

柔性梁与柔韧板的有限元分析

刘正兴 吴连元 冯太华

(上海交通大学)

(南京航空学院)

(钟万勰推荐, 1982年4月24日收到)

摘 要

本文采用有限单元法分析梁、板的大挠度问题, 在应变位移关系中考虑了转动引起的中面伸长; 在计算应变能时保留了高阶项。应用最小位能原理导出空间柔性梁元、柔韧板元的弹性刚度矩阵、线性及非线性初应力矩阵, 算例表明, 在不增加存储量和计算时间的条件下可适当提高解的精度、为排除寄生的刚体位移, 应采用拖带坐标系的迭代法。

一、空间柔性梁元

分析图1所示的空间柔性梁元

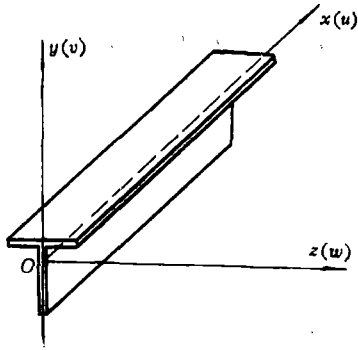


图1 空间柔性梁元

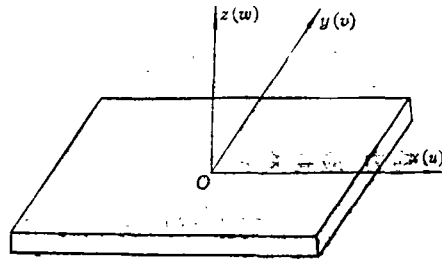


图2 柔韧板单元

1. 位移函数^[1]

$$\left. \begin{aligned}
 u &= [1 - \xi, \xi][u_1, u_2]^T = [N_u]\{d_u\} \\
 v &= [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), (3\xi^2 - 2\xi^3), L(-\xi^2 + \xi^3)][v_1, \theta_{x_1}, v_2, \theta_{x_2}]^T \\
 &= [N_v]\{d_v\} \\
 w &= [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, -L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), (3\xi^2 - 2\xi^3), L(\xi^2 - \xi^3)][w_1, \theta_{y_1}, w_2, \theta_{y_2}]^T \\
 &= [N_w]\{d_w\} \\
 \theta_x &= [1 - \xi, \xi][\theta_{x_1}, \theta_{x_2}]^T = [N_\varphi]\{d_\varphi\}
 \end{aligned} \right\} (1.1)$$

2. 应变-位移关系

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{L} [-1, 1] [\theta_v, \theta_w]^T = [B_\varphi] \{d_\varphi\} \\ e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ &= \varepsilon_0 + \varepsilon_{bv} + \varepsilon_{bw} + \varepsilon_{NLv} + \varepsilon_{NLw} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 &= -\frac{1}{L} [-1, 1] \{d_u\} = [B_u] \{d_u\} \\ \varepsilon_{bv} &= -y \frac{1}{L^2} [6(-1+2\xi), L(-4+6\xi), 6(1-2\xi), L(-2+6\xi)] \cdot \{d_v\} \\ &= -y [B_v] \{d_v\} \\ \varepsilon_{bw} &= z \frac{1}{L^2} [6(-1+2\xi), L(4-6\xi), 6(1-2\xi), L(2-6\xi)] \{d_w\} \\ &= z [B_w] \{d_w\} \\ \varepsilon_{NLv} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} [6(-\xi+\xi^2), L(1-4\xi+3\xi^2), 6(\xi-\xi^2), L(-2\xi+3\xi^2)] \{d_v\} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \{d_v\}^T [B_{NLv}]^T [B_{NLv}] \{d_v\} \\ \varepsilon_{NLw} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} [6(-\xi+\xi^2), -L(1-4\xi+3\xi^2), 6(\xi-\xi^2), L(2\xi-3\xi^2)] \{d_w\} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \{d_w\}^T [B_{NLw}]^T [B_{NLw}] \{d_w\} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

