

文章编号: 1000_0887(2004) 10_1061_06

不可微预报系统的广义变分同化方法 及数值试验*

黄思训, 杜华栋, 韩 威

(解放军理工大学 气象学院, 南京 211101)

(戴世强推荐)

摘要: 讨论了不可微预报系统中的广义变分同化方法。对于不可微预报系统, 由于不可微性, 系统不存在切线性系统, 而切线性系统的不存在, 使得无法用通常的途径导出伴随系统。引进不可微系统的弱形式后, 可以不考虑切线性系统, 而直接导出伴随系统。主要就 3 种形式的问题展开了讨论, 第 1 种为低维系统, 第 2 种情形为高维系统整体观测资料, 第 3 种情形为高维系统局部观测资料。可以称此方法为结合反问题思想的广义变分同化方法。

关键词: 变分同化; 不可微系统; 伴随方法

中图分类号: P433 **文献标识码:** A

引 言

变分资料同化是提高数值天气预报准确度的有效手段, 而变分伴随方法日益应用到变分资料同化中去。由于伴随方法是建立在可微的系统基础上^[1~3], 而预报模式中往往会采用参数化, 参数化会带来临近值处模式中某些项关于时间或模式变量不连续或不可微性, 这种现象称为“开关”(on_off)。“开关”现象是属于不可微系统, 对于不可微系统的处理是变分资料同化中的重点和难点。目前国内外提出很多办法, 例如传统方法、光滑化方法、广义方法、新伴随方法^[4~8]等, 做了不少有益的工作。但是值得我们注意的是, 若系统是不可微的, 不可微系统不再有切线性模式, 故必须引进弱形式再进行讨论。在本文中分别对低维不可微预报系统、高维不可微系统在整体和局部观测资料情况下建立了广义变分同化方法, 并且对低维不可微预报系统的同化做了一个数值试验。

1 低维不可微预报系统的广义变分同化方法

1.1 理论推导

下面以低维不可微预报系统为例, 说明引进弱形式方法, 此方法我们称为广义变分同化方法。

* 收稿日期: 2003_01_03; 修订日期: 2004_05_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40075014, 40175014)

作者简介: 黄思训(1946—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师(联系人, Tel: + 86_25_80830634; E_mail: huangxsp@yahoo.com.cn)。

我们以文[6]中最简单模型来说明广义变分同化方法·

$$\frac{dq}{dt} = F(t) + \beta H_+(q - q_c), \quad q|_{t=0} = q_0 \quad (1)$$

其中 $q(t)$ 为比湿, β, q_0 为常数, q_c 为“开关”临界值, $q_c > q_0, F(t) > -\beta, F(t) \geq \delta > 0, F(t)$ 可微, $H_+(\cdot)$ 为 Heaviside 函数· 显然式(1) 在 $[0, T]$ 上适定且解 $q(t)$ 是连续的, 选择 T 使在 $[0, T]$ 中存在唯一的 τ_c , 使 $q(\tau_c) = q_c$ · 由于(1) 是不可微系统, 我们引进

$$S^1(0, T) = \left\{ p(t) \mid p(t) \in H^1(0, T) \text{ 且 } p|_{t=T} = 0 \right\},$$

于是式(1) 写成弱形式如下:

$$\int_0^T \frac{dq}{dt} p(t) dt = \int_0^T F(t) p(t) dt + \int_0^T \beta H_+(q - q_c) p(t) dt = \int_0^T F(t) p(t) dt + \int_{\tau_c}^T \beta p(t) dt \quad (2)$$

记 q_{obs} 为 q 的观察资料, 我们确定 q_0, q_c 使目标泛函

$$J[q_0, q_c] = \frac{1}{2} \int_0^T (q(t) - q_{\text{obs}}(t))^2 dt = \min! \quad (3)$$

引入扰动 $q_0 \rightarrow q_0 + \alpha U, q_c \rightarrow q_c + \alpha \xi$ 则此时 $\tau_c \rightarrow \tau_c$, 解 $q(t) \rightarrow q(t)$, 记 $\hat{q} = \lim_0 (q - q_0)/\alpha, \tau_c = \lim_0 (\tau_c - \tau_c)/\alpha$, 记这种收敛为 $L^2(0, T)$ 意义下的收敛· 于是由(2) 式得

$$-q(0)p(0) - \int_0^T q(t) \frac{dp(t)}{dt} dt = \int_0^T F(t)p(t) dt + \int_{\tau_c}^T \beta p(t) dt, \quad (4)$$

$$\text{从而} \quad -U p(0) - \int_0^T \frac{q(t) - q_c}{\alpha} \frac{dp(t)}{dt} dt = \int_{\tau_c}^T \frac{\beta}{\alpha} p(t) dt \quad (5)$$

