应用数学和力学，第6卷第9期（1985年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

半线性系统的Robin边值问题的奇摄动

章国华　林宗池

（加拿大卡技利大学数学系）（中国福建师范大学数学系）

（1984年11月15日收到）

摘　　要

本文利用微分不等式的方法与技巧研究半线性系统的Robin边值问题的奇摄动．我们假定相应的退化系统至少有一个I_q-稳定的解．这种依分量I_q-稳定性的条件将允许我们去得到解的每一个分量的估计．

一、引　　言

本文研究如下的半线性边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\mathbf{y}''=\mathbf{h}(t,\mathbf{y})\qquad(a<t<b)\\&\mathbf{y}(a,\varepsilon)-P\mathbf{y}'(a,\varepsilon)=\mathbf{A},\ \ \mathbf{y}(b,\varepsilon)+Q\mathbf{y}'(b,\varepsilon)=\mathbf{B}\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中ε是正的实值小参数，$\mathbf{y}$、$\mathbf{h}$、$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$是n-维向量，$P=\mathrm{diag}\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$和$Q=\mathrm{diag}\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$是$(n\times n)$常数矩阵．

我们假设相应的退化系统$\mathbf{0}=\mathbf{h}(t,\mathbf{y})$有一个$I_q$-稳定[1]的解$\mathbf{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$，也就是说，存在$n$个正的常数$m_1,\cdots,m_n$使得

$$\frac{\partial^k h_i}{\partial y_i^k}(t,y_1,\cdots,u_i,\cdots,y_n)=0$$

其中$k=0,1,\cdots,2q$；$i=1,\cdots,n$；$(t,y_i)\in[a,b]\times D_j,j\neq i$，和

$$\frac{\partial^{2q+1}h_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,y_1\cdots,y_n)\geqslant(2q+1)!m_i^2>0$$

其中$i=1,\cdots,n$；$(t,y_i)\in\prod\limits_{i=1}^{n}D_i\times[a,b]$

这里$q\geqslant0$是一个整数和

$$D_i=\{y_i:|y_i-u_i(t)|\leqslant\delta\}$$

其中δ是一个正的常数．基于下列的引理，依分量I_q-稳定将使我们可以得到对问题(1.1)的解$\mathbf{y}(t,\varepsilon)$的每一个分量的估计．

引理1[2]　假设$\mathbf{h}$在区域$[a,b]\times\prod\limits_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i]$中是连续的．又假设在$[a,b]$上存在$n$组$C^2$类

的界定函数$(\alpha_i(t),\ \beta_i(t))$，满足

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_i(a)-p_i\alpha_i'(a)\leqslant A_i\leqslant\beta_i(a)-p_i\beta_i'(a)\\ \alpha_i(b)+q_i\alpha_i'(b)\leqslant B_i\leqslant\beta_i(b)+q_i\beta_i'(b),(i=1,2,\cdots,n)\\ \alpha_i(t)\leqslant\beta_i(t),\ t\in(a,b),\ (i=1,2,\cdots,n)\\ \alpha_i''(t)\geqslant h_i(t,y_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,y_n),\ \beta_i''(t)\leqslant h_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n)\end{array}\right\}\tag{1.2}$$

其中$t\in(a,b)$，$\alpha_j(t)\leqslant y_j\leqslant\beta_j(t)$，$j\neq i$.

则问题(1.1)有一个解$\mathbf{y}(t)=(y_1(t),\cdots,y_n(t))$且满足

$$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t),\ t\in[a,b],\ (i=1,2,\cdots,n)$$

如果界函数只是分段$C^2[a,b]$类，也有一个相应的结果.

引理2[3] 假设$[a,b]$有分割$a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$和假设在每一个子区间$[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,\cdots,m)$,上存在逐段二次连续可微的n组界定函数(α_j,β_j)，$j=1,\cdots,n$。又假设在每一个子区间$[t_{i-1},t_i]$上(1.2)式成立，在分点t_{i-1}和t_i处，导数分别是右导数和左导数。最后，假设对于$[a,b]$中的每一个t，$D_L\alpha_i(t)\leqslant D_R\alpha_i(t)$和$D_L\beta_i(t)\geqslant D_R\beta_i(t)$。这里$D_L$、$D_R$分别表示左、右导数。

则问题(1.1)有一个解$\mathbf{y}(t)=(y_1(t),\cdots,y_n(t))$对于$a\leqslant t\leqslant b$满足

$$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

二、两 个 结 果

借助于引理1，我们得到下列结果.

