

# 蠕动流中圆球阻力系数的入口效应\*

吴望一 R. 斯加拉克

(北京大学力学系) (美国哥伦比亚大学生物工程研究所)

(1984年5月22日收到)

## 摘 要

本文研究了圆球在半无穷长圆管入口处的蠕动流, 得到了速度分布, 压力分布和流函数的无穷级数形式的分析解. 采用配置法将无穷级数截断并确定出级数中各项系数, 求出了均匀入口流绕静止圆球以及圆球以瞬时速度在管内静止流体中运动这两种情形下圆球的阻力系数以及圆球表面上的应力分布. 结果表明, 当圆球在入口处运动时会遭受到较无穷圆管内为大的阻力. 本文还对配置法的收敛性进行了数值实验, 试验证明, 该法具有好的收敛性.

## 一、引 言

在微循环系统中毛细血管和小血管频繁分叉. 红细胞和白细胞在分叉处的流动阻力及其变形对理解微循环系统内的压力坡降及流动分布具有重要意义. 本文的目的是研究圆球在刚进入分叉管时入口段对其阻力的影响并求出圆球表面上的应力分布. 刚性圆球可以认为是白细胞的一种近似. 考虑白细胞的真实形状和其变形这是我们进一步正在研究的课题.

Lew 和 Fung<sup>[1]</sup>研究了低雷诺情形下半无穷长圆管内的入口流, 得到了级数形式的分析解. 然后用富氏级数近似地代替富氏积分并采用配置法定出了级数中的系数. 他们得到的初始段长度大约等于圆管半径的 1.3 倍. 最近, 本文的作者<sup>[2]</sup>用数值方法直接计算了解中的富氏积分, 得到了在数值上和[1]类似的结果. 我们得到的初始段长度约为圆管半径的 1.2 倍. 文[2]还通过数值实验说明了配置法具有很好的收敛性. 本文将采用类似于文[2]的方法.

若干作者研究过单个圆球在无穷长圆管的轴线上运动时的阻力. Haberman和Sayre<sup>[3]</sup>利用柱坐标系统中球坐标系统中 Stokes 流动方程的一般解得到了上述问题的分析解. Bohlin<sup>[4]</sup>采用推广的反射法得到了类似的结果. 当球柱半径之比不大于 0.6 时, 他的结果和 Haberman和Sayre更准确的结果附合得很好. Wang和Skalak<sup>[5]</sup>处理过无限多个球组成的直线球列在圆管中的流动问题. 当圆球间隔大于一倍圆管直径时, 所得结果已趋近于单个圆球的对应值. 最近, Leichberg<sup>[6]</sup>等人应用配置法处理了无穷长圆管中有限个圆球系列的蠕动流. 单个圆球的阻力是他们结果中的特例. 和Haberman和Sayre的解进行比较发现球柱半径之比一直到 0.7, 两者附合程度是相当好的.

\* 本文曾在第二届亚洲流体力学会议上宣读.

虽然半无穷长圆管中的入口流和单个圆球在无穷长圆管内的流动都有了较为充分的研究,但是半无穷长圆管入口段中有圆球存在时的流体运动还没有人研究过.本文采用与文[2]和[6]相似的强干扰理论和配置法得到了在静止流体中运动的圆球和均匀入口流绕固定不动的圆球这两种情形下的圆球阻力系数以及圆球表面上的应力分布,并讨论了方法的收敛性.

## 二、数学提法

考虑一半径为  $r_s$  的圆球以瞬时速度  $V$  沿轴向在一半无穷长的圆管内作缓慢运动,管内充满着粘性不可压缩流体,其流量为  $Q$ . 选取如图 1 所示的柱坐标系,坐标原点取在初始截面上. 在本文中我们自始至终采用无量纲表达形式,为此取  $R_0, U, \mu U/R_0, UR_0^2$  为长度,速度,压力和流函数的特征值. 其中,  $R_0$  是圆管的半径,  $U = Q/\pi R_0^2$  是圆管内流动的平均流速,  $\mu$  是流体的动力学粘性系数. 以它们为参考值得下列形式的 Stokes 流动的无量纲形式方程组:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

其中  $\mathbf{v}, p$  皆为无量纲化的速度矢量及压力函数,  $\nabla$  是哈密尔顿算子. 由于流动的轴对称性,可以引进流函数  $\psi$ , 它在柱坐标系中和径向速度分量  $v_R$ , 轴向速度分量  $v_z$  以及压力梯度的关系分别为:

$$v_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} (D^2 \psi), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (D^2 \psi) \quad (2.3)$$

其中  $D^2$  是广义轴对称 Stokes 算子, 它在柱坐标系统中的表达式为

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

对(2.1)式取旋度并利用(2.2)式得到流函数满足以下的四阶线性偏微分方程

$$D^2(D^2 \psi) = 0 \quad (2.5)$$

现在我们写出边界条件, 在圆管表面  $R=1$  上满足无滑移条件

$$v_z = 0, \quad \psi = \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

在初始截面  $z=0$  上速度等于指定的分布函数

$$v_z = f(R), \quad v_R = g(R) \quad (2.7)$$

其中  $f(R), g(R)$  是给定的已知函数.

在圆球表面  $r=a$  上满足

$$v_z = V, \quad v_R = 0 \quad (2.8)$$

注意  $a = r_s/R_0$  及  $V = V_s/U$  都是对  $R_0$  及  $U$  无量纲化后的量. 其中  $V$  是圆球运动的无量纲速度, 在无穷远  $z \rightarrow \infty$  处, 流动趋于泊肃叶解, 于是

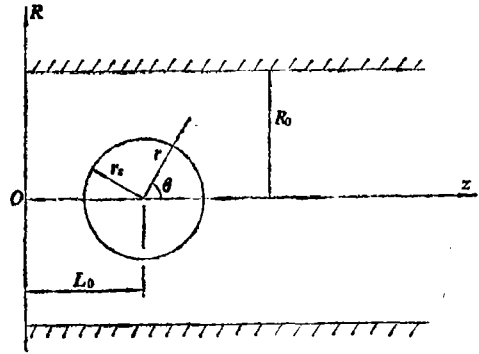


图 1

$$\psi = R^2 - \frac{1}{2}R^4 \quad (2.9)$$

由于问题的几何特性以及方程边界条件的线性性质, 我们将流函数写成两部分之和,

$$\psi = \psi_s + \psi_w \quad (2.10)$$

$\psi_s$  表示圆球产生的扰动, 它是方程 (2.5) 在球坐标系中所有简单分离变数解所组成的无穷级数, 首由 Sampson<sup>[7]</sup> 给出, 它的形式为:

$$\psi_s = \sum_{n=2}^{\infty} [C_n r^{-n+1} \tilde{I}_n(\xi) + D_n r^{-n+3} \tilde{I}_n(\xi)] \quad (2.11)$$