令 $\alpha \rightarrow 0$, 则有

$$-U p(0) - \int_0^T \hat{q}(t) \frac{dp(t)}{dt} dt = -\beta p(\tau_c) \tau_c \quad (6)$$

又因为 $q_c = q(\tau_c) = q_0 + \int_0^{\tau_c} F(\tau) d\tau, q_c = q_c + \alpha \xi = q_0 + \alpha U + \int_0^{\tau_c} F(\tau) d\tau$, 于是有

$$\xi = U + F(\tau_c) \tau_c \quad (7)$$

把(7)代入(6)有

$$-U p(0) - \int_0^T \hat{q}(t) \frac{dp(t)}{dt} dt = -\beta p(\tau_c) \frac{\xi - U}{F(\tau_c)} \quad (8)$$

引入伴随:

$$-dp(t)/dt = q - q_{\text{obs}}, \quad p|_{t=T} = 0, \quad (9)$$

$$\text{有} \quad -U p(0) + \int_0^T \hat{q}(t)(q - q_{\text{obs}}) dt = \beta \frac{p(\tau_c)}{F(\tau_c)} U - \beta \frac{p(\tau_c)}{F(\tau_c)} \xi$$

又因为

$$J'[q_0, q_c; U, \xi] = \int_0^T \hat{q}(q - q_{\text{obs}}) dt = \therefore q_0 J \cdot U + \therefore q_c J \cdot \xi$$

由(3) 我们可以得到泛函关于 q_0 和 q_c 的梯度分别为:

$$\therefore q_0 J = p(0) + \beta \frac{p(\tau_c)}{F(\tau_c)}, \quad \therefore q_c J = -\beta \frac{p(\tau_c)}{F(\tau_c)} \quad (10)$$

1.2 数值试验

假定模式(1) 中各参数的准确值分别为: $F(t) = 2.0, \beta = -1.5, q_c = 0.46, q_0 = 0.25$ (详见文献[8]); 模式积分时间的终端时刻为 $T = 1.0$, 在数值试验过程中取 $dt = 0.005$ ·

令 q_c 和 q_0 分别取上面的准确值, 对模式进行数值积分, 将所得到的结果作为观测值 q_{obs} 保存. 然后 q_c 和 q_0 的扰动值作为初始猜测值, 利用拟牛顿法进行迭代. 为检验反演效果, 这里以准确值为中心, 取了 3 组不同的扰动值进行试验, 其取值情况及反演结果如表 1 所示.

表 1

试验	初始值			迭代次数	最终反演值		
	q_0	q_c	J		q_0	q_c	J
试验 1	0.05	0.25	9.157 3	28	0.243 9	0.470 7	0.001 2
试验 2	0.05	0.55	1.301 8	6	0.25	0.467 6	0.0
试验 3	0.42	0.55	2.738 2	17	0.25	0.462 2	0.0

从表 1 中可以看出, 各试验结果均非常理想. 注意到在第 2 和第 3 个试验中, q_c 反演的最终值并没有达到准确值 0.46, 而最终目标泛函却为 0.0, 这是由于在数值离散过程中, 假定开关在第 n 个离散时间处, 即有 $q_{n-1} < q_c \leq q_n$, 因此, q_c 反演值只要在区间 $[q_{n-1}, q_n]$ 内, 开关便能准确控制而不影响模式的预报值, 使得 q_c 的误差不能从目标范函上体现出来.

下面是各试验迭代过程中目标泛函下降的轨迹图

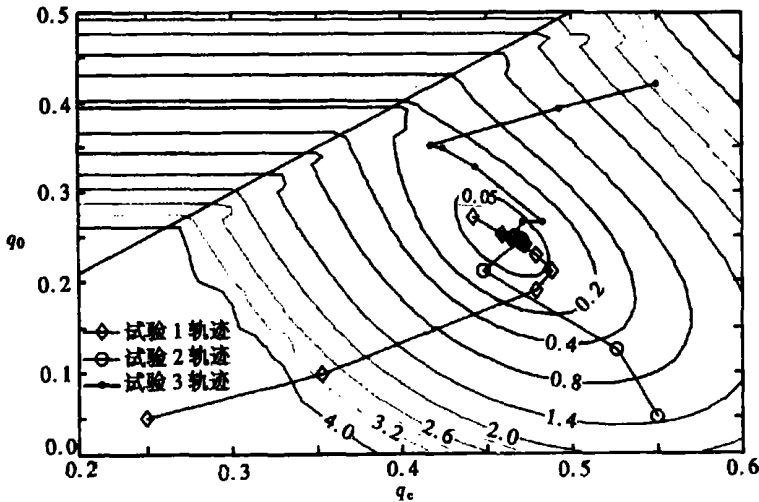


图 1 目标泛函下降轨迹图

从轨迹图上可以看出, 由点(0.2, 0.2)和点(0.5, 0.5)的连线将等值线划分为两个区域, 在该线的右下方, 等值线呈椭圆线分布, 而在左上方, 由于 $q_0 > q_c$, 等值线仅随 q_0 变化(开关项 q_c 已不起作用). 由数值结果可看出, 该方法对此类问题的解决是行之有效的.

