

正交异性劈锥面扁壳屋盖的计算*

成祥生

(同济大学, 1984年7月20日收到)

摘 要

本文介绍工业建筑中常用的正交各向异性劈锥面扁壳屋盖的计算。由于该劈锥面扁壳的中曲面存在变曲率和扭率, 故所得的基本方程组是变系数的, 欲得到精确的解析解在数学上有很大的困难。本文用小参数法求出在均布载荷作用之下, 四边简支的正交各向异性劈锥面扁壳屋盖的近似解答。

一、引 言

劈锥面扁壳常用作工业建筑中的屋盖。例如, 对于各向同性材料的情形, 利用劈锥面扁壳作为悬臂的屋顶以及坝墙的理论设计和实际计算在 E. Torroja 等人的著作[1~3]中已有叙述。关于具有弯曲形状母线的劈锥面扁壳屋顶在 I. Doganoff 的文章[4]中也作过研究。对于劈锥面形壳体的计算, 人们曾将解答展为微小参数的幂级数的方法^[5,6], 或者使用了薄壁杆件中的半无矩理论的解法^[7]。B. З. Власов 在[8]中所阐明的初函数法, 曾被 B. Д. Раїзер^[9]用作计算负高斯曲率的壳体^[9]。

本文介绍工业建筑中常用的正交各向异性劈锥面扁壳的计算。由于这种劈锥面扁壳的中曲面存在着变曲率和扭率, 故所得的基本方程是变系数的, 欲得到精确的解析解在数学上有很大的困难。本文用小参数法求出在均布载荷作用之下, 四边简支的正交各向异性劈锥面扁壳屋盖的近似解答。

二、基本方程和解答

根据文献[10,11]关于正交各向异性劈锥面扁壳取应力函数 $\phi = \phi(x, y)$ 及挠度函数 $w = w(x, y)$ 作为两个基本的未知函数, 它具有如下的一组方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_1}{h} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{D_3}{h} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_2}{h} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \frac{Z}{h} \\ \delta_2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2(k_y w)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(k_{xy} w)}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

* 钱伟长推荐。

其中 D_1 和 D_2 为薄壳在弹性主方向的弯曲刚度, D_3 为折算刚度, Z 为法向分布载荷的集度, $Z=Z(x, y)$.

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\mu_1\mu_2)}, \quad D_3 = D_1\mu_2 + 2D_k$$

D_k 是壳体在弹性主方向的扭转刚度, h 是壳体的厚度.

$$\delta_1 = \frac{1}{E_2}, \quad \delta_2 = \frac{1}{E_1}, \quad 2\delta_3 = \frac{1}{G} - \frac{\mu_1}{E_1} - \frac{\mu_2}{E_2} = \frac{1}{G} - 2\frac{\mu_1}{E_1}$$

其中 E_1 和 E_2 分别为壳体材料沿弹性主方向 x 和 y 轴的拉压弹性模量, μ_1 和 μ_2 为横向收缩系数.

$$D_k = \frac{1}{12}Gh^3, \quad \mu_2 E_1 = \mu_1 E_2, \quad D_1\mu_2 = D_2\mu_1$$

G 为材料的剪切弹性模量.

中面内力及弯曲内力的公式可用应力函数及挠度函数表示如下

$$\left. \begin{aligned} N_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad S = -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ M_x &= -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

设一劈锥面扁壳如图1所示, 其中曲面由下列方程来表示

$$F(x, y) = -4 \frac{f_m}{b^2} (by - y^2) \left[1 + \varepsilon \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) \right] \quad (2.3)$$

其中 a 和 b 分别为扁壳的底面沿 x 和 y 轴方向的尺寸, f_m 为壳体矢高的平均值.

$\varepsilon = (f_a - f_0)/(f_a + f_0)$ 为一小参数, f_a 和 f_0 分别为扁壳的最大矢高及最小矢高.

