应用数学和力学，第6卷第9期（1985年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于功的互等定理与叠加原理的等价性*

付宝连

（黑龙江东北重型机械学院，1982年8月21日收到）

摘　要

在文中，我们从理论上证明了功的互等定理与位移叠加原理的等价性和与反力叠加原理的等价性。这些等价性具有重要的理论价值和重要的实际价值。

同时我们还指出，Castigliano位移方程也能用于求解变形体域内的位移。

一、引　言

功的互等定理是一个经典性原理，在结构力学中有着重要的应用。

在文章[3]中，我们初步地推广了功的互等定理的应用。在文章[4]中，我们则进一步推广了它的应用，并且说明了功的互等定理与位移叠加原理的等价性。

本文将从理论上证明，在单位载荷基本系统与实际系统之间应用功的互等定理时，则功的互等定理等价于位移叠加原理而在单位位移基本系统与实际系统之间应用功的互等定理时，则功的互等定理等价于反力叠加原理。这些等价性具有重要的理论价值和重要的实际价值。

等价性的理论价值在于它们为进一步推广功的互等定理的应用提供了理论基础；丰富了功的互等定理的自身内容。原来从功的互等定理能够导出三个原理，而今却能导出五个原理，它们分别是位移互等定理，反力互等定理，位移反力互等定理，位移叠加原理和反力叠加原理。

等价性的实际价值在于，它们为求解矩形弹性薄板的弯曲问题给出了一个简便通用的方法。其实际价值还在于，将有可能进一步推广功的互等定理的应用于解决其它问题。

二、关于功的互等定理与位移叠加原理的等价性

取两个小变形的物体，我们假设它们的材料，尺寸及形状完全相同。其中之一是一单位载荷基本系统而另一个为实际系统。

该两系统的边界条件是彼此独立的而且该两系统均处于真实状态。

对于单位载荷基本系统，一单位集中载荷沿某一定方向被作用于变形体域内的一流动坐标点 (ξ,η,ζ)。符号 p_{1x},p_{1y},p_{1z}；u_1,v_1,w_1 和 $\bar{u}_1$，$\bar{v}_1$，$\bar{w}_1$ 分别表示由此单位集中载荷所引

* 钱伟长推荐。

起的表面力分量，位移分量和表面位移分量。

对于实际系统，符号 F_{2x}，F_{2y}，F_{2z}；p_{2x}，p_{2y}，p_{2z} 和 $\bar{u}_2$，$\bar{v}_2$，$\bar{w}_2$ 分别表示体积力分量，表面力分量和表面位移分量。

符号 $\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)$ 表示实际系统在点 (ξ,η,ζ) 处沿单位集中载荷方向的相应位移。

定理1 在单位载荷基本系统与实际系统之间应用功的互等定理时，则功的互等定理等价于位移叠加原理。

在该两系统之间应用功的互等定理，我们得到

$$\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)+\iint_\Omega(p_{1x}\bar{u}_2+p_{1y}\bar{v}_2+p_{1z}\bar{w}_2)d\Omega$$
$$=\iiint_V(F_{2x}u_1+F_{2y}v_1+F_{2z}w_1)dV+\iint_\Omega(p_{2x}\bar{u}_1+p_{2y}\bar{v}_1+p_{2z}\bar{w}_1)d\Omega \tag{2.1}$$

或把它简写为

$$\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)=\iiint_V\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{D}_{1V}dV+\iint_\Omega\mathbf{P}_2\cdot\bar{\mathbf{D}}_{1b}d\Omega-\iint_\Omega\mathbf{P}_1\cdot\bar{\mathbf{D}}_{2b}d\Omega \tag{2.2}$$

对于单位载荷基本系统，据位移互等定理可知，由在点 (ξ,η,ζ) 处沿某一定方向作用的第一单位集中载荷在点 (x,y,z) 处所引起的位移 $\mathbf{D}_{1V}$（或$\bar{\mathbf{D}}_{1b}$）等于由在点 (x,y,z) 处沿该点的位移方向作用的第二单位集中载荷在点 (ξ,η,ζ) 处沿第一单位集中载荷方向所引起的位移 $\mathbf{D}'_{1V}$（或 $\bar{\mathbf{D}}'_{1b}$）。因此，式（2.2）中的前两项分别表示由体积力和表面力在点(ξ,η,ζ)处沿第一单位集中载荷方向的实际系统的位移。又据位移反力互等定理可知，由在点 (ξ,η,ζ) 处沿某一定方向作用的第一单位集中载荷在表面 (x,y,z) 点处所引起的表面力 $\mathbf{P}_1$ 等于由作用于表面点 (x,y,z) 处沿此表面力 $\mathbf{P}_1$ 方向的单位位移在点 (ξ,η,ζ) 处沿第一单位集中载荷方向所引起的分布位移强度 $\mathbf{D}'_1$ 的负值，于是式（2.2）可被写为