其中  $\xi = \cos\theta$ ,  $r$  和  $\theta$  是如图 1 所示的以球心为原点的球坐标,  $\tilde{I}_n(\xi)$  是  $n$  阶  $-1/2$  次的第一类 Gegenbauer 函数.  $C_n$ ,  $D_n$  是待定的系数, 需要在壁面及初始截面存在的条件下根据球面上的无滑移条件求出.  $\psi_w$  表示圆管壁面和初始截面产生的扰动. 根据文[1],  $\psi_w$  可写成  $\psi_{w_1}$  和  $\psi_{w_2}$  之和.  $\psi_{w_1}$  和  $\psi_{w_2}$  都是由柱坐标系中分离变数解组成的, 它们具有下列形式:

$$\psi_w = \psi_{w_1} + \psi_{w_2} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \psi_{w_1} = R^2 - \frac{1}{2}R^4 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n}(1+k_n z) \exp[-k_n z] k_n R J_1(k_n R) \\ + \int_0^{\infty} [A_1(t) R I_1(Rt) + B_1(t) R^2 I_0(Rt)] \cos(zt) dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \psi_{w_2} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n z \exp[-q_n z] q_n R J_1(q_n R) \\ + \int_0^{\infty} [A_2(t) R I_1(Rt) + B_2(t) R^2 I_0(Rt)] \sin(zt) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

这里,  $R^2 - R^4/2$  代表泊肃叶流动部分,  $J_n$ ,  $I_n$  分别是  $n$  阶第一类 Bessel 函数和变型 Bessel 函数,  $E_{1n}$ ,  $E_{2n}$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  是级数中待定的系数; 常数  $k_n$ ,  $q_n$  的意义从下面的讨论中立即可以看出.

根据 (2.2) 式, 与  $\psi_{w_1}$ ,  $\psi_{w_2}$  对应的速度分量分别为:

$$\left. \begin{aligned} v_{z_1} = 2(1-R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n}(1+k_n z) \exp[-k_n z] k_n^2 J_0(k_n R) \\ + \int_0^{\infty} \{A_1(t) t I_0(Rt) + B_1(t) [Rt I_1(Rt) + 2I_0(Rt)]\} \cos(zt) dt \\ v_{R_1} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} k_n^2 z \exp[-k_n z] J_1(k_n R) \\ + \int_0^{\infty} [A_1(t) I_1(Rt) + B_1(t) R I_0(Rt)] t \sin(zt) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 v_{z_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^3 z \exp[-q_n z] J_0(q_n R) \\
 &\quad + \int_0^{\infty} \{A_2(t) t I_0(Rt) + B_2(t) [Rt I_1(Rt) + 2I_0(Rt)]\} \sin(zt) dt \\
 v_{R_2} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^2 (q_n z - 1) \exp[-q_n z] J_1(q_n R) \\
 &\quad - \int_0^{\infty} [A_2(t) I_1(Rt) + B_2(t) R I_0(Rt)] t \cos(zt) dt
 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

由(2.15)及(2.16)不难看出,  $\psi_{w_1}$ 及 $\psi_{w_2}$ 分别代表初始截面上只有轴向速度分量 $v_{z_1}$ 而 $v_{R_1}=0$ 的情形以及初始截面上只有径向速度分量 $v_{R_2}$ 而 $v_{z_2}=0$ 的情形. 令下标为 $w_1$ 的解满足 $R=1$ 处 $v_{z_1}=0$ 的边界条件, 下标为 $w_2$ 的解满足 $R=1$ 处 $\psi_{w_2}=0$ 的条件我们得

$$B_1(t) = - \frac{t I_0(t)}{t I_1(t) + 2I_0(t)} A_1(t), \quad J_0(k_n) = 0 \quad (2.17)$$

及

$$B_2(t) = - \frac{I_1(t)}{I_0(t)} A_2(t), \quad J_1(q_n) = 0 \quad (2.18)$$

由此可见,  $k_n$ 和 $q_n$ 分别为零阶和一阶 Bessel 函数  $J_0$  和  $J_1$  的零点. 将(2.17), (2.18)式代入(2.13)~(2.16)式并考虑到(2.10), (2.12)及(2.3)式我们有:

$$\begin{aligned}
 \psi &= R^2 - \frac{1}{2} R^4 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} (1 + k_n z) \exp[-k_n z] k_n R J_1(k_n R) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n z \exp[-q_n z] q_n R J_1(q_n R) + \int_0^{\infty} A_1(t) [R I_1(Rt) \\
 &\quad - \frac{R^2 t I_0(t)}{t I_1(t) + 2I_0(t)} I_0(Rt)] \cos(zt) dt + \int_0^{\infty} A_2(t) [R I_1(Rt) \\
 &\quad - \frac{I_1(t)}{I_0(t)} R^2 I_0(Rt)] \sin(zt) dt + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(3)}(R, z-L) + D_n F_n^{(4)}(R, z-L)]
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 v_z &= 2(1 - R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} (1 + k_n z) \exp[-k_n z] k_n^2 J_0(k_n R) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^3 z \exp[-q_n z] J_0(q_n R) \\
 &\quad + \int_0^{\infty} A_1(t) [t I_0(Rt) - \frac{Rt I_1(Rt) + 2I_0(Rt)}{t I_1(t) + 2I_0(t)} t I_0(t)] \cos(zt) dt \\
 &\quad + \int_0^{\infty} A_2(t) [t I_0(Rt) - \frac{I_1(t)}{I_0(t)} (Rt I_1(Rt) + 2I_0(Rt))] \sin(zt) dt \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(1)}(R, z-L) + D_n F_n^{(2)}(R, z-L)]
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
 v_R = & \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} k_n^3 z \exp[-k_n z] J_1(k_n R) + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^2 (q_n z - 1) \exp[-q_n z] J_1(q_n R) \\
 & + \int_0^{\infty} A_1(t) \left[ I_1(Rt) - \frac{t I_0(t)}{t I_1(t) + 2 I_0(t)} R I_0(Rt) \right] t \sin(zt) dt \\
 & - \int_0^{\infty} A_2(t) \left[ I_1(Rt) - \frac{I_1(t)}{I_0(t)} R I_0(Rt) \right] t \cos(zt) dt \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(6)}(R, z-L) + D_n F_n^{(6)}(R, z-L)] \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p = p_0 - 8z + & \int_0^{\infty} \left[ - \frac{t I_0(t)}{t I_1(t) + 2 I_0(t)} A_1(t) \sin(zt) \right. \\
 & \left. + \frac{I_1(t)}{I_0(t)} A_2(t) \cos(zt) \right] 2t I_0(Rt) dt \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} \exp[-k_n z] 2k_n^3 J_0(k_n R) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} \exp[-q_n z] 2q_n^3 J_0(q_n R) + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \frac{4n-6}{n} F_{n-1}^{(1)}(R, z-L) \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