3. 应力-应变关系

$$\begin{aligned} M_x &= GJ_x \varphi_x = [D_\varphi] [B_\varphi] \{d_\varphi\} \\ \sigma_x &= E e_x = E (\varepsilon_0 + \varepsilon_{bv} + \varepsilon_{bw} + \varepsilon_{NLv} + \varepsilon_{NLw}) \end{aligned}$$

4. 应变能和刚度矩阵

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L M_x \cdot \varphi_x dx + \frac{1}{2} \iiint E e_x^2 dx dy dz$$

将坐标轴选得与主惯性轴重合，再引入⁽¹⁾

$$N_0 = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad N_v = \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad N_w = \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (1.4)$$

其中 N_0 为线性膜力， N_v, N_w 为非线性膜力，于是有

$$U = U_\varphi + U_0 + U_v + U_w + U_{NL} \quad (1.5)$$

式中

$$\begin{aligned}
 U_\varphi &= \frac{1}{2} \{d_\varphi\}^T [K_\varphi] \{d_\varphi\} \\
 U_0 &= \frac{EA}{2} \int_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \{d_u\}^T [K_0] \{d_u\} \\
 U_b &= \frac{EJ_z}{2} \int_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{EJ_y}{2} \int_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \{d_v\}^T [K_v] \{d_v\} + \frac{1}{2} \{d_w\}^T [K_w] \{d_w\} \\
 U_g &= \frac{N_0}{2} \int_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{N_0}{2} \int_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \{d_v\}^T [K_{gv}] \{d_v\} + \frac{1}{2} \{d_w\}^T [K_{gw}] \{d_w\} \\
 U_{NL} &= \frac{N_v}{4} \int_1 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{N_w}{4} \int_1 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \{d_v\}^T [K_{NLv}] \{d_v\} + \frac{1}{2} \{d_w\}^T [K_{NLw}] \{d_w\}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
 [K_\varphi] &= \frac{GJ_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & [K_0] &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 [K_v] &= EJ_z \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & & & \\ & \frac{6}{L^2} & 4 & \\ & -12 & -6 & 12 \\ & \frac{6}{L^2} & 2 & -6 & 4 \\ & & & & & L \end{bmatrix}, & [K_w] &= EJ_y \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & & & \\ & -6 & 4 & \\ & -12 & 6 & 12 \\ & -6 & 2 & 6 & 4 \\ & & & & & L \end{bmatrix} \\
 [K_{gv}] &= \frac{N_0}{L} [S_v], & [K_{gw}] &= \frac{N_0}{L} [S_w] \\
 [K_{NLv}] &= \frac{N_v + N_w}{2L} [S_v], & [K_{NLw}] &= \frac{N_v + N_w}{2L} [S_w] \\
 [S_v] &= \begin{bmatrix} 6 & & & \\ 5 & & & \\ & L & 2L^2 & \\ 10 & 15 & & \\ -6 & -L & 6 & \\ 5 & 10 & 5 & \\ & L & -L^2 & -L & 2L^2 \\ 10 & 30 & 10 & 15 \end{bmatrix}, & [S_w] &= \begin{bmatrix} 6 & & & \\ 5 & & & \\ & -L & 2L^2 & \\ 10 & 15 & & \\ -6 & L & 6 & \\ 5 & 10 & 5 & \\ & -L & -L^2 & L & 2L^2 \\ 10 & 30 & 10 & 15 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

将上述各子刚阵扩充后迭加可得

$$N_{,NL} = \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

于是应变能可写成

$$U = U_{Lr} + U_{Lb} + U_{NL} + U_{NN} \quad (2.3)$$

其中

$$U_{Lr} = \frac{1}{2} \{d_r\}^T [K_{rr}] \{d_r\};$$

$$[K_{rr}] = \iint [B_r]^T [D] [B_r] t dx dy, \quad \{d_r\} = [\{d_u\}^T, \{d_v\}^T]^T$$

$$[B_r] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N_w] \\ \\ [N_v] \end{bmatrix}, \quad [D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$

$$U_{Lb} = \frac{1}{2} \{d_w\}^T [K_{bb}] \{d_w\};$$

$$[K_{bb}] = \iint [B_b]^T [D_b] [B_b] dx dy,$$

$$[D_b] = \frac{t^3}{12} [D], \quad [B_b] = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [N_w]$$