$$\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)=\iiint_V\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{D}'_{1V}dV+\iint_\Omega\mathbf{P}_2\cdot\bar{\mathbf{D}}'_{1b}d\Omega+\iint_\Omega\mathbf{D}'_1\cdot\bar{\mathbf{D}}_{2b}d\Omega \tag{2.3}$$

式(2.3)右端的第三项表示由作用于表面上 (x,y,z) 点处的位移 $\bar{\mathbf{D}}_{2b}$ 在 (ξ,η,ζ) 点处沿第一单位集中载荷方向所引起的位移。

于是我们证明了位移 $\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)$ 是由体积力，表面力和表面位移所引起的位移之和，这也就是说，我们从功的互等定理导出了位移叠加原理。

下面我们将从位移叠加原理导出功的互等定理。（即证明定理的可逆性）

由 Castigliano 变分方程我们有

$$\iiint_V\delta U_c dV=\iint_\Omega(\bar{u}\delta p_x+\bar{v}\delta p_y+\bar{w}\delta p_z)d\Omega+\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)\delta P \tag{2.4}$$

这里 U_c 表示余能密度。对于线性弹性体，我们有 $U_c=U_p$，这里 U_p 表示势能密度。

将 $U_c=U_p$ 代入方程式（2.4）中我们得下述方程

$$\iiint_V\delta U_p dV=\iint_\Omega(\bar{u}\delta p_x+\bar{v}\delta p_y+\bar{w}\delta p_z)d\Omega+\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)\delta P \tag{2.5}$$

把 U_p 对 P 取变分，则得

$$\delta U_p=\frac{\partial U_p}{\partial e_x}\frac{\partial e_x}{\partial P}\delta P+\frac{\partial U_p}{\partial e_y}\frac{\partial e_y}{\partial P}\delta P+\cdots=(\sigma_x e_{x1}+\sigma_y e_{y1}+\cdots)\delta P \tag{2.6}$$

这里 $e_{x1},e_{y1},\cdots$表示由作用于点 (ξ,η,ζ) 处的第一单位集中载荷在点 (x,y,z) 处所引起的应变分量。将式(2.6)代入式(2.5)，注意到平衡方程，静力边界条件和应力应变关系并且应用 Green 公式，则得

$$\iiint_V \delta U_p dV = \iiint_V \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{D}_{1V} \delta P dV + \iint_\Omega \mathbf{P}_2 \cdot \overline{\mathbf{D}}_{1b} \delta P d\Omega \tag{2.7}$$

方程式(2.5)右端第一项成为

$$\iint_\Omega (\bar{u}\delta p_x + \bar{v}\delta p_y + \bar{w}\delta p_z) d\Omega = \iint_\Omega (\bar{u} p_{x1} + \bar{v} p_{y1} + \bar{w} p_{z1}) \delta P d\Omega \tag{2.8}$$

这里 p_{x1}, p_{y1}, p_{z1} 表示由作用于点 (ξ,η,ζ) 处的第一单位集中载荷在表面上 (x,y,z) 点处所引起的表面力分量。

将式(2.7)、(2.8)代入方程(2.5)中，则得

$$\Delta_2(\xi,\eta,\zeta) = \iiint_V \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{D}_{1V} dV + \iint_\Omega \mathbf{P}_2 \cdot \overline{\mathbf{D}}_{1b} d\Omega - \iint_\Omega \mathbf{P}_1 \cdot \overline{\mathbf{D}}_{2b} d\Omega \tag{2.9}$$

上式表示变形体表面的挠曲方程。为证明定理一的正确，首先必须证明方程(2.9)也适用于求解变形体域的内部位移。为此，我们假设，一集中载荷 P 沿某一定方向作用于变形体域的内部 (ξ,η,ζ) 点处，如图1(a)所示。无论如何，总可以从体中剖出一部分 Ⅱ，如图1(b)所示，并使此集中力 P 刚好作用在部分 Ⅱ 表面上的 (ξ,η,ζ) 点处。留下部分 Ⅰ 示于图1(c)。