其中,  $L=L_0/R_0$  位于圆球中心(图 1),  $p_0$  是参考压力值,  $F_n^{(k)}(R, z) (k=1, \dots, 6)$  的表达式为:

$$\left. \begin{aligned}
 F_n^{(1)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n+1}{2}} P_n \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 F_n^{(2)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \left\{ P_n \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] + 2 \tilde{I}_n \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \right\} \\
 F_n^{(3)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \tilde{I}_n \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 F_n^{(4)}(R, z) &= (R^2 + z^2)^{-\frac{n-3}{2}} \tilde{I}_n \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 F_n^{(5)}(R, z) &= (n+1)(R^2 + z^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{R} \tilde{I}_{n+1} \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 F_n^{(6)}(R, z) &= (n+1)(R^2 + z^2)^{-\frac{n-2}{2}} \frac{1}{R} \tilde{I}_{n+1} \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \\
 &\quad - 2z(R^2 + z^2)^{-\frac{n-1}{2}} \frac{1}{R} \tilde{I}_n \left[ \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]
 \end{aligned} \right\} \tag{2.23}$$

这里  $P_n$  是  $n$  阶勒让德多项式, 在推导中我们考虑到勒让德多项式和 Gegenbauer 函数的性质以及球坐标  $(r, \theta)$  和柱坐标  $(R, z)$  之间的下列关系式

$$z_1 = z - L, r = \sqrt{R^2 + z_1^2}, \xi = \cos \theta = \frac{z_1}{r}, \sin \theta = \frac{R}{r}, \frac{\partial \xi}{\partial R} = -\frac{z_1 R}{r^3}, \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{R^2}{r^3} \tag{2.24}$$

令(2.19), (2.20)式满足边界条件(2.6), 我们得到

$$\int_0^{\infty} A_1(t) \left[ \frac{t[I_1^2(t) - I_0^2(t)] + 2I_0(t)I_1(t)}{tI_1(t) + 2I_0(t)} \right] \cos(zt) dt$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} F_{1n}(1 + k_n z) \exp[-k_n z] k_n J_1(k_n) - \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(3)}(1, z-L) + D_n F_n^{(4)}(1, z-L)]$$

$$\int_0^{\infty} A_2(t) \left[ \frac{t[I_0^2(t) - I_1^2(t)] - 2I_0(t)I_1(t)}{I_0(t)} \right] \sin(zt) dt$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} q_n^3 z \exp[-q_n z] J_0(q_n) - \sum_{n=2}^{\infty} [C_n F_n^{(1)}(1, z-L) + D_n F_n^{(2)}(1, z-L)]$$

将上述富氏积分变换反演之得

$$\left. \begin{aligned} A_1(t) &= - \sum_{n=2}^{\infty} [C_n g^{(1)}(t) GC_n^{(3)}(t) + D_n g^{(1)}(t) GC_n^{(4)}(t)] - \sum_{n=1}^{\infty} E_{1n} g^{(1)}(t) GC_n^{(3)}(t) \\ A_2(t) &= - \sum_{n=2}^{\infty} [C_n g^{(2)}(t) GS_n^{(1)}(t) + D_n g^{(2)}(t) GS_n^{(2)}(t)] - \sum_{n=1}^{\infty} E_{2n} g^{(2)}(t) GS_n^{(3)}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

其中

$$g^{(1)}(t) = - \frac{tI_1(t) + 2I_0(t)}{H(t)}, \quad g^{(2)}(t) = \frac{I_0(t)}{H(t)}$$

$$H(t) = t[I_0^2(t) - I_1^2(t)] - 2I_0(t)I_1(t)$$

$$\left. \begin{aligned} GC_n^{(k)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n^{(k)}(z_1) \cos(zt) dz \\ GS_n^{(k)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n^{(k)}(z_1) \sin(zt) dz \\ f_n^{(k)}(z_1) &= F_n^{(k)}(1, z-L) \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (2.26)$$

$$\left. \begin{aligned} GC_n^{(3)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n^{(3)}(z) \cos(zt) dz, \quad GC_n^{(4)}(t) = \frac{4}{\pi} \frac{k_n^4 J_1(k_n)}{(k_n^2 + t^2)^2} \\ GS_n^{(3)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n^{(3)}(z) \sin(zt) dz, \quad GS_n^{(4)}(t) = \frac{4}{\pi} \frac{q_n^4 t J_0(q_n)}{(q_n^2 + t^2)^2} \\ f_n^{(3)}(z) &= k_n J_1(k_n) (1 + k_n z) \exp[-k_n z] \\ f_n^{(4)}(z) &= q_n^3 z \exp[-q_n z] J_0(q_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

附录中详细地列出了求(2.26)中四个无穷积分的公式。将 $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$ 的表达式(2.25)代入速度、流函数和压力的表达式(2.19)~(2.22)中去, 经过推导和整理后得:

$$\begin{aligned}
 v_z(R, z) &= 2(1-R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(1)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(1)}(R, z)] \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n S_n^{(1)}(R, z) + D_n T_n^{(1)}(R, z)] \\
 v_R(R, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(2)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R, z)] \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n S_n^{(2)}(R, z) + D_n T_n^{(2)}(R, z)] \\
 \psi(R, z) &= R^2 - \frac{1}{2}R^4 + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(3)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(3)}(R, z)] \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n S_n^{(3)}(R, z) + D_n T_n^{(3)}(R, z)] \\
 p(R, z) &= p_0 - 8z + \sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(4)}(R, z) + E_{2n} W_{2n}^{(4)}(R, z)] \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n S_n^{(4)}(R, z) + D_n T_n^{(4)}(R, z)]
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