$$U_{NL} = \frac{1}{2} \{d_w\}^T [K_{GL}] \{d_w\};$$

$$[K_{GL}] = N_{xy} [K_{Gx}] + N_{xy} [K_{Gxy}] + N_{yx} [K_{Gy}]$$

$$[K_{Gx}] = \iint \frac{\partial [N_w]^T}{\partial x} \frac{\partial [N_w]}{\partial x} dx dy, \quad [K_{Gy}] = \iint \frac{\partial [N_w]^T}{\partial y} \frac{\partial [N_w]}{\partial y} dx dy$$

$$[K_{Gxy}] = 2 \iint \frac{\partial [N_w]^T}{\partial x} \frac{\partial [N_w]}{\partial y} dx dy$$

$$U_{NN} = \frac{1}{2} \{d_w\}^T [K_{GNL}] \{d_w\};$$

$$[K_{GNL}] = \frac{1}{2} N_{xNL} [K_{Gx}] + \frac{1}{2} N_{xyNL} [K_{Gxy}] + \frac{1}{2} N_{yNL} [K_{Gy}]$$

这里 $[K_{rr}]$, $[K_{bb}]$, $[K_{GL}]$, $[K_{GNL}]$ 分别为线性薄膜、线性弯曲、线性初应力和非线性初应力刚度矩阵。

4. 平衡方程

将以上各子刚阵扩充后迭加可得

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [K] \{d\} \tag{2.4}$$

应用线性化假设及卡氏第一定理得柔韧板元的平衡方程

$$[K] \{d\} = \{F\}, [K] = [K_{ff}] + [K_{fb}] + [K_{GL}] + [K_{GNL}] \tag{2.5}$$

其中 $\{F\}$ 是与 $\{d\}$ 对应的广义节点力。

线性膜力

$$[N_L] = [N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}]^T = t \cdot [D] [B_f] \{d_f\} \tag{2.6}$$

非线性膜力

$$[N_{NL}] = \begin{Bmatrix} N_{xNL} \\ N_{yNL} \\ N_{xyNL} \end{Bmatrix} = \frac{t}{2} [D] \begin{Bmatrix} \{d_w\}^T & \frac{\partial [N_w]}{\partial x} & \frac{\partial [N_w]}{\partial x} \\ \{d_w\}^T & \frac{\partial [N_w]}{\partial y} & \frac{\partial [N_w]}{\partial y} \\ 2\{d_w\}^T & \frac{\partial [N_w]}{\partial x} & \frac{\partial [N_w]}{\partial y} \end{Bmatrix} \{d_w\} \tag{2.7}$$

5. 讨 论

(1) $[K_{GNL}]$ 与 $[K_{GL}]$ 只差一个系数，可共用一个存区。

(2) 如不计非线性膜力，(2.5)式蜕化为

$$[K] = [K_{ff}] + [K_{fb}] + [K_{GL}]$$

与 Holand^[6], Cook^[9]的结果一致。如同时不考虑线性膜力时，则蜕化为线性问题的弹性刚度矩阵。

(3) 以上导出的各式是柔韧板单元的普遍公式。对一个具体单元，只要选择合适的位置模式，以其形状函数 $[N]$ 代入各式，便可得到显式或数值积分式。例如，对三角形和矩形板单元，可由 [1]、[7] 得到 $[K_f]$ ，由 [5] 得到 $[K_{\sigma_x}]$, $[K_{\sigma_{xy}}]$, $[K_{\sigma_y}]$ 的显式，而初应力可按 (2.6), (2.7) 式计算

三、带动坐标的迭代法

如前所述，在大位移情况下，平衡方程必须按变形后的位置建立。此时坐标系的选择十分重要。关于这方面的论述很多^{[2]、[8]、[9]}。根据我们的实践，采用钱伟长教授提出的“拖带坐标系”^[10]和 Cook^[9]归纳的“带动坐标的迭代法”较合适。这种方法物理概念清楚、计算步骤简洁，便于编程计算，并可有效地排除变形过程中寄生的刚体位移。算例表明，即使对于大位移、大转角情况，这种数值解法也能获得较高的精度。这种方法可归纳为^[9]：

$$\left. \begin{aligned} [K]_i \{\Delta D\}_{i+1} &= \{R\} - \sum [k]_i \{d\}_i, \\ \{D\}_{i+1} &= \{D\}_i + \{\Delta D\}_{i+1} \quad (i=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \tag{3.1}$$