定理 1 假设退化系统$\mathbf{h}(t,\mathbf{y})=0$有一个$C^2[a,b]$类的$I_q$-稳定的解$\mathbf{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$。则存在一个$\varepsilon_0>0$使得当$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时边值问题(1.1)有一个解

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}(t,\varepsilon)=(y_1(t,\varepsilon),\cdots,y_n(t,\varepsilon)),\quad t\in[a,b]$$

满足

$$|y_i(t,\varepsilon)-u_i(t)|\leqslant L_i(t,\varepsilon)+R_i(t,\varepsilon)+C_i\varepsilon^{\frac{1}{2q+1}}\qquad(i=1,\cdots,n)$$

这里的C_i是某个正的常数，

$$L_i(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon(m_ip_i)^{-1}|A_i-u_i(a)+p_iu_i'(a)|\exp[-m_i(t-a)/\varepsilon],\ 若q=0\\ \sigma_{1i}[1+qm_i\varepsilon^{-1}(q+1)^{-1/2}\sigma_{1i}^q(t-a)]^{-1/q},\ 若q\geqslant1\end{cases}\tag{2.1}$$

和

$$R_i(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon(m_iq_i)^{-1}|B_i-u_i(b)-q_iu_i'(b)|\exp[-m_i(b-t)/\varepsilon],\ 若q=0\\ \sigma_{2i}[1+qm_i\varepsilon^{-1}(q+1)^{-1/2}\sigma_{2i}^q(b-t)^{-1/q},\quad 若q\geqslant1\end{cases}\tag{2.2}$$

其中

$$\sigma_{1i}^{q+1}=\varepsilon(q+1)^{1/2}(m_ip_i)^{-1}|A_i-u_i(a)+p_iu_i'(a)|$$

和

$$\sigma_{2i}^{q+1}=\varepsilon(q+1)^{1/2}(m_iq_i)^{-1}|B_i-u_i(b)-q_iu_i'(b)|$$

证明 从退化解$\mathbf{u}(t)$是I_q—稳定的假设，我们有$h_i(t,y)\sim m_i^2y_i^{2q+1}$，因此导致我们去研究方程

$$\varepsilon^2 Z_i'' = m_i^2 Z_i^{2q+1} \tag{2.3}$$

事实上，非负函数$L_i(t,\varepsilon)$是(2.3)的解，使得

$$L_i(a,\varepsilon)=\sigma_{1i},\quad L_i'(a,\varepsilon)=-|A_i-u_i(a)+p_iu_i'(a)|/p_i$$

类似地，非负函数$R_i(t,\varepsilon)$是(2.3)的解且满足

$$R_i(b,\varepsilon)=\sigma_{2i}, R_i'(b,\varepsilon)=|B_i-u_i(b)-q_iu_i'(b)|/q_i$$

现在我们对于t在(a,b)中和$\varepsilon>0$定义所需要的界定函数对：

$$\alpha_i(t,\varepsilon)=u_i(t)-L_i(t,\varepsilon)-R_i(t,\varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon)$$
$$\beta_i(t,\varepsilon)=u_i(t)+L_i(t,\varepsilon)+R_i(t,\varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)$$

其中

$$\Gamma_i(\varepsilon)=[\varepsilon^2 r_i m_i^{-2}[(2q+1)!]^{-1}]^{1/(2q+1)}$$

这里的r_i是一个正的常数，选得如此之大，只要

$$r_i \geqslant M_i(2q+1)! \tag{2.4}$$

即可。其中$M_i=\max\limits_{[a,b]}[|u_i''(t)|]$.显然，我们有$\Gamma_i(\varepsilon)>0$。

注意到集合 $\{(t,y_i),\ t\in[a,b],\alpha_i(t,\varepsilon)\leqslant y_i\leqslant\beta_i(t,\varepsilon)\}$ 对于一切充分小的 ε 是包含在区域D_i中。

直接指出$\alpha_i(t,\varepsilon)$和$\beta_i(t,\varepsilon)$满足(1.2)的前三个性质。余下的是要去证明当用$h_i\varepsilon^{-2}$代替h_i时它们也满足(1.2)的最后一个性质。应用Taylor定理和$\mathbf{u}(t)$是I_q-稳定的假设，我们有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\alpha_i''-h_i(t,y_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,y_n)=\varepsilon^2u_i''-\varepsilon^2L_i''-\varepsilon^2R_i''\\
&\quad+\frac{1}{(2q+1)!}\frac{\partial^{2q+1}h_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,y_1,\cdots,\theta_i,\cdots,y_n)(\alpha_i(t,\varepsilon)-u_i(t))^{2q+1}\\
&=\varepsilon^2u_i''-\varepsilon^2L_i''-\varepsilon^2R_i''+\frac{1}{(2q+1)!}\frac{\partial^{2q+1}h_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,y_1,\cdots,\theta_i,\cdots,y_n)(L_i+R_i+\Gamma_i)^{2q+1}\\
&\geqslant-\varepsilon^2|u_i''|+m_i^2\Gamma_i^{2q+1}\geqslant-\varepsilon^2M_i+\frac{\varepsilon^2r_i}{(2q+1)!}
\end{aligned}$$