这里

$$\begin{aligned}
 W_{1n}^{(1)}(R, z) &= (1+k_n z) \exp[-k_n z] k_n^2 J_0(k_n R) + \int_0^{\infty} h_1^{(1)}(R, t) GC_n^{(5)}(t) \cos(zt) dt \\
 W_{2n}^{(1)}(R, z) &= q_n z \exp[-q_n z] q_n^2 J_0(q_n R) + \int_0^{\infty} h_2^{(1)}(R, t) GS_n^{(6)}(t) \sin(zt) dt \\
 S_n^{(1)}(R, z) &= F_n^{(1)}(R, z_1) + \int_0^{\infty} [h_1^{(1)}(R, t) GC_n^{(3)}(t) \cos(zt) + h_2^{(1)}(R, t) GS_n^{(1)}(t) \sin(zt)] dt \\
 T_n^{(1)}(R, z) &= F_n^{(2)}(R, z_1) + \int_0^{\infty} [h_1^{(1)}(R, t) GC_n^{(4)}(t) \cos(zt) + h_2^{(1)}(R, t) GS_n^{(2)}(t) \sin(zt)] dt \\
 W_{1n}^{(2)}(R, z) &= k_n^2 z \exp[-k_n z] J_1(k_n R) + \int_0^{\infty} h_1^{(2)}(R, t) GC_n^{(6)}(t) \sin(zt) dt \\
 W_{2n}^{(2)}(R, z) &= q_n^2 (q_n z - 1) \exp[-q_n z] J_1(q_n R) - \int_0^{\infty} h_2^{(2)}(R, t) GS_n^{(6)}(t) \cos(zt) dt \\
 S_n^{(2)}(R, z) &= F_n^{(5)}(R, z_1) + \int_0^{\infty} [h_1^{(2)}(R, t) GC_n^{(3)}(t) \sin(zt) - h_2^{(2)}(R, t) GS_n^{(1)}(t) \cos(zt)] dt \\
 T_n^{(2)}(R, z) &= F_n^{(6)}(R, z_1) + \int_0^{\infty} [h_1^{(2)}(R, t) GC_n^{(4)}(t) \sin(zt) - h_2^{(2)}(R, t) GS_n^{(2)}(t) \cos(zt)] dt \\
 W_{1n}^{(3)}(R, z) &= (1+k_n z) \exp[-k_n z] k_n R J_1(k_n R) + \int_0^{\infty} h_1^{(3)}(R, t) GC_n^{(6)}(t) \cos(zt) dt \\
 W_{2n}^{(3)}(R, z) &= q_n z \exp[-q_n z] q_n R J_1(q_n R) + \int_0^{\infty} h_2^{(3)}(R, t) GS_n^{(6)}(t) \sin(zt) dt \\
 S_n^{(3)}(R, z) &= F_n^{(3)}(R, z_1) + \int_0^{\infty} [h_1^{(3)}(R, t) GC_n^{(3)}(t) \cos(zt) + h_2^{(3)}(R, t) GS_n^{(1)}(t) \sin(zt)] dt \\
 T_n^{(3)}(R, z) &= F_n^{(4)}(R, z_1) + \int_0^{\infty} [h_1^{(3)}(R, t) GC_n^{(4)}(t) \cos(zt) + h_2^{(3)}(R, t) GS_n^{(2)}(t) \sin(zt)] dt \\
 W_{1n}^{(4)}(R, z) &= 2k_n^3 \exp[-k_n z] J_0(k_n R) + \int_0^{\infty} h_1^{(4)}(R, t) GC_n^{(6)}(t) \sin(zt) dt \\
 W_{2n}^{(4)}(R, z) &= 2q_n^3 \exp[-q_n z] J_0(q_n R) - \int_0^{\infty} h_2^{(4)}(R, t) GS_n^{(6)}(t) \cos(zt) dt \\
 S_n^{(4)}(R, z) &= \int_0^{\infty} [h_1^{(4)}(R, t) GC_n^{(3)}(t) \sin(zt) - h_2^{(4)}(R, t) GS_n^{(1)}(t) \cos(zt)] dt \\
 T_n^{(4)}(R, z) &= \int_0^{\infty} [h_1^{(4)}(R, t) GC_n^{(4)}(t) \sin(zt) - h_2^{(4)}(R, t) GS_n^{(2)}(t) \cos(zt)] dt \\
 &\quad + \frac{4n-6}{n} F_n^{(1)}(R, z-L)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
 h_1^{(1)}(R, t) &= \frac{t^2 I_1(t)}{H(t)} I_0(Rt) - \frac{t^2 I_0(t)}{H(t)} R I_1(Rt) \\
 h_1^{(2)}(R, t) &= -\frac{t^2 I_0(t)}{H(t)} R I_0(Rt) + \frac{t[2I_0(t) + tI_1(t)]}{H(t)} I_1(Rt) \\
 h_1^{(3)}(R, t) &= \frac{R}{t} h_1^{(2)}(R, t), \quad h_1^{(4)}(R, t) = -\frac{2t^2 I_0(t)}{H(t)} I_0(Rt) \\
 h_2^{(1)}(R, t) &= \frac{2I_1(t) - tI_0(t)}{H(t)} I_0(Rt) + \frac{tI_1(t)}{H(t)} R I_1(Rt) \\
 h_2^{(2)}(R, t) &= \frac{tI_1(t)}{H(t)} R I_0(Rt) - \frac{tI_0(t)}{H(t)} I_1(Rt) \\
 h_2^{(3)}(R, t) &= \frac{R}{t} h_2^{(2)}(R, t), \quad h_2^{(4)}(R, t) = \frac{2tI_1(t)}{H(t)} I_0(Rt)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$H(t) = t[I_0'(t) - I_1'(t)] - 2I_0(t)I_1(t)$$

对(2.29)中包含的各个积分必须进行数值计算。

表达式(2.28)是方程(2.5)的解, 它满足圆管壁面上以及无穷远处的边界条件。至于公式(2.28)中的系数 $E_{1n}$ ,  $E_{2n}$ 以及 $C_n$ ,  $D_n$ 则应该根据边界条件(2.7)和(2.8)定出。令解满足边界条件(2.7)、(2.8)得下列确定这些系数的方程组:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(1)}(R, 0) + E_{2n} W_{2n}^{(1)}(R, 0)] + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n S_n^{(1)}(R, 0) + D_n T_n^{(1)}(R, 0)] \\
 &= f(R) - 2(1 - R^2) \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(2)}(R, 0) + E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R, 0)] + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n S_n^{(2)}(R, 0) + D_n T_n^{(2)}(R, 0)] \\
 &= g(R) \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(1)}(R_n, z_n) + E_{2n} W_{2n}^{(1)}(R_n, z_n)] + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n S_n^{(1)}(R_n, z_n) + D_n T_n^{(1)}(R_n, z_n)] \\
 &= V - 2(1 - R^2) \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} [E_{1n} W_{1n}^{(2)}(R_n, z_n) + E_{2n} W_{2n}^{(2)}(R_n, z_n)] + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n S_n^{(2)}(R_n, z_n) + D_n T_n^{(2)}(R_n, z_n)] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

式中 $R_n$ ,  $z_n$ 是圆球上各点的坐标。这是一个确定 $E_{1n}$ ,  $E_{2n}$ ,  $C_n$ 和 $D_n$ 的无限阶线性代数方程组, 不可能用数值方法精确地将其解出。配置法的基本思想就是将(2.28)中的无穷级数截断, 用有限项近似地代替无限项, 然后在初始截面和圆球上适当选取的有限个离散点上满足边界条件。如果在初始截面上取 $m$ 个点, 圆球上取 $n$ 个点, 则我们得到 $2(m+n)$ 个线性代数方程组用来确定 $2(m+n)$ 个未知系数 $E_{1n}$ ,  $E_{2n}$ 以及 $C_n$ ,  $D_n$ 。此线性方程可以采用任何一种标准方法求解。一旦这些系数被确定出来, 速度分布, 流函数和压力分布也就完全知道。显然, 增加 $m$ 和 $n$ 的阶次可以改善解的精度。当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 截断误差趋于零, 这时解的精度仅取决于(2.29)式中数值积分的精度。

流体作用在圆球上的力可以用下式求出(Happel和Brenner<sup>[8]</sup>1965 p.115)



$$F = \pi \int_0^\pi r^3 \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{D^2 \psi}{r^2 \sin^2 \theta} \right] r d\theta \quad (2.32)$$

将上述积分计算出来并利用 Gegenbauer 函数的正交性可以得到下列简单的关系式

$$F = 4\pi D_2 \quad (2.33)$$

总阻力可以通过两个阻力系数  $\lambda^{(V)}$  和  $\lambda^{(U)}$  表示出来。  $\lambda^{(V)}$  表示圆球沿管轴方向以速度  $V$  在静止流体中运动时的阻力系数，  $\lambda^{(U)}$  表示最大流速为  $U_{\max} = 2U$  的管流绕过静止圆球时圆球的阻力系数。