其中 i 表示迭代步序， $\{R\}$ 是外载荷， $[k]_i$, $\{d\}_i$ 和 $[K]_i$ 都是以当前位移计算的，并在修改后的单元坐标系内度量，且按迭代步序逐次修改。

为了兼顾精度与省时的目的，我们还采用“一步牛顿法”^[11]，其计算格式是

$$\left. \begin{aligned} [K]_i \{\Delta D\}_{i+1} &= \Delta \{R\}_{i+1} + \Delta \{R_0\}_{i+1} \quad (i=0, 1, 2, \dots) \\ \{D\}_{i+1} &= \{D\}_i + \{\Delta D\}_{i+1} \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

其中 $\Delta\{R_o\}_{i+1}$ 是修正载荷

$$\Delta\{R_o\}_{i+1} = \Delta\{R\}_i - \sum [k]_i \Delta\{d\}_i$$

它可以防止与正确解的偏离过大, 当略在修正项 $\Delta\{R_o\}$ 后即蜕化为纯粹增量法^[12]。

四、例 题

1. 两端固支柔性梁

图 3 所示的两端固支梁, 在跨度中间作用集中载荷。

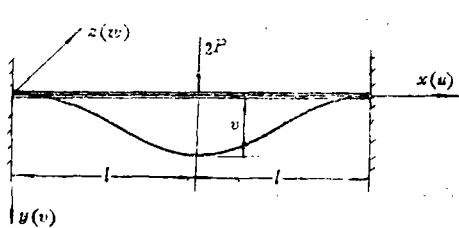


图 3 两端固支柔性梁

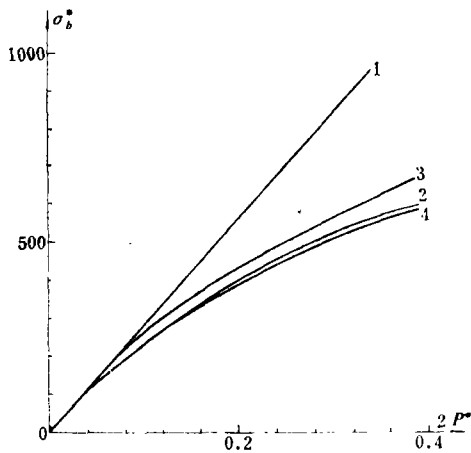


图 5 弯曲应力-载荷 ($\xi=1$)

按考虑与不考虑非线性初应力刚度矩阵的两种情况进行计算。采用“一步牛顿法”计算结果见图 4~图 6。各无量纲参数^[13]是:

$$P^* = P \frac{l^2}{EJ_z}; \quad \sigma^* = \sigma \frac{l^2 A}{EJ_z};$$

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad v^* = \frac{v}{l}$$

A 是截面积, l 是半跨度, EJ_z 是弯曲刚度。图中曲线编号是:

1. 线性解析解^[14];
2. 非线性解析解^[13];
3. 不计 $[K_{NL}]$ 的有限元解;
4. 考虑 $[K_{NL}]$ 的有限元解。

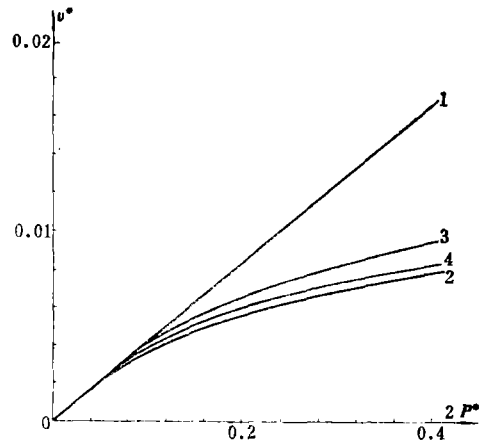


图 4 中点挠度-载荷

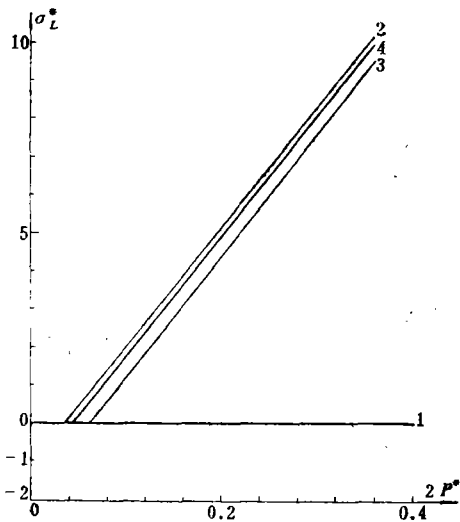


图 6 线性膜应力-载荷

计算结果表明, 考虑非线性初应力矩阵后, 更接近于解析解。

2. 周边固定夹持圆形薄板

图 7 是周边固定夹持的圆形薄板, 受均布载荷作用。采用三角形柔韧板元。[$K_{\theta\theta}$], [$K_{\theta b}$]