2 高维不可微系统的广义变分同化方法(整体资料同化)

我们考虑最简单波动方程

$$\partial^2 u / \partial t^2 = \Delta u + \lambda(t) \delta(x - x_0), \quad (11)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (12)$$

$$u|_{\partial \Omega} = 0, \quad (13)$$

其中 $\Omega \subset R^n$ 中有界区域, $\partial \Omega$ 光滑, $x_0 \in \Omega$, 我们由观测资料 u_{obs} 确定点源的位置 x_0 , 其中 $\lambda(t) \in C^1[0, T]$, $\lambda(0) \neq 0$. 利用近代 PDE 理论知, (11) ~ (13) 的弱解属于

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)),$$

我们要求 x_0 , 使

$$J[x_0] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (u - u_{\text{obs}})^2 dt dx = \min! \quad (14)$$

下面我们引进 (11) ~ (13) 的弱形式. 记

$$H(0, T; \Omega) = \left\{ p(t, x) \mid p \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)), p|_{t=T} = 0, \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0 \right\},$$

则 (11) ~ (13) 的弱形式为:

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p \right) dt dx = \int_0^T \lambda(t) p(t, x_0) dt \quad (15)$$

引入扰动, $x_0 \rightarrow x_0 + \alpha \hat{x}_0$, 此时对应解 $u(t, x) \rightarrow u(t, x) + \hat{u}(t, x)$. 记

$$\hat{u}(t, x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{u(t, x) - u(t, x)}{\alpha},$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \hat{u} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p \right) dt dx = \int_0^T \lambda(t) \frac{\partial p}{\partial t}(x_0) dt \cdot \hat{x}_0$$

引入伴随系统

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = u - u_{\text{obs}}, \quad (16)$$

$$p|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad (17)$$

$$p|_{\partial\Omega} = 0, \quad (18)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \hat{u} (u - u_{\text{obs}}) dt dx = \int_0^T \lambda(t) \frac{\partial p}{\partial t}(t, x_0) dt \cdot \hat{x}_0$$

另一方面

$$\int_0^T \int_{\Omega} \hat{u} (u - u_{\text{obs}}) dt dx = \hat{x}_0^T J \cdot \hat{x}_0,$$

于是导出

$$\hat{x}_0^T J = \int_0^T \lambda(t) \frac{\partial p}{\partial t}(t, x_0) dt$$

3 高维不可微系统的广义变分同化(局部资料同化)

我们考虑一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda(t) \delta(x - x_0), \quad (19)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (20)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (21)$$

其中 $x_0 \in (0, 1)$, $\lambda(t) \in C^1[0, T]$, $\lambda(0) \neq 0$. 若已给出观测资料

$$u|_{x=\eta} = u_{\text{obs}}, \quad (22)$$

则由反问题理论可知, 当 η 为无理数时, x_0 是唯一确定的, 当 η 为代数无理数时, 在一定条件下, 问题具有稳定性. $x = \eta$ 为无理数在实际上是几乎无法实现的, 这给变分同化带来困难.

若给出泛函, $x = \eta$ 不一定为无理数时

$$J[x_0] = \frac{1}{2} \int_0^T (u - u_{\text{obs}})^2|_{x=\eta} dt = \min!, \quad (23)$$

有可能导致问题没有解, 这样引入反问题正则化思想是非常必要的.

我们引进泛函为 J :

$$J[x_0] = \frac{1}{2} \int_0^T (u - u_{\text{obs}})^2 |_{x=\eta} dt + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dt dx = \min! \quad (24)$$

为了说明问题方便, 我们设观察资料给在边界上 $\partial u / \partial x |_{x=0} = g(t)$, 此时泛函为如下形式:

$$J[x_0] = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\partial u}{\partial x} - g(t) \right]^2 |_{x=0} dt + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dt dx = \min!, \quad (25)$$

则
$$J' [x_0, \hat{x}_0] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J[x_0 + \alpha \hat{x}_0] - J[x_0]}{\alpha} = \dots_{x_0} J \cdot \hat{x}_0 \quad (26)$$