因此

$$\varepsilon^2\alpha_i''\geqslant h_i(t,y_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,y_n)$$

其中θ_i是$\alpha_i(t)$和$u_i(t)$之间的某一内点。

对β_i的证明是类似的，因此，由引理1得$\alpha_i(t,\varepsilon)\leqslant y_i(t,\varepsilon)\leqslant\beta_i(t,\varepsilon)$和定理1是成立的。

定理 2 假定

(a) 存在函数$\mathbf{u}_1(t)=(u_{11}(t),\cdots,u_{1n}(t))$和$\mathbf{u}_2(t)=(u_{21}(t),u_{22}(t),\cdots,u_{2n}(t))$，其中$u_{ji}(t)$分别在$[a,T_i]$和$[T_i,b]$上是$C^2$类函数，并且对于$j=1,2$它们满足

$$h_i(t,y_1,\cdots,u_{ji},\cdots,y_n)=0$$

这里$t\in[a,b]$和y_k在D_k中，$k\neq i$。此外，$u_{1i}(T_i)=u_{2i}(T_i)$和$u_{1i}'(T_i)<u_{2i}'(T_i)$，$T_i$在$(a,b)$中，其中

$$D_k=\{y_k:|y_k-u_k(t)|\leqslant d_k(t)\}$$

此处

$$u_k(t)=\begin{cases}u_{1k}(t), & t\in[a,T_k]\\ u_{2k}(t), & t\in[T_k,b]\end{cases}$$

和d_k是一个光滑的正函数，使得

$$|A_k-u_k(a)+p_ku'(a)|\leqslant d_k(t)\leqslant|A_k-u_k(a)+p_ku'_k(a)|+\delta \quad t\in\left[a,a+\frac{\delta}{2}\right]$$

$$|B_k-u_k(b)-q_ku'_k(b)|\leqslant d_k(t)\leqslant|B_k-u_k(b)-q_ku'_k(b)|+\delta \quad t\in\left[b-\frac{\delta}{2},b\right]$$

$\delta>0$是一个小的常数；

(b) 对非负整数q，函数$\mathbf{h}$关于$(t,\mathbf{y})$连续，并且在D_i中关于y_i是$C^{(2q+1)}$类；

(c) $\mathbf{u}_j(t)$ $(j=1,2)$，分别在$[a,T_i]$和$[T_i,\ b]$中是I_q-稳定的。

则存在$\varepsilon_0>0$，使得对每一个ε，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，(1.1)有解$\mathbf{y}=\mathbf{y}(t,\varepsilon)=(y_1(t,\varepsilon),\cdots,y_n(t,\varepsilon))$，而且，对于$t$在$[a,b]$中和$i=1,2,\cdots,n$，有

$$|y_i(t,\varepsilon)-u_i(t)|\leqslant|A_i-u_{1i}(a)+p_iu'_{1i}(a)|E_i(t,\varepsilon)$$

$$+|B_i-u_{2i}(b)-q_iu'_{2i}(b)|F_i(t,\varepsilon)+c_q\varepsilon^{\frac{1}{2q+1}}$$

其中c_q是正的、可计算出的一个不依赖于ε的常数，而

$$E_i(t,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{m_ip_i}\exp\left[-\dfrac{m_i}{\varepsilon}(t-a)\right], & 若q=0\\ \dfrac{(\varepsilon\sqrt{q+1})^{1/(q+1)}}{(m_ip_i)^{1/(q+1)}|A_i-u_{1i}(a)+p_iu'_{1i}(a)|^{q/(q+1)}\left[1+\dfrac{qm_i}{\varepsilon\sqrt{q+1}}\sigma_{1i}^q(t-a)\right]^{1/q}} & 若q\geqslant1\end{cases}$$

和

$$F_i(t,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{m_ip_i}\exp\left[-\dfrac{m_i}{\varepsilon}(b-t)\right], & 若q=0\\ \dfrac{(\varepsilon\sqrt{q+1})^{1/(q+1)}}{(m_iq_i)^{1/(q+1)}|B_i-u_{2i}(b)-q_iu'_{2i}(b)|^{q/(q+1)}\left[1+\dfrac{qm_i}{\varepsilon\sqrt{q+1}}\sigma_{2i}^q(b-t)\right]^{1/q}} & 若q\geqslant1\end{cases}$$