在这扁壳中 $k_x = 0$, 而 k_y 及扭率 k_{xy} 由下列公式所确定

$$k_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = k_{ym} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) \right], \quad k_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -k_{ym} \frac{\varepsilon}{a} (b - 2y) \quad (2.4)$$

其中 $k_{ym} = 8f_m/b^2$ 为壳体的平均曲率 (即在 $x=0$ 及 $x=a$ 两端曲率的平均值).

考虑到(2.4), 由方程(2.1)可看出: 基本方程是变系数的, 欲求出精确的解析解是困难的. 今将 w 及 ϕ 表示成按小参数展开^[5, 6]的幂级数形式

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(x, y), \quad \phi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \phi_k(x, y) \quad (2.5)$$

将形式为(2.5)的解代入(2.1)并计及(2.4), 比较具有 ε 同幂次的项, 可得到一系列的常系数的微分方程组

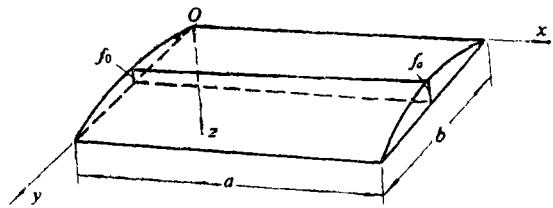


图 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_1}{h} \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + 2 \frac{D_3}{h} \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_2}{h} \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} - k_{ym} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} = \psi_1^{(k)}(x, y) \\ \delta_2 \frac{\partial^4 \phi_k}{\partial x^4} + 2 \delta_3 \frac{\partial^4 \phi_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4 \phi_k}{\partial y^4} + k_{ym} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = \psi_2^{(k)}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

(k=0, 1, 2, 3, ...)

在上式中的 $\psi_1^{(k)}(x, y)$ 及 $\psi_2^{(k)}(x, y)$ 在 0 级近似中具有形式

$$\psi_1^{(0)}(x, y) = Z(x, y)/h, \quad \psi_2^{(0)}(x, y) = 0 \quad (2.7)$$

而在其余的各级近似中有

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^{(k)}(x, y) = k_{ym} \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) \frac{\partial^2 \phi_{k-1}}{\partial x^2} + 2 \frac{k_{ym}}{a} (b-2y) \frac{\partial^2 \phi_{k-1}}{\partial x \partial y} \\ \psi_2^{(k)}(x, y) = -k_{ym} \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial x^2} - 2 \frac{k_{ym}}{a} (b-2y) \frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

(k=1, 2, 3, ...)

方程 (2.6)~(2.8) 按其本身结构来说和具有常数曲率的圆柱壳的一般工程理论完全相同, 故方程组 (2.6) 的解答可以用圆柱壳理论中熟知的解法进行解算。

若壳体在周边简支, 则有边界条件如下:

$$\text{在 } x=0 \text{ 和 } x=a \text{ 边有} \quad w = M_x = N_x = v = 0$$

$$\text{在 } y=0 \text{ 和 } y=b \text{ 边有} \quad w = M_y = N_y = u = 0$$

众所周知, 它们可变换成如下的边界条件

在周边上:

$$\phi = \Delta \phi = 0, \quad w = \Delta w = 0 \quad (2.9)$$

我们现在选择 ϕ_k 及 w_k 的解取下列形式的级数

$$\phi_k(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn}^{(k)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad w_k(x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn}^{(k)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.10)$$

其中

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n=1, 2, 3, \dots)$$

不难看出, 这些级数能满足周边简支的边界条件。

将 ϕ_k 及 w_k 代入 (2.6) 之后, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h} (D_1 \alpha_m^4 + 2D_3 \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_2 \beta_n^4) B_{mn}^{(k)} + k_{ym} \alpha_m^2 A_{mn}^{(k)} = L_{mn}^{(k)} \\ (\delta_2 \alpha_m^4 + 2\delta_3 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \delta_1 \beta_n^4) A_{mn}^{(k)} - k_{ym} \alpha_m^2 B_{mn}^{(k)} = M_{mn}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} L_{mn}^{(k)} &= \frac{\iint \psi_1^{(k)}(x, y) \sin \alpha_m x \cdot \sin \beta_n y dx dy}{\iint \sin^2 \alpha_m x \cdot \sin^2 \beta_n y dx dy} \\ M_{mn}^{(k)} &= \frac{\iint \psi_2^{(k)}(x, y) \sin \alpha_m x \cdot \sin \beta_n y dx dy}{\iint \sin^2 \alpha_m x \cdot \sin^2 \beta_n y dx dy} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