引进(19)~(21)的弱形式如下:

$$\begin{aligned} \int_0^T u p \Big|_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^T \int_0^1 u \left(-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) dt dx = \\ \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x} p \Big|_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^T \lambda(t) p(t, x_0) dt, \end{aligned} \quad (27)$$

于是当 $x_0 \rightarrow x_0 + \alpha \hat{x}_0$ 时, $u \rightarrow \hat{u}$, 令 $\hat{u} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (u - u) / \alpha$, 则(27)改写成:

$$\begin{aligned} \int_0^T \hat{u} p \Big|_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^T \int_0^1 \hat{u} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) dt dx = \\ \int_0^T \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} p \Big|_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^T \lambda(t) \frac{\partial p}{\partial x}(t, x_0) dt \cdot \hat{x}_0 \end{aligned} \quad (28)$$

引进伴随

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (29)$$

$$p |_{t=T} = 0, \quad (30)$$

$$p |_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - g(t) \right) \Big|_{x=0}, \quad (31)$$

$$p |_{x=1} = 0, \quad (32)$$

于是有

$$\begin{aligned} -\gamma^2 \int_0^T \int_0^1 \hat{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dt dx = - \int_0^T \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - g(t) \right) \Big|_{x=0} dt + \\ \int_0^T \lambda(t) \frac{\partial p}{\partial x}(t, x_0) dt \cdot \hat{x}_0 \end{aligned} \quad (33)$$

利用(26)有

$$\dots_{x_0} J \cdot \hat{x}_0 = \int_0^T \lambda(t) \frac{\partial p}{\partial x}(t, x_0) dt \cdot \hat{x}_0, \quad (34)$$

从而有

$$\dots_{x_0} J = \int_0^T \lambda(t) \frac{\partial p}{\partial x}(t, x_0) dt \quad (35)$$

4 结束语

针对不可微系统不存在切线性模式的困难, 本文对预报模式引进弱形式再进行讨论, 分别对低维不可微预报系统, 高维不可微系统在整体和局部观测资料情况下建立了广义变分同化方法; 对低维系统数值试验表明此方法是行之有效的, 而对于高维系统的数值试验现在正在进行研究, 拟另文发表。

[参 考 文 献]

- [1] LeDimet F, Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological obser-

- variations: Theoretical aspects[J]. *Tellus, Ser A*, 1986, **38**(2): 97—110.
- [2] HUANG Si_xun, HAN Wei, WU Rongsheng. Theoretical analyses and numerical experiments of variational assimilation for one-dimensional ocean temperature model[J]. *Science in China, Ser D*, 2004, **47**(7): 630—638.
- [3] HUANG Si_xun, HAN Wei. Application of regularization in ill-posed problems of ocean variational data assimilation with local observation[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. *The Fourth International Conference on Nonlinear Mechanics (ICNM_IV)* [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 840—844.
- [4] Zou X. Tangent linear and adjoint of “on/off” process and their feasibility for use in 4-dimensional data assimilation[J]. *Tellus, Ser A*, 1997, **49**(1): 3—31.
- [5] Zhang S, Zou X, Ahlquist J E, et al. Use of differentiable and non-differentiable optimization algorithms for variational data assimilation with discontinuous cost functions[J]. *Mon Wea Rev*, 2000, **128**(2): 4031—4044.
- [6] Xu Q. Generalized adjoint for physical processes with parameterized discontinuities—Part I: basic issues and heuristic example[J]. *J Atmos Sci*, 1996, **53**(8): 1123—1142.
- [7] Verlinde J, Cotton W R. Fitting microphysical observations of non-steady convective clouds to a numerical model: an application of the adjoint technology of data assimilation to a kinematical model[J]. *Mon Wea Rev*, 1993, **121**(10): 2776—2793.
- [8] 王佳峰. 关于含有“开关”的物理过程的变分资料同化问题研究[D]. 博士论文. 北京: 中国科学院大气物理研究所, 2001.

Generalized Variational Data Assimilation Method and Numerical Experiment for Non-Differential System

HUANG Si_xun, DU Hua_dong, HAN Wei

(P. O. Box 003, Nanjing 211101, P. R. China)

Abstract: The generalized variational data assimilation for non-differential dynamical systems is studied. There is no tangent linear model for non-differential systems and thus the general adjoint model can not be derived in the traditional way. The weak form of the original system was introduced, and then the generalized adjoint model was derived. The generalized variational data assimilation methods were developed for non-differential low dimensional system and non-differential high dimensional system with global and local observations. Furthermore, ideas in inverse problems are introduced to 4DVAR of non-differential partial differential system with local observations.

Key words: variational data assimilation; non-differential system; adjoint method