90 $l$              |
| $\tau_0$   | 0                  | 0.053380 $\sigma^*$  | 0.084765 $\sigma^*$  | 0.13789 $\sigma^*$   | 0.15407 $\sigma^*$   | 0.15268 $\sigma^*$   | 0.14150 $\sigma^*$    |
| $\sigma_0$ | 0.10098 $\sigma^*$ | 0.074719 $\sigma^*$  | 0.053577 $\sigma^*$  | 0.023325 $\sigma^*$  | 0.004759 $\sigma^*$  | -0.005993 $\sigma^*$ | -0.011617 $\sigma^*$  |
| $x$        |                    | 0.85 $l$             | 0.80 $l$             | 0.75 $l$             | 0.70 $l$             | 0.65 $l$             | 0.60 $l$              |
| $\tau_0$   |                    | 0.099438 $\sigma^*$  | 0.061143 $\sigma^*$  | 0.034671 $\sigma^*$  | 0.018534 $\sigma^*$  | 0.009438 $\sigma^*$  | 0.004599 $\sigma^*$   |
| $\sigma_0$ |                    | -0.014084 $\sigma^*$ | -0.010650 $\sigma^*$ | -0.006803 $\sigma^*$ | -0.003954 $\sigma^*$ | -0.002154 $\sigma^*$ | -0.0004622 $\sigma^*$ |

表1中的 $\sigma^*$ 为离杆端较远的横截面内最大的弯曲应力,即

$$\sigma^* = \frac{M_0 4h}{27.238bh^3} = 5.2866 \frac{M_0}{bh_1^2}$$

从表1可知,  $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 集中分布在盖板端部,其长度约等于杆的横截面高度( $h_1+2h$ )的1.6倍.对于上盖板,表内正的 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 表明它们的方向与图3中的相同.在上盖板端 $\sigma_0$ 为压应力,而较远的各点为负值,应是张应力.对于下盖板则应以图4为参考,故在端部表示正的 $\sigma_0$ 为张应力,而较远各点为负值是压应力.在图7中绘出了 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 的曲线.

(2) 设盖板与中心部分为相同的各向同性材料.



上下盖板(硬铝);中心部分(松木),  $h_1=6h, l/h=32, \sigma^*=5.29M_0/bh_1^2$

图 7 上盖板端的 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 曲线

$$h = \frac{1}{2}h_1, \quad \frac{l}{h_1+2h} = \frac{l}{4h} = 4$$

由(3.5)式,

$$k = -\frac{h\pi}{2l} \left(1 + \frac{1}{9}\right) = -\frac{5}{9} \frac{h\pi}{l}, \quad \frac{kl}{\pi h} = -\frac{5}{9} = -0.55556, \quad \frac{kl}{\pi h_1} = -0.27778$$

由(5.5)式,

$$p^2 = 20726, \quad p = 143.97; \quad 2\eta = 228.30, \quad \eta = 114.15$$

$$\beta = \sqrt{(143.97 + 114.15)/2} = 11.360, \quad \gamma = \sqrt{(143.97 - 114.15)/2} = 3.8613$$

由(5.13)式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\pi = -C \left( \frac{\pi}{4 \times 143.97 \times 11.36} - \frac{1}{2 \times 143.97^2} \right) = -0.0004561C$$

由(5.5)式的第三式, 得:

$$C = 459.97 \frac{M_0}{h_1} \cdot \frac{1}{bh_1}$$

现先计算盖板所传递的剪力, 是否与盖板横截面内的轴力相等. 由算式(5.11)得:

$$\int_0^l b\tau_0 dx = \frac{459.97 \frac{M_0}{h_1}}{4 \times 11.360 \times 143.97 \times \frac{1}{8}} = 0.56248 \frac{M_0}{h_1}$$

以上这剪力应等于上盖板内的轴向压力. 自(3.2)式得由材料力学所给的值, 即:

$$S = -\frac{12M_0}{b(h_1+2h)^3} \cdot \frac{b}{2} h(h+h_1) = -\frac{M_0}{h_1} \cdot \frac{9}{16} = -0.5625 \frac{M_0}{h_1}$$

除盖板横截面的轴力外, 还可进而校核它的弯矩. 由算式(5.12),

$$M = \frac{h}{2} \frac{Cbl}{4\beta p} \left(-1 + 2 \frac{kl}{\pi h}\right) = (-1 + 2 \times 0.55556) \frac{459.97 \times 8M_0}{4 \times 143.97 \times 11.360} = 0.015626M_0$$

由(3.2)式得材料力学所给的结果为:

$$M = \frac{12M_0}{64bh^3} \cdot \frac{bh^3}{12} = 0.015625M_0$$

这两校核表明以上的计算是对的.

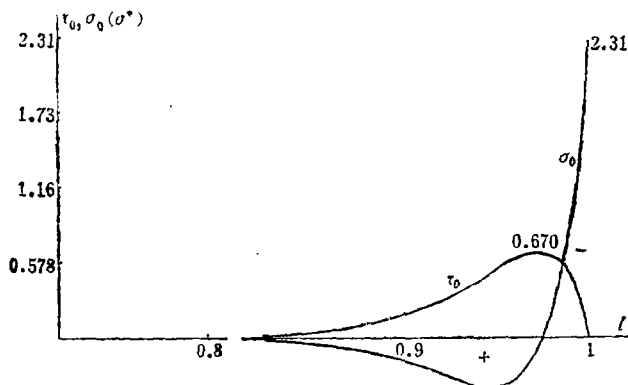
将 $\beta, \gamma, C$ 代入(5.8)与(5.10)式得 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ , 并列于表2