当圆球以速度  $V$  运动时，阻力可写成

$$F = 4\pi D_2^{(V)} = 6\pi a V \lambda^{(V)} \quad (2.34)$$

由此得

$$\lambda^{(V)} = \frac{D_2^{(V)}}{1.5aV} \quad (2.35)$$

这里  $\lambda^{(V)}$  代表初始截面及管壁存在时作用在圆球上的阻力和同一条件下圆球在无界流体中运动时所受到的阻力之比。

当流体以最大速度  $U_{\max}$  流过圆球时，阻力为：

$$F = 4\pi D_2^{(U)} = 6\pi a U_{\max} \lambda^{(U)} \quad (U_{\max} = 2U) \quad (2.36)$$

$$\lambda^{(U)} = \frac{D_2^{(U)}}{1.5aU_{\max}} \quad (2.37)$$

$\lambda^{(U)}$  代表界面存在时和不存在时流体作用在静止圆球上的阻力之比。

如果流体和圆球都在运动，则根据方程和边界条件的线性性质可知圆球所受的阻力为上述两种阻力之和，即

$$F = 4\pi D_2 = 4\pi [D_2^{(V)} + D_2^{(U)}] \quad (2.38)$$

$$F = 6\pi a [V \lambda^{(V)} + U \lambda^{(U)}] \quad (2.39)$$

球面上的应力分布对于研究弹性或粘弹性圆球变形是必须具有的初始资料。根据应力张量和变形速度张量的关系可以推出球面上法应力  $p_{rr}$  和切应力  $p_{r\theta}$  分别为

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p \\ p_{r\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \left( \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \sin\theta \cos\theta + \frac{\partial v_R}{\partial z} \cos^2\theta - \frac{\partial v_z}{\partial R} \sin^2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

有了压力分布以及速度分布  $v_R(R, z)$ ,  $v_z(R, z)$ , 不难根据 (2.40) 式算出球面上法向应力分布和切向应力分布。

### 三、圆球在半无穷圆管的静止流体中作轴对称运动问题的解

本节考虑圆球以速度  $V$  沿管轴方向在半无穷长圆管的静止流体中作轴对称运动的问题。此时  $U=0$ , 特征速度应以  $V$  代替。同时在入口截面  $z=0$  处  $f(R)=g(R)=0$ , 这相当于圆管的端缘  $z=0$  是封闭的, 可以把它看作固定边界。式 (2.31) 前三式中的右边部分变为  $f(R) - 2(1-R^2)=0$ ,  $g(R)=0$ ,  $V - 2(1-R^2)=1$ 。

将初始截面  $(0,1)$  分成  $n$  等分。为了避免  $v_R$  的方程自动满足, 我们用略大于 0 的点, 例如



表3a 法向应力分布的收敛性试验(L=0.8)

	M	1	2	3	4	5	6	7	8
a=0.1	4		-12.82		-0.0032	0.0032		13.02	
	8	-16.70	-12.82	-6.97	-0.0032	0.0032	7.02	13.02	17.05
	16	-16.70	-12.82	-6.97	-0.0032	0.0032	7.02	13.01	17.04
a=0.2	4		-7.92		-0.0020	0.0020		8.33	
	8	-10.11	-7.91	-4.38	-0.0020	0.0020	4.47	8.32	11.03
	16	-10.11	-7.91	-4.38	-0.0020	0.0020	4.47	8.32	11.03
a=0.3	4		-7.38		-0.0020	0.0020		7.98	
	8	-8.92	-7.30	-4.23	-0.0020	0.0020	4.28	7.92	10.90
	16	-8.93	-7.30	-4.23	-0.0020	0.0020	4.28	7.91	10.88
a=0.4	4		-9.26		-0.0026	0.0026		10.00	
	8	-10.30	-8.99	-5.58	-0.0027	0.0027	5.49	9.79	14.47
	16	-10.30	-8.99	-5.58	-0.0027	0.0027	5.48	9.77	14.44
a=0.5	4		-14.32		-0.0042	0.0042		15.20	
	8	-14.79	-13.72	-9.19	-0.0045	0.0045	8.80	14.77	24.22
	16	-14.78	-13.73	-9.18	-0.0045	0.0045	8.79	14.73	24.13
a=0.6	4		-23.98		-0.0077	0.0077		25.44	
	8	-24.69	-23.83	-17.19	-0.0089	0.0089	16.39	25.52	48.87
	16	-24.53	-23.87	-17.18	-0.0089	0.0089	16.41	25.49	48.55
a=0.7	4		-37.42		-0.0014	0.0014		40.67	
	8	-42.54	-41.70	-33.25	-0.0018	0.0018	31.79	45.48	119.80
	16	-41.70	-42.29	-33.13	-0.0018	0.0018	32.04	46.07	121.38

表3b 切向应力分布的收敛性试验(L=0.8)

	M	1	2	3	4	5	6	7	8
a=0.1	4		13.43		19.35	19.35		13.63	
	8	7.19	13.43	17.75	19.35	19.35	17.89	13.63	7.34
	16	7.19	13.43	17.75	19.35	19.35	17.89	13.63	7.34
a=0.2	4		8.78		13.27	13.27		9.30	
	8	4.56	8.78	11.98	13.28	13.28	12.27	9.30	5.01
	16	4.56	8.78	11.98	13.27	13.27	12.26	9.30	5.01
a=0.3	4		7.76		12.59	12.59		8.80	
	8	3.81	7.76	11.15	12.61	12.61	11.55	8.80	4.94
	16	3.82	7.76	11.14	12.61	12.61	11.55	8.79	4.94
a=0.4	4		7.67		13.77	13.77		9.60	
	8	3.50	7.70	11.92	13.87	13.87	12.39	9.61	6.08
	16	3.50	7.70	11.92	13.87	13.87	12.38	9.60	6.08
a=0.5	4		7.81		16.36	16.36		11.25	
	8	3.27	8.03	13.81	16.74	16.74	14.26	11.50	9.02
	16	3.28	8.03	13.81	16.74	16.74	14.24	11.48	9.02
a=0.6	4		7.36		20.22	20.22		13.05	
	8	2.82	8.37	16.63	21.61	21.61	17.00	14.83	16.21
	16	2.91	8.33	16.66	21.61	21.61	16.95	14.83	16.31
a=0.7	4		4.89		24.37	24.37		12.01	
	8	0.92	8.07	19.13	28.16	28.16	19.66	20.16	36.42
	16	1.99	7.64	19.43	28.30	28.30	19.40	20.95	40.62

\* M是级数项数, 1~8是等分点.