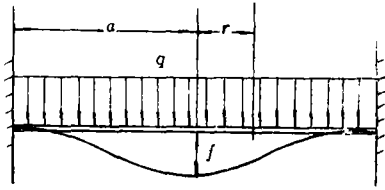


图 7 均布载荷作用下的圆板

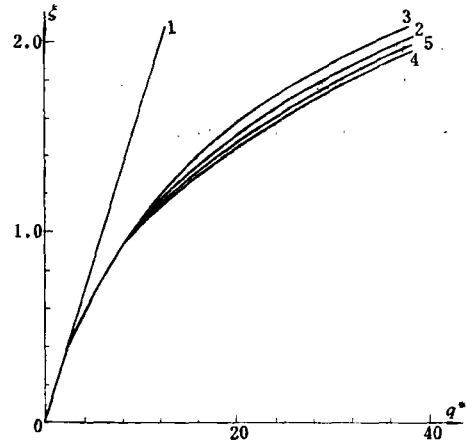


图 8 中心挠度-载荷

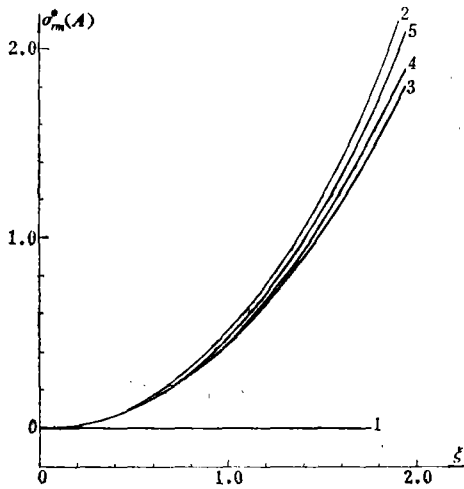


图 9 边界膜应力-载荷

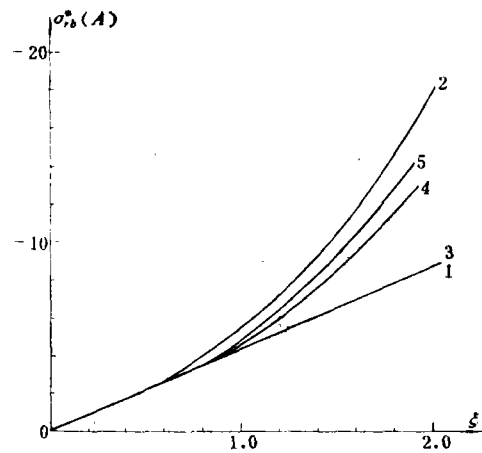


图 10 边界弯曲应力-载荷

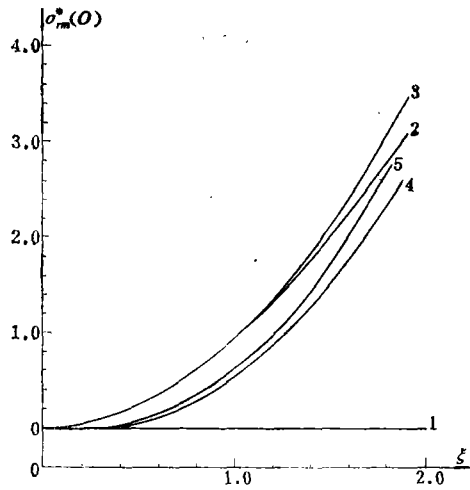


图 11 中心膜应力-载荷

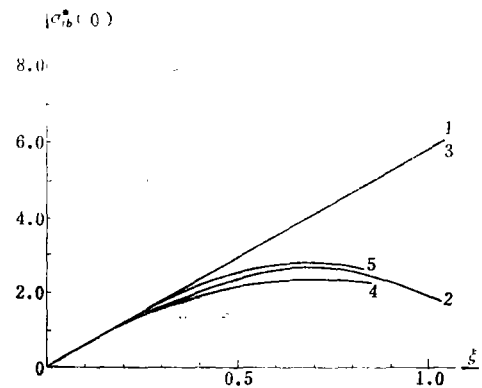


图 12 中心弯曲应力-载荷

取自 [7], $[K_{\sigma_x}]$, $[K_{\sigma_{xy}}]$, $[K_{\theta_y}]$ 取自 [5]. 计算结果见图 8~图 14. 引入无量纲参数^[16]

中心挠度 $\xi = f/h$; 载荷 $q^* = \frac{qa^4}{Eh^4}$; 应力 $\sigma^* = \frac{\sigma}{E} \left(\frac{a}{h}\right)^2$; 转角 $\theta^* = 2\theta/h$; 径向坐标 $R^* = r/a$.

图中曲线表示:

1. Timoshenko^[4] 线性解析解; 2. 钱伟长、叶开沅^[10] 摄动法解;
3. Вольмир^[15] 一阶近似解; 4. 不计 $[K_{GNL}]$ 的有限元解;
5. 考虑 $[K_{GNL}]$ 的有限元解.

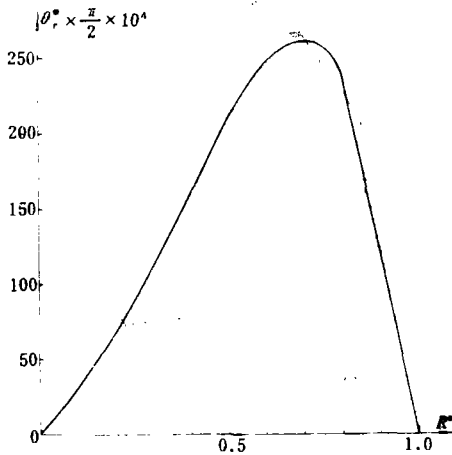


图13 径向转角沿径向变化

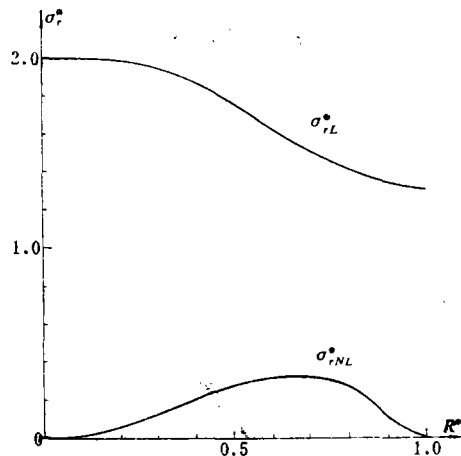


图14 膜应力沿径向变化

计算结果表明, 有限元解较一阶近似解更接近摄动法的精确解. 当考虑 $[K_{NL}]$ 时精度更好, 尤其是应力值更精确. 在转角最大处, 非线性膜力也达最大值.

3. 悬臂柔性梁

图15为自由端作用集中载荷的悬臂梁. 这类结构在变形过程中寄生有很大的刚体转动, 而轴线的伸长极小. 采用拖带坐标的迭代法时, 可以不考虑初应力矩阵 $[K_{\sigma L}]$, $[K_{\sigma NL}]$. 我们的计算表明, 考虑与否几乎没有影响.