表 2

|            |                    |                    |                    |                     |                      |
|------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| $x$        | $l$                | $0.99l$            | $0.98l$            | $0.97l$             | $0.96l$              |
| $\tau_0$   | 0                  | $0.46501\sigma^*$  | $0.64609\sigma^*$  | $0.66993\sigma^*$   | $0.61436\sigma^*$    |
| $\sigma_0$ | $2.3127\sigma^*$   | $1.0304\sigma^*$   | $0.29893\sigma^*$  | $-0.089347\sigma^*$ | $-0.32221\sigma^*$   |
| $x$        | $0.94l$            | $0.92l$            | $0.90l$            | $0.85l$             | $0.80l$              |
| $\tau_0$   | $0.42919\sigma^*$  | $0.26075\sigma^*$  | $0.14498\sigma^*$  | $0.025186\sigma^*$  | $0.0028616\sigma^*$  |
| $\sigma^0$ | $-0.36507\sigma^*$ | $-0.24791\sigma^*$ | $-0.15683\sigma^*$ | $-0.033906\sigma^*$ | $-0.0053325\sigma^*$ |

表2中的 $\sigma^*$ 为离杆端较远的横截面内的最大弯曲应力, 即 $\sigma^* = 1.5M_0/bh_1^2$

按照图3与4中的 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 的方向,表2中的 $\tau_0$ 为正,故上下盖板的 $\tau_0$ 的方向如图2所示.因表2中的 $\sigma_0$ 在端部为正而其余各点为负,故上下盖板的 $\sigma_0$ 亦如图2所示.而在盖板端点的正应力约为最大弯曲应力 $\sigma^*$ 的2.3倍.在图8中,绘出了 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 的分布曲线.从这图可以看出, $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 分布在盖板端部的长度,约等于横截面高度 $4h$ 的 $3/5$ .由于这杆为通常的各向同性材料,可以预料到,杆端的局部效应将限于横截面高度的范围内.这正如Saint-Venant原理所表达的.从以上这两个数值例子可以看出,对于各向同性材料梁,其边缘效应比叠层复合材料梁更为部局化.



盖板与中心部分为相同的各向同性材料  $h_1=2h, l/h=16, \sigma^*=1.5M_0/bh^2$

图8 上盖板端的 $\tau_0$ 与 $\sigma_0$ 曲线

附录: 两个级数的和

对于  $\eta < p$  这情形

$$I \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} = \frac{1}{2i\sqrt{p^2 - \eta^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^2 + (\eta - i\sqrt{p^2 - \eta^2})} - \frac{1}{n^2 + (\eta + i\sqrt{p^2 - \eta^2})} \right] \quad (A.1)$$

并且  $\sqrt{\eta \pm i\sqrt{p^2 - \eta^2}} = \sqrt{(p+\eta)/2} \pm i\sqrt{(p-\eta)/2}$

用复变函数留数定理的计算结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi}{2z} \coth \pi z - \frac{1}{2z^2} \quad (A.2)$$

用(A.2)式计算(A.1)式中的两级数和,使等式两边的实数部分相等,得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} = \frac{\pi}{4p\sqrt{p^2 - \eta^2}} \cdot \frac{\psi \sinh 2\pi\beta + \beta \sin 2\pi\gamma}{\sinh^2 \pi\beta + \sin^2 \pi\gamma} - \frac{1}{2p^2} \quad (A.3)$$

式中  $\beta = \sqrt{(p+\eta)/2}, \gamma = \sqrt{(p-\eta)/2}$

$$I \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + 2\eta n^2 + p^2} = \frac{1}{2i\sqrt{p^2 - \eta^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 + (\eta - i\sqrt{p^2 - \eta^2})} - \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 + (\eta + i\sqrt{p^2 - \eta^2})} \right] \quad (A.4)$$

用复变函数留数定理的计算结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2 + z^2} = (-1)^{\frac{\pi z}{2}} \cdot \frac{\sinh \frac{\pi z}{l} x}{\sinh \pi z} \quad (A.5)$$

以(A.5)式计算(A.4)式中两级数和,使等式两边的实数部分相等,得:

$$\sum_{n=1} \frac{n \cos n \pi \sin \frac{n \pi x}{l}}{n^4 + 2 \eta n^2 + \rho^2} = \frac{\pi}{2 \sqrt{\rho^2 - \eta^2} (\sinh^2 \pi \beta + \sin^2 \pi \gamma)} \left\{ \cosh \frac{\pi \beta}{l} x \sin \frac{\pi \gamma}{l} x \right. \\ \left. \cdot \sinh \pi \beta \cos \pi \gamma - \sinh \frac{\pi \beta}{l} x \cos \frac{\pi \gamma}{l} x \cosh \pi \beta \sin \pi \gamma \right\} \quad (\text{A.6})$$

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Goland, M. and E. Reissner, The stresses in cemented joints, *Journal of Applied Mechanics*, *ASME*, 1 (1944).
- [ 2 ] Timoshenko, S., *The Approximate Solution of Two Dimensional Problems in Elasticity*, Collected Papers (1953).
- [ 3 ] 张福范, 拉伸杆的贴片所传递的应力, *上海力学*, 3 (1983).
- [ 4 ] 张福范, 双金属条整温器的接触热应力, *应用数学和力学*, 4, 3 (1983).

## Interlaminar Stresses of a Laminated Composite Bar under Bending( II )

Chang Fo-van

(Qinghua University, Beijing)

### Abstract

A laminated composite bar of rectangular cross section consists of a middle portion of one material as well as upper and lower identical cover plates of another material. Couples formed by linear bending stresses act at the ends of the middle portion of the bar to cause bending. Interlaminar stresses are to be found showing how the forces are transmitted through the glued surfaces to the cover plates.