表4

不同 $\alpha$ 和 $L$ 的阻力系数 $\lambda(\nu)$

$\alpha$	$L=0.2$	$L=0.3$	$L=0.4$	$L=0.5$	$L=0.6$	$L=0.7$	$L=0.8$	$L=0.9$	$L=1.0$
0.1	2.1298	1.5830	1.4084	1.3313	1.2937	1.2750	1.2657	1.2612	1.2591
0.2		3.2620	2.2306	1.9137	1.7795	1.7168	1.6866	1.6721	1.6653
0.3			4.5333	3.0689	2.6375	2.4621	2.3830	2.3457	2.3282
0.4				6.1691	4.3261	3.8033	3.5982	3.5074	3.4657
0.5					8.5912	6.4464	5.8574	5.6305	5.5325
0.6						12.671	10.371	9.7480	9.5134
0.7							20.164	18.003	17.422
0.8								33.197	31.774
0.9									63.596

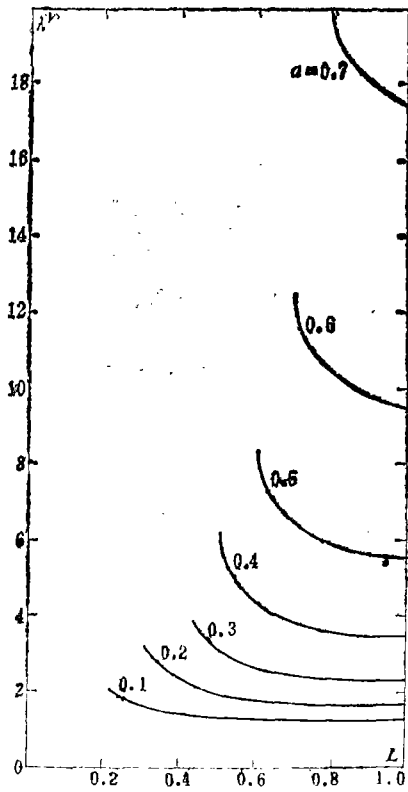
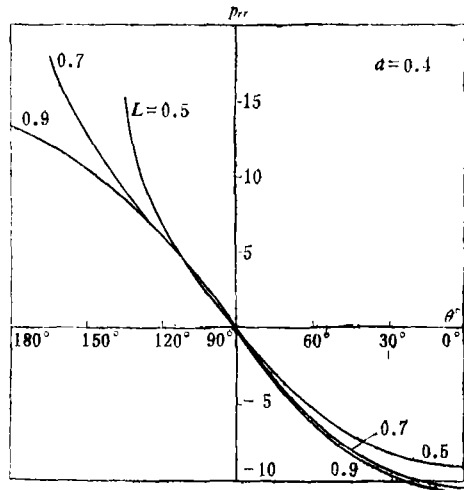
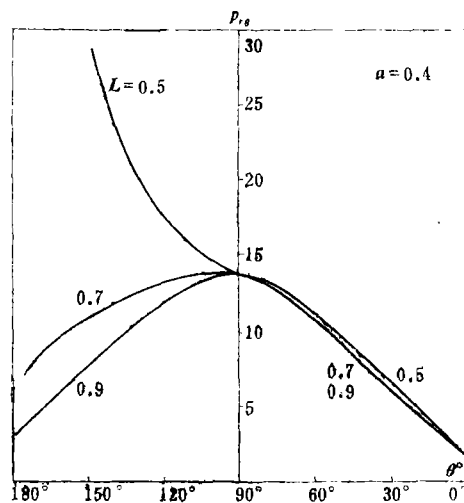


图 2



法向应力



切向应力

图 3

### 四、均匀入口流绕静止圆球问题的解

在方程(2.31)中, 令  $f(R)=1$ ,  $g(R)=0$ ,  $V=0$ , 即得解均匀入口流绕静止圆球问题所须的线性代数方程组。

初始截面和球面上点的划分以及有关圆球顶点  $\theta=\pi/2$  的讨论和第三节完全一样, 不再赘述。下面列举结果。

表5  $\delta$ 的收敛性试验( $L=1$ )

	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$
$\delta=0.8$	1.2161	1.5759	2.1289	3.0198	4.5320	7.2330	12.1478	20.0760	33.7069
$\delta=0.1$	1.2161	1.5759	2.1289	3.0198	4.5320	7.2330	12.1478	20.0764	35.3059
$\delta=0.01$	1.2161	1.5759	2.1289	3.0198	4.5320	7.2330	12.1478	20.0764	35.3313

表6 不同 $\alpha$ 的阻力系数 $\lambda^{(U)}$ 的收敛性试验( $L=1$ )

$M$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$
2	1.210	1.568	2.132	3.121	5.227	12.78	-40.74	-7.981
4	1.216	1.576	2.129	3.019	4.511	7.028	10.73	13.55
6	1.216	1.576	2.129	3.021	4.534	7.238	12.20	20.45
8				3.020	4.533	7.234	12.15	19.87
10				3.020	4.532	7.233	12.15	20.08
12					4.532	7.232	12.14	20.04
14						7.232	12.14	20.06
16							12.14	20.05
18								20.05

表7a 法向应力分布的收敛性试验( $L=0.8$ )

	$M$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha=0.1$	4		27.36		0.0064	-0.0064		-23.72	
	8	36.45	27.36	14.41	0.0064	-0.0064	-13.40	-23.73	-29.93
	16	36.45	27.36	14.41	0.0064	-0.0064	-13.40	-23.73	-29.93
$\alpha=0.2$	4		19.29		0.0045	-0.0045		-16.52	
	8	25.84	19.29	10.17	0.0045	-0.0045	-9.56	-16.55	-20.11
	16	25.84	19.29	10.17	0.0045	-0.0045	-9.55	-16.55	-20.10
$\alpha=0.3$	4		19.00		0.0047	-0.0047		-17.18	
	8	25.18	18.96	10.20	0.0047	-0.0047	-10.03	-17.21	-20.58
	16	25.18	18.96	10.20	0.0047	-0.0047	-10.02	-17.19	-20.55
$\alpha=0.4$	4		22.62		0.0059	-0.0059		-21.56	
	8	28.90	22.40	12.57	0.0059	-0.0059	-12.71	-21.52	-26.37
	16	28.90	22.41	12.57	0.0059	-0.0059	-12.70	-21.49	-26.32
$\alpha=0.5$	4		30.94		0.0085	-0.0085		-30.36	
	8	37.41	30.37	18.13	0.0087	-0.0087	-18.30	-30.19	-39.71
	16	37.39	30.39	18.13	0.0087	-0.0087	-18.28	-30.12	-39.59
$\alpha=0.6$	4		45.68		0.0136	-0.0136		-45.57	
	8	54.27	45.60	29.44	0.0146	-0.0146	-29.25	-46.24	-69.67
	16	53.16	45.70	29.41	0.0147	-0.0147	-29.22	-46.14	-69.38
$\alpha=0.7$	4		65.00		0.0220	-0.0220		-66.13	
	8	79.44	70.68	50.30	0.0262	-0.0262	-49.26	-73.37	-147.80
	16	78.52	71.40	50.17	0.0265	-0.0265	-49.44	-73.86	-149.71

表7b 切向应力分布的收敛性试验( $L=0.8$ )