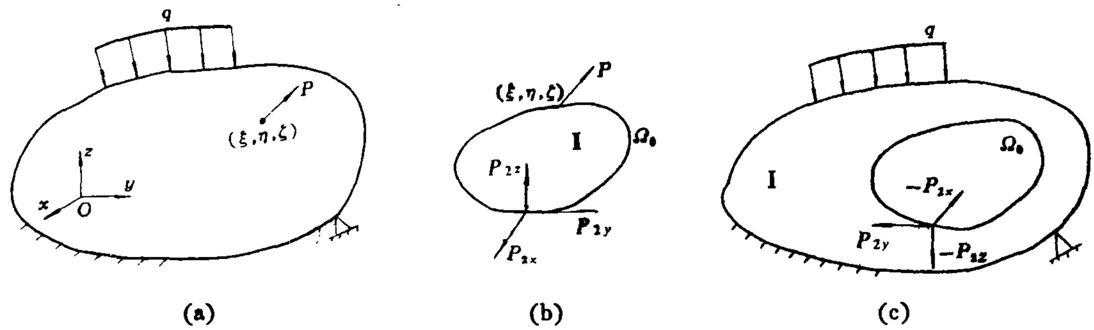


图 1

变形体处于真实状态，在该体被分成 Ⅰ 和 Ⅱ 两部分后，这两部分仍然处于真实状态。应用 Castigliano 变分方程(2.5)于部分 Ⅱ，则得

$$\iiint_{V_2} \delta U_p dV = \iint_{\Omega_0} (u'\delta p_{2x} + v'\delta p_{2y} + w'\delta p_{2z}) d\Omega + \Delta_2(\xi,\eta,\zeta)\delta P \tag{2.10}$$

并且应用方程(2.5)于部分 Ⅰ，则得

$$\iiint_{V_1} \delta U_p dV = \iint_\Omega (\bar{u}\delta p_x + \bar{v}\delta p_y + \bar{w}\delta p_z) d\Omega - \iint_{\Omega_0} (u'\delta p_{2x} + v'\delta p_{2y} + w'\delta p_{2z}) d\Omega \tag{2.11}$$

将式(2.10)与式(2.11)相加，则得

$$\iiint_V \delta U_p dV = \iint_\Omega (\bar{u}\delta p_x + \bar{v}\delta p_y + \bar{w}\delta p_z) d\Omega + \Delta_2(\xi,\eta,\zeta)\delta P \tag{2.12}$$

由于方程(2.12)和方程(2.5)完全相同，因此，我们也能从方程(2.12)导出方程(2.9)。因此，方程(2.9)不仅适用于求解变形体的表示面挠曲方程而且也适用于求解变形体域的内部位移方程。

比较方程(2.9)和方程(2.3)，则得

$$\iiint_V \mathbf{F}_2 \cdot (\mathbf{D}_{1V} - \mathbf{D}'_{1V}) dV + \iint_\Omega \mathbf{P}_2 \cdot (\overline{\mathbf{D}}_{1b} - \overline{\mathbf{D}}'_{1b}) d\Omega - \iint_\Omega (\mathbf{P}_1 + \mathbf{D}'_1) \cdot \overline{\mathbf{D}}_{2b} d\Omega = 0 \tag{2.13}$$

对于某一单位载荷基本系统，由于实际系统是任意的而且诸量 $\mathbf{F}_2, \mathbf{P}_2, \overline{\mathbf{D}}_{2b}$ 分别都是任意的和独立的，于是我们得到

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}_{1V}&=\mathbf{D}'_{1V} \quad (x,y,z)\in V\\ \bar{\mathbf{D}}_{1b}&=\bar{\mathbf{D}}'_{1b} \quad (x,y,z)\in \Omega\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{P}_1=-\mathbf{D}'_1 \quad (x,y,z)\in\Omega \tag{2.15}$$

式(2.14)通常被称为位移互等定理，而式(2.15)通常被称为位移反力互等定理。

再将式(2.14)和(2.15)代入方程(2.3)中，则得方程(2.2)。于是应用Castigliano变分方程我们便证明了该定理的可逆性。

三、关于功的互等定理与反力叠加原理的等价性

我们假定，变形体表面Ω被分成两部分Ω_1和Ω_2。均布的单位位移沿着某一方向被作用在表面Ω_1部分。符号$\bar{\mathbf{D}}_{1b}$表示在表面Ω_2部分由此均布的单位位移所引起的位移。符号$\mathbf{P}_1$表示由此均布的单位位移在表面Ω上所引起的表面力。符号$\mathbf{D}_{1V}$表示由此均布的单位位移在变形体域内所引起的位移。我们称此系统为单位位移基本系统。