其中

$$\sigma_{1i}^{q+1}=\frac{\varepsilon\sqrt{q+1}}{m_ip_i}|A_i-u_{1i}(a)+p_iu'_{1i}(a)|,\quad \sigma_{2i}^{q+1}=\frac{\varepsilon\sqrt{q+1}}{m_ip_i}|B_i-u_{2i}(b)-q_iu'_{2i}(b)|$$

证明 如果我们能够构造出函数α_i和β_i满足微分不等式的要求，那么从引理2就能得出本定理。事实上，对于$t\in[a,b]$和$\varepsilon>0$，我们定义

$$\alpha_i(t,\varepsilon)=\begin{cases}u_{1i}(t)-|A_i-u_{1i}(a)+p_iu'_{1i}(a)|E_i(t,\varepsilon)\\ \quad-|B_i-u_{2i}(b)-q_iu'_{2i}(b)|F_i(T_i,\varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon), & t\in[a,T_i]\\ u_{2i}(t)-|B_i-u_{2i}(b)-q_iu'_{2i}(b)|F_i(t,\varepsilon)\\ \quad-|A_i-u_{1i}(a)+p_iu'_{1i}(a)|E_i(T_i,\varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon), & t\in[T_i,b]\end{cases}$$

$$\beta_i(t,\varepsilon)=\begin{cases}u_{1i}(t)+|A_i-u_{1i}(a)+p_iu'_{1i}(a)|E_i(T_i,\varepsilon)+H_i(t,\varepsilon)+\Delta_i(\varepsilon) & t\in[a,T_i]\\ u_{2i}(t)+|B_i-u_{2i}(b)+q_iu'_{2i}(b)|F_i(t,\varepsilon)+\Omega_i(\varepsilon), & t\in[T_i,b]\end{cases}$$

其中

$$\Delta_i(\varepsilon)=(b-t)|A_i-u_{1i}(a)+p_iu'_{1i}(a)|E'_i(T_i,\varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)$$
$$+|B_i-u_{2i}(b)-q_iu'_{2i}(b)|[E_i(T_i,\varepsilon)+(b-T_i)E'_i(T_i,\varepsilon)]$$

$$\Omega_i(\varepsilon)=H_i(T_i,\varepsilon)+(b-t)|B_i-u_{2i}(b)-q_iu'_{2i}(b)|F'_i(T_i,\varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)$$
$$+|A_i-u_{1i}(a)+p_iu'_{1i}(a)|[E_i(T_i,\varepsilon)+(b-T_i)E'_i(T_i,\varepsilon)]$$

和

$$H_i(t,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{m_i}|u_{2i}'(T_i)-u_{1i}'(T_i)|\exp\left[-\dfrac{m_i}{\varepsilon}(T_i-t)\right], & 若q=0\\ \sigma\left[1+\dfrac{m_iq}{\varepsilon\sqrt{q+1}}\sigma^q(T_i-t)\right]^{-1/q}, & 若q\geqslant 1\end{cases}$$

其中

$$\sigma^{q+1}=\frac{\varepsilon\sqrt{q+1}}{m_i}|u_{2i}'(T_i)-u_{1i}'(T_i)|$$

$$\Gamma_i(\varepsilon)=\left[\frac{r_i\varepsilon^2}{m_i(2q+1)!}\right]^{(2q+1)^{-1}}$$

而$r_i>0$是选得如此之大，使得

$$r_i\geqslant M_i(2q+1)!,\quad M_i=\max\{\max_{[a,T_i]}|u_{1i}''(t)|,\max_{[T_i,b]}|u_{2i}''(t)|\}$$

对于t在$[T_i,b]$和$[a,T_i]$中的$\alpha_i(t,\varepsilon)$和$\beta_i(t,\varepsilon)$的微分不等式的验证类似于定理1和我们略去详情.

参 考 文 献

[1] O'Donnell, M. A., Boundary and corner layer behavior in singularly perturbed semilinear systems of boundary value problems, *SIAM J. Math. Anal.*(to appear)

[2] Bernfeld, S., and Lakshmikanthan, *An Introduction to Nonlinear Boundary Value problems*. Academic Press, New York, (1974).

[3] Hebets, P. and Laloy, Et'ude de probèmes aux limites par la méthode des sur-et sous-solutions, *Lecture notes*, Catholic University of Louvain, (1974).

Singular Perturbations of Robin Boundary Value Problems for Semilinear Systems

K. W. Chang

(Department of Mathematics, University of Calgary, Canada)

Lin Zong-chi

(Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper, we study the singular perturbations of Robin boundary value problems for semilinear systems using the method and technique of differential inequalities. We assume that the corresponding reduced system has at least one solution which is I_q-stable. This "componentwise" I_q-stability condition will allow us to obtain estimates for each component of the solution.