	$M$	1	2	3	4	5	6	7	8
$a=0.1$	4		-26.36		-34.85	-34.85		-22.55	
	8	-14.57	-26.36	-33.42	-34.87	-34.86	-30.86	-22.56	-11.75
	16	-14.57	-26.36	-33.42	-34.86	-34.86	-30.86	-22.55	-11.74
$a=0.2$	4		-16.89		-22.08	-22.08		-13.56	
	8	-9.44	-16.89	-21.23	-22.09	-22.09	-19.31	-13.56	-6.69
	16	-9.45	-16.89	-21.23	-22.09	-22.09	-19.31	-13.55	-6.68
$a=0.3$	4		-14.17		-19.05	-19.05		-11.49	
	8	-7.95	-14.17	-17.98	-19.06	-19.06	-16.77	-11.47	-5.53
	16	-7.95	-14.17	-17.98	-19.06	-19.06	-16.76	-11.46	-5.53
$a=0.4$	4		-13.20		-18.99	-18.99		-11.51	
	8	-7.31	-13.24	-17.40	-19.05	-19.05	-16.83	-11.45	-6.10
	16	-7.32	-13.24	-17.40	-19.05	-19.05	-16.81	-11.42	-6.10
$a=0.5$	4		-12.75		-20.76	-20.75		-12.67	
	8	-6.89	-12.98	-18.39	-21.06	-21.07	-18.27	-12.74	-8.81
	16	-6.90	-12.98	-18.39	-21.07	-21.07	-18.24	-12.69	-8.82
$a=0.6$	4		-11.68		-23.73	-23.73		-14.02	
	8	-6.24	-12.77	-20.45	-25.09	-25.09	-20.57	-15.57	-15.95
	16	-6.35	-12.73	-20.47	-25.12	-25.12	-20.54	-15.49	-16.10
$a=0.7$	4		-8.12		-25.82	-25.82		-12.20	
	8	-4.02	-11.79	-21.75	-30.10	-30.10	-22.28	-20.39	-36.12
	16	-5.18	-11.34	-22.07	-30.28	-30.28	-22.03	-21.07	-40.45

表8 不同 $a$ 和 $L$ 的阻力系数 $\lambda^{(U)}$ 

$a$	$L=0.2$	$L=0.3$	$L=0.4$	$L=0.5$	$L=0.6$	$L=0.7$	$L=0.8$	$L=0.9$	$L=1.0$
0.1	1.2124	1.0232	1.0190	1.0553	1.0994	1.1400	1.1731	1.1981	1.2181
0.2		1.9790	1.5549	1.4780	1.4798	1.5040	1.5320	1.5565	1.5759
0.3			2.8833	2.2440	2.1064	2.0818	2.0916	2.1103	2.1289
0.4				4.0726	3.2427	3.0547	3.0097	3.0080	3.0198
0.5					5.8191	4.8329	4.6057	4.5428	4.5320
0.6						8.6374	7.5633	7.3077	7.2330
0.7							13.421	12.400	12.148
0.8								20.762	20.076
0.9									35.331

表5表明, 当 $\delta=0.01^\circ$ 时, 阻力系数和运动圆球情形一样也收敛到五位有效数字( $a=0.9$ 例外, 收敛到三位有效数字)。我们对 $L=1$ 时不同圆球半径对收敛速度的影响进行了数值试验, 结果列于表6中。考察这些结果表明, 离初始截面越远, 收敛得越快。当圆球向初始截面靠近时, 收敛速度变慢, 例如 $a=0.8$ 时, 须要18个点才能收敛到四位有效数字的结果。我们也试验了球面上应力分布的收敛性, 结果列举在表7中。和运动圆球情形一样, 它们也收敛得不错。不同 $L$ 及 $a$ 下的 $\lambda^{(U)}$ 画在图4中并列于表8中。图5画出了 $a=0.4$  ( $L=0.5, 0.7, 0.9$ )时法向应力分布和切向应力分布。

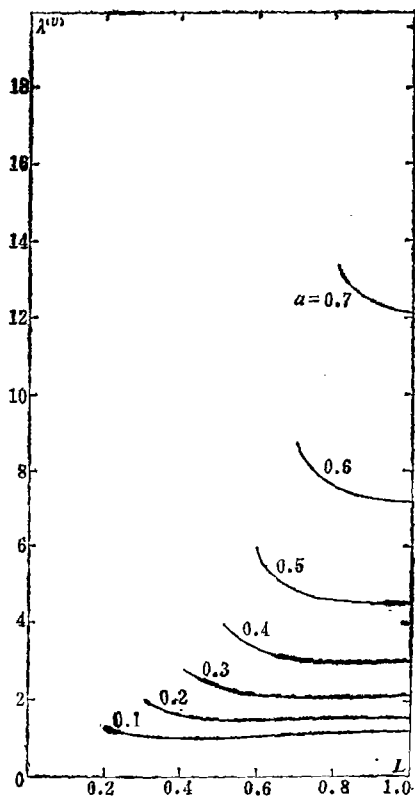
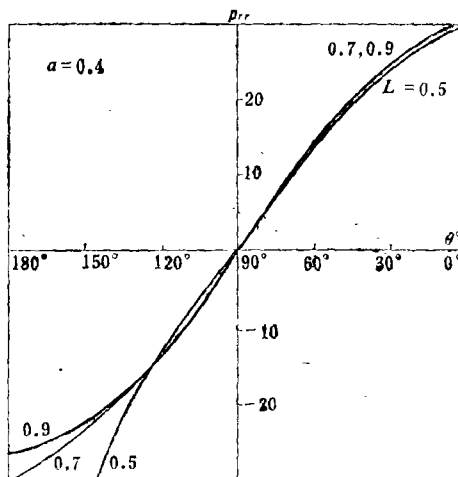
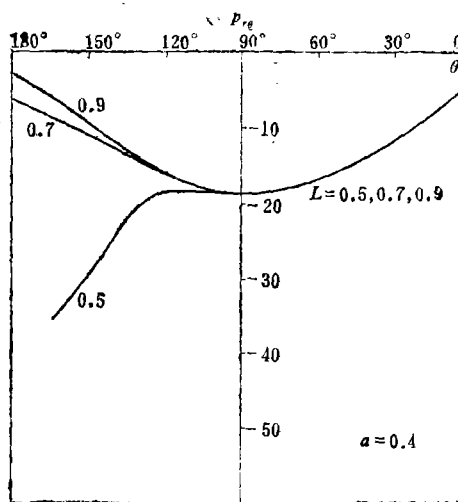


图 4



法向应力



切向应力

图 5

附 录

(2.26) 式中的8个积分比较复杂, 首先利用关系式  $z_1 = z - L$ , 有

$$\left. \begin{aligned} GC_n^{(k)}(t) &= G_{cn}^{(k)}(t)\cos(Lt) - G_{sn}^{(k)}(t)\sin(Lt) \\ GS_n^{(k)}(t) &= G_{sn}^{(k)}(t)\cos(Lt) + G_{cn}^{(k)}(t)\sin(Lt) \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G_{sn}^{(k)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{-L}^0 f_n^{(k)}(z_1)\sin(z_1 t) dz_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_n^{(k)}(z_1)\sin(z_1 t) dz_1 \\ G_{cn}^{(k)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{-L}^0 f_n^{(k)}(z_1)\cos(z_1 t) dz_1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_n^{(k)}(z_1)\cos(z_1 t) dz_1 \end{aligned} \right\} \quad (A.2)$$