对于实际系统，符号$\mathbf{P}_{21}$表示在单位位移方向在表面Ω_1部分的表面力；$\mathbf{P}_2$——Ω_2部分的表面力；$\bar{\mathbf{D}}_{2b}$——Ω部分的表面位移；$\mathbf{F}_2$——体积力。

定理2 在单位位移基本系统与实际系统之间应用功的互等定理时，则功的互等定理等价于反力叠加原理。

在此两系统之间应用功的互等定理时，则得

$$\iint_{\Omega_1}\mathbf{P}_{21}d\Omega+\iint_{\Omega_2}\mathbf{P}_2\cdot\bar{\mathbf{D}}_{1b}d\Omega+\iiint_V\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{D}_{1V}dV=\iint_\Omega\mathbf{P}_1\cdot\bar{\mathbf{D}}_{2b}d\Omega \tag{3.1}$$

根据位移反力互等定理，则得

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}_{1V}&=-\mathbf{R}_{1V} \quad (x,y,z)\in V+\Omega_1\\ \bar{\mathbf{D}}_{1b}&=-\mathbf{R}_{1b} \quad (x,y,z)\in\Omega\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

根据反力互等定理，则得

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{R}_1 \quad (x,y,z)\in\Omega \tag{3.3}$$

这里$\mathbf{R}_{1V}$表示由沿位移$\mathbf{D}_{1V}$方向在变形体域内任意一点作用的单位集中载荷在表面Ω_1部分沿单位位移方向所引起的表面力合力。而$\mathbf{R}_{1b}$表示由沿位移$\bar{\mathbf{D}}_{1b}$方向作用于表面Ω_2部分上的任意一点的单位集中载荷在表面Ω_1部分上沿单位位移方向所引起的表面合力。$\mathbf{R}_1$表示由沿表面力$\mathbf{P}_1$方向在表面Ω上任意一点处的单位面积上作用一单位位移在表面Ω_1部分沿单位位移方向所引起的表面力合力。于是式(3.1)成为

$$\iint_{\Omega_1}\mathbf{P}_{21}d\Omega=\iiint_V\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{R}_{1V}dV+\iint_{\Omega_2}\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{R}_{1b}d\Omega+\iint_\Omega\mathbf{R}_1\cdot\bar{\mathbf{D}}_{2b}d\Omega \tag{3.4}$$

式(3.4)即是反力叠加原理。

现在我们应用Lagrange变分方程从式(3.4)导出功的互等定理。据Lagrange变分方程，则得

$$\iiint_V\delta U_p dV=\iiint_V(F_{2x}\delta u+F_{2y}\delta v+F_{2z}\delta w)dV+\iint_\Omega(p_{2x}\delta\bar{u}+p_{2y}\delta\bar{v}+p_{2z}\delta\bar{w})d\Omega \tag{3.5}$$

将$U_p=U_c$代入式(3.5)的左端，并且假设在表面Ω_1部分上沿某一定方向作用一均布的位移Δ，于是有

$$\delta U_c=\frac{\partial U_c}{\partial\sigma_x}\frac{\partial\sigma_x}{\partial\Delta}\delta\Delta+\frac{\partial U_c}{\partial\sigma_y}\frac{\partial\sigma_y}{\partial\Delta}\delta\Delta+\cdots=(e_x\sigma_{x1}+e_y\sigma_{y1}+\cdots)\delta\Delta \tag{3.6}$$

这里 σ_{x1}，σ_{y1}，…表示由沿某一定方向在表面 Ω_1 部分作用一均布的单位位移在变形体中所引起的应力分量。将式 (3.6) 代到方程 (3.5) 的左端并且经过类似于推导式 (2.7) 的推导，则得

$$\iiint_V \delta U_c dV=\iint_\Omega \mathbf{P}_1\cdot\bar{\mathbf{D}}_{2b}\delta\Delta d\Omega \tag{3.7}$$

方程 (3.5) 右端第一项为

$$\iiint_V\left(F_{2x}\frac{\partial u}{\partial\Delta}+F_{2y}\frac{\partial v}{\partial\Delta}+F_{2z}\frac{\partial w}{\partial\Delta}\right)\delta\Delta dV=\iiint_V \mathbf{F}_2\cdot\mathbf{D}_{1V}\delta\Delta dV \tag{3.8}$$