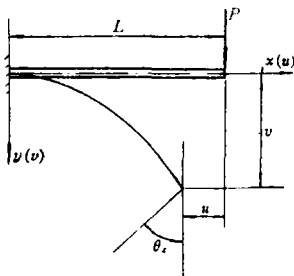


图15 悬臂柔性梁

计算结果列于表 1. 引入无量纲参数^[14]:

$$P^* = \frac{P^2 l}{EJ_z}; \quad \theta_s^* = \theta_s / \left(\frac{\pi}{2}\right);$$

$$v^* = v/l; \quad u^* = u/l$$

结果表明, 即使位移, 转动很大, 这种方法所得结果的精度较高.

表1、 悬臂柔性梁计算结果

项 目	方 法	P*					
		0.5	1	2	3	4	5
最大 挠度 v^*	线性解析解 ^[14]	0.167	0.333	0.667	1.000	1.333	1.667
	非线性解析解 ^{[13][14]}	0.162	0.302	0.494	0.603	0.670	0.714
	本文有限元解	0.162	0.302	0.520	0.591	0.670	0.758
轴 向 位 移 u^*	线性解析解	0	0	0	0	0	0
	非线性解析解	-0.016	-0.056	-0.160	-0.255	-0.329	-0.388
	本文有限元解	-0.016	-0.056	-0.175	-0.241	-0.329	-0.386
转 角 θ^*	线性解析解	0.159	0.318	0.636	0.955	1.273	1.592
	非线性解析解	0.156	0.294	0.498	0.628	0.714	0.774
	本文有限元解	0.155	0.293	0.500	0.618	0.714	0.768

我们的工作得到大连工学院钟万勰教授，南京航空学院李定夏教授的帮助和指导，特表感谢。

参 考 文 献

- [1] Przemieniecki, J.S., *Theory of Matrix Structure Analysis*, McGraw Hill Book Company (1968), 70—82.
- [2] Kabaila, A.P., Bifurcation of space frame, AFFDL-TR-70-36.
- [3] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company (1977), 331—337.
- [4] Timoshenko, S. and S. Winosky-Krieger, *Theory of Plate and Shells* (second edition), McGraw-Hill Book Company (1958), 113—124.
- [5] Holand, I and K. Bell, *Finite Element Method in Stress Analysis*, Technical University of Norway (1972), 475—485.
- [6] Cook, R., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley (1974), 264—266.
- [7] 华东水利学院, 《弹性力学问题的有限元法》, 水利电力出版社, (1978), 95—100.
- [8] B.B 诺沃日洛夫, 《非线性弹性力学基础》, 科学出版社 (1958).
- [9] Murray, D.W., Large deflection analysis of plate, Ph. D. Dessertation, University of Colifornia, Berkeley (1967), U. S. A.
- [10] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社, (1980), 490—493.
- [11] Hormeisster, L.D., G.A. Greenbaum and D.A. Evenson, Large strain, elastic-plastic finite element analysis, *AIAA*, 9, 7 (1971).
- [12] 刘正兴、冯太华、李定夏, 用有限元法解加筋板壳的几何非线性问题, 南京航空学院学报, 5 (1979年).
- [13] Frisch-Fay, R., *Flexible Bars*, London Butter worch (1962).
- [14] Timoshenko, S. and J. Gere, *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold Company (1972).
- [15] A.C. 沃耳密耳, 《柔韧板与柔韧壳》, 科学出版社, (1959).
- [16] 钱伟长、叶开沅, 《圆板的大挠度问题》, 物理学报, 10, 3 (1954).

The Finite Element Analysis of the Flexible Beams and Plates

Liu Zhen-xing Wu Lian-yuan

(*Shanghai Jiao Tong University, Shanghai*)

Fang Tai-hua

(*Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing*)

Abstract

This paper studies large deflection problem of beams and plates by the finite element method. The elongation of the middle surface caused by its rotation is considered in strain-displacement relations. The higher order terms will be reserved when strain energy is calculated. The elastic stiffness matrix, linear and nonlinear initial stress stiffness matrices are derived by the principle of minimum potential energy. Examples show that precision will be properly raised although the total storage amount and calculating time are not increased.

The iterative method with comoving coordinate must be adopted to avoid parasitic rigid body motion.