通过下式  $G_{sn}^{(2)}$ ,  $G_{sn}^{(4)}$  及  $G_{cn}^{(2)}$ ,  $G_{cn}^{(4)}$  可由  $G_{sn}^{(1)}$ ,  $G_{sn}^{(3)}$  及  $G_{cn}^{(1)}$ ,  $G_{cn}^{(3)}$  表出

$$G_{sn}^{(2)}(t) = G_{sn}^{(1)}(t) - (2n-3)G_{sn}^{(3)}(t), \quad G_{cn}^{(2)}(t) = G_{cn}^{(1)}(t) - (2n-3)G_{cn}^{(3)}(t)$$

$$G_{sn}^{(4)}(t) = \frac{1}{n(n-1)} [(2n-3)G_{sn}^{(1)}(t) + (n-2)(n-3)G_{sn}^{(3)}(t)]$$

$$G_{cn}^{(4)}(t) = \frac{1}{n(n-1)} [(2n-3)G_{cn}^{(1)}(t) + (n-2)(n-3)G_{cn}^{(3)}(t)]$$

问题化为如何求  $G_{sn}^{(1)}(t)$ ,  $G_{sn}^{(3)}(t)$  及  $G_{cn}^{(1)}(t)$ ,  $G_{cn}^{(3)}(t)$ 。这四个式子中的第二个无穷积分可以计算出来, 它们是

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n^{(1)}(x) \frac{\cos(xt)}{\sin(xt)} dx = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2}{\pi} \frac{1}{n!} t^n K_0(t) \quad (n=\text{偶数}) \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n^{(1)}(x) \frac{\sin(xt)}{\cos(xt)} dx &= (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{1}{n!} \{ t^n [I_0(t) - L_0(t)] \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} [(2k-3)!!]^2 t^{n-2k+1} \} \quad (n=\text{奇数}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n^{(3)}(x) \frac{\cos(xt)}{\sin(xt)} dx = -(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2}{\pi} \frac{1}{n!} t^{n-1} K_1(t) \quad (n=\text{偶数}) \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_n^{(3)}(x) \frac{\sin(xt)}{\cos(xt)} dx &= (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{1}{n!} \{ t^{n-1} [I_1(t) - L_{-1}(t)] \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} [(2k-3)!!(2k-1)!!] t^{n-2k+1} \} \quad (n=\text{奇数}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

其中  $\lfloor \cdot \rfloor$  是取整符号,  $K_0(t)$ ,  $K_1(t)$  是第二类零阶和一阶变型 Bessel 函数,  $L_0(t)$ ,  $L_{-1}(t)$  是零阶和 -1 阶变型 Struve 函数, 公式 (A.3), (A.5) 的推导已刊登在 Leichberg 等人<sup>[6]</sup> 的文章的附录中, 我们现在推导 (A.4) 及 (A.6) 式。

根据公式 (参看 [9])

$$I_\nu(t) - L_{-\nu}(t) = \frac{2\pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} (1+x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}} \sin(xt) dx \quad (\text{A.7})$$

$(t > 0, \operatorname{Re} \nu > -1/2)$

当  $\nu=0$  时有  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [I_0(t) - L_0(t)] \sin(xt) dt = \frac{2}{\pi} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} P_0 \left[ \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \right]$

其中  $\Gamma(t)$  为 Gamma 函数, 由此出发利用递推公式及微分运算可以推出

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{t[I_0(t) - L_0(t)] - C(1)\} \cos(xt) dt &= -\frac{2}{\pi} (1+x^2)^{-1} P_1 \left[ \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \right] \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} -\{t^2[I_0(t) - L_0(t)] - C(1)t\} \sin(xt) dt &= \frac{4}{\pi} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} P_2 \left[ \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \right] \end{aligned}$$

其中  $C(\nu) = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(-\nu + 3/2)}$ , 推广之即得:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ t^n [I_0(t) - L_0(t)] - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} [(2k-3)!!]^2 t^{n-2k+1} \right\} \sin \left[ xt - (n-2) \frac{\pi}{2} \right] dt \\ = -\frac{2}{\pi} n! (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}} P_n \left[ \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

同理, 在公式 (A.7) 中取  $\nu=1$  得

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t [I_1(t) - L_{-1}(t)] \sin(xt) dt = -\frac{2}{\pi} 2! (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \tilde{I}_2 \left[ \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \right]$$

利用递推公式及微分运算可以推出

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \{t^2 [I_1(t) - L_{-1}(t)] - C(2)\} \cos(xt) dt = \frac{2}{\pi} 3! (1+x^2)^{-1} \tilde{I}_3 \left[ \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \right]$$



推广之得

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ t^{n-1} [I_1(t) - L_{-1}(t)] + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} [(2k-3)!!(2k-1)!!] t^{n-2k-1} \right\} \sin \left[ xt - (n-2) \frac{\pi}{2} \right] dt \\ & = -\frac{2}{\pi} n_1 (1+x^2)^{-\frac{n-1}{2}} \tilde{I}_n \left[ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

公式(A.8)式及(A.9)式反演之即得(A.4)及(A.6)式.最后应该指出, (A.2)式中的定积分无法分析地积出, 必须采用数值积分的方法求值.

### 参 考 文 献

- [1] Lew, H. S. and Y. C. Fung, *J. Biomechanics*, 2 (1969), 105—119.
- [2] 吴望一, R. 斯拉拉克, 半无穷平面到半无穷长圆管的低雷诺数流动, 应用数学和力学, 6, 1 (1985), 9—24.
- [3] Haberman, W. L. and R. M. Sayre, David W. Taylor Model Basin Report No.1143, U. S. Navy Dept. (1958).
- [4] Bohlin, T., K. Tek. Högsk, Handl, No.155 (1960).
- [5] Wang, H. and R. Skalak, Viscous flow in a cylindrical tube containing a line of spherical particles, *J. Fluid Mech.*, 38 (1969), 75—96.
- [6] Leichberg, S., R. Pfeffer and S. Weinbaum, Stokes flow past finite coaxial clusters of spheres in a circular cylinder, *Int. J. Multiphase Flow*, 3 (1976), 147—169.
- [7] Sampson, R. A., On Stokes' current-function, *Phil. Trans. R. Soc.*, A 182 (1891), 449.
- [8] Happel, J. and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, New York (1965), 115.
- [9] Oberhettinger, F., *Tables of Bessel Transforms*, Springer (1972).

## The Inlet Effect on the Drag Factor of a Sphere in a Tube

Wu Wang-yi

*(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)*

Richard Skalak

*(Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Bioengineering Institute, Columbia University, New York, U. S. A.)*

### Abstract

The creeping motion around a sphere situated axisymmetrically near the entrance of a semi-infinite circular cylindrical tube is analyzed using infinite series solutions for the velocity components, pressure and the stream function. Truncating the infinite series, the corresponding coefficients in the series are determined by a collocation technique. The drag factor and the stress distribution on the surface of the sphere are calculated for the sphere in motion in quiescent fluid and for the flow with uniform velocity at the entrance past a rigidly held sphere. The results indicate that a sphere near the entrance which has a uniform entrance velocity profile will suffer larger drag than that in an infinite tube. The convergence of the collocation technique is tested by numerical calculation. It is shown that the technique has good convergence properties.