而第二项成为

$$\iint_\Omega\left(p_{2x}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\Delta}+p_{2y}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\Delta}+p_{2z}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\Delta}\right)\delta\Delta d\Omega=\iint_{\Omega_1}\mathbf{P}_{21}\delta\Delta d\Omega+\iint_{\Omega_2}\mathbf{P}_2\cdot\bar{\mathbf{D}}_{1b}\delta\Delta d\Omega \tag{3.9}$$

将式 (3.7)～(3.9) 代入方程 (3.5) 中，最后则得

$$\iint_{\Omega_1}\mathbf{P}_{21}d\Omega=-\iiint_V \mathbf{F}_2\cdot D_{1V}dV-\iint_{\Omega_2}\mathbf{P}_2\cdot\bar{\mathbf{D}}_{1b}d\Omega+\iint_\Omega \mathbf{P}_1\cdot\bar{\mathbf{D}}_{2b}d\Omega \tag{3.10}$$

式 (3.10) 和式 (3.1) 完全相同。比较式 (3.10) 和式 (3.4) 则得式 (3.2) 和 (3.3)。于是我们应用 Lagrange 变分方程证明了定理的可逆性。

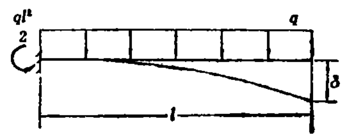
四、讨　论

结构力学指出，可以从功的互等定理导出三个原理，而上述两节又导出两个原理，于是可以从功的互等定理导出五个原理，它们是

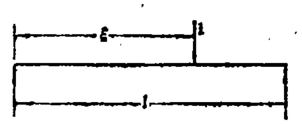
(1) 位移互等定理；(2) 反力互等定理；(3) 位移反力互等定理；(4) 位移叠加原理；(5) 反力叠加原理。

文献[2]给出了关于定理(1)～(3)的直梁问题的简单说明。下面我们将给出关于定理(4)～(5)的直梁问题的简单说明。

问题1：在作为实际系统的悬臂梁[图2(a)]与作为单位载荷基本系统的简支梁[图2(b)]之间应用功的互等定理，则得悬臂梁的挠曲轴方程为



(a)



(b)

图 2

$$W_2(\xi)=\int_0^\xi qW_1'(x,\xi)dx+\int_\xi^l qW_1''(x,\xi)dx-\frac{ql^2}{2}\frac{d}{dx}W_1'(x,\xi)\Big|_{x=0}+\frac{\xi}{l}\delta$$

上式表示，悬臂梁的总挠度等于由均布载荷 q，作用于悬臂梁左端的弯矩 $\frac{1}{2}qL^2$ 和悬臂梁右

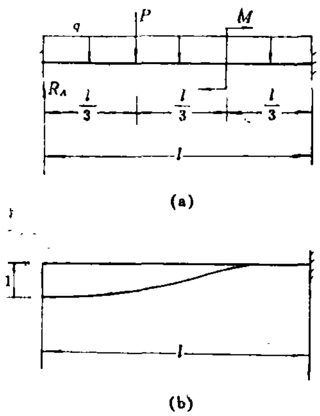


图 3

端挠度所引起的三项挠度的叠加（当然，挠度δ必须满足悬臂梁左端转角为零）。

问题2：在作为实际系统两端固定的梁[图3(a)]和作为单位位移基本系统的悬臂梁[图3(b)]之间应用功的互等定理，则得两端固定梁的左端垂直反力为

$$R_A=PW_{\delta 1}\left(\frac{l}{3}\right)-M\left.\frac{d}{dx}W_{\delta 1}(x)\right|_{x=\frac{2}{3}l}+\int_0^l qW_{\delta 1}(x)dx$$

上式表示总的垂直反力等于由P，M，q所引起的三个反力的叠加。

参 考 文 献

[1] 钱伟长、叶开沅，弹性力学，科学出版社，(1980).
[2] 龙驭球、包世华，结构力学（上册），人民教育出版社.
[3] 付宝连，求解位移方程的能量原理，应用数学和力学，2，6(1981).
[4] 付宝连，应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程，应用数学和力学，3，3(1982).

On Equivalents of the Reciprocal Theorem to Superposition Principles

Fu Bao-lian

(*Northeast Heavy Machinary Institute, Heilongjiang*)

Abstract

In this paper in the terms of theory we have proved that the reciproal theorem is equivalent to the superposition principle of displacements and is equivalent to the superposition principle of reactive forces. These equivalents have important theoretical values and practical values.

At the same time we also point out that Castigliano displacement equation can be applied to solve the interior displacement of the region of the deformable body, too.