上列积分都遍及壳体的底面积($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$)。

求解(2.11), 可得到如下的解答。

对于0级近似有

$$A_{mn}^{(0)} = \frac{16q_0 k_{ym} \alpha_m^2}{h\pi^2 mn \eta_{mn}}, \quad B_{mn}^{(0)} = \frac{16q_0}{h\pi^2 mn \eta_{mn}} (\delta_2 \alpha_m^4 + 2\delta_3 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \delta_1 \beta_n^4) \quad (2.13)$$

其中已假定 $Z(x, y) = q_0 = \text{常数}$, 并有

$$\eta_{mn} = \frac{1}{h} (D_1 \alpha_m^4 + 2D_3 \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_2 \beta_n^4) (\delta_2 \alpha_m^4 + 2\delta_3 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \delta_1 \beta_n^4) + k_{ym}^2 \alpha_m^4$$

对于其它各级的近似是

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}^{(k)} &= \frac{1}{\eta_{mn}} \left[\frac{1}{h} (D_1 \alpha_m^4 + 2D_3 \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_2 \beta_n^4) q_{2mn}^{(k)} + k_{ym} \alpha_m^2 q_{1mn}^{(k)} \right] \\ B_{mn}^{(k)} &= \frac{1}{\eta_{mn}} \left[(\delta_2 \alpha_m^4 + 2\delta_3 \alpha_m^2 \beta_n^2 + \delta_1 \beta_n^4) q_{1mn}^{(k)} - k_{ym} \alpha_m^2 q_{2mn}^{(k)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} q_{1mn}^{(k)} &= \frac{8k_{ym}}{a^2} \left[\sum_p \frac{mp(m^2 + p^2)}{(m^2 - p^2)^2} A_{pn}^{(k-1)} + 4 \sum_p \sum_s \frac{mpns}{(m^2 - p^2)(n^2 - s^2)} A_{ps}^{(k-1)} \right] \\ q_{2mn}^{(k)} &= -\frac{8k_{ym}}{a^2} \left[\sum_p \frac{mp(m^2 + p^2)}{(m^2 - p^2)^2} B_{pn}^{(k-1)} + 4 \sum_p \sum_s \frac{mpns}{(m^2 - p^2)(n^2 - s^2)} B_{ps}^{(k-1)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$(k=1, 2, 3, 4, \dots)$$

对于 $k=0$ 时有 $q_{1mn}^{(0)} = 16q_0/h\pi^2 mn$, $q_{2mn}^{(0)} = 0$ 。

在(2.15)的和号中, $m+p$ 是奇数, 而 $n+s$ 是偶数。当各级近似方程的标号 $k=1, 3, 5, \dots$ 时, 取 $m=2, 4, 6, \dots$; 而当 $k=0, 2, 4, 6$ 时, 取 $m=1, 3, 5, \dots$ 。

三、数值算例

设有一正交各向异性劈锥面扁壳屋盖, 如图1所示, 受均布载荷 q_0 作用, 壳体材料为混凝土。壳厚 $h=0.08\text{m}$, 比重 $\gamma=2.5\text{T/m}^3$, $q_0=0.2\text{T/m}^2$ 。

$$E_1=3 \times 10^6 \text{T/m}^2, \quad E_2=6 \times 10^6 \text{T/m}^2, \quad G=1.47 \times 10^6 \text{T/m}^2, \quad \mu_1=0.14, \quad \mu_2=0.28;$$

$$D_1=133.33\text{T-m}, \quad D_2=266.67\text{T-m}, \quad D_3=62.72\text{T-m}, \quad D_4=162.77\text{T-m};$$

$$\delta_1=0.167 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{T}, \quad \delta_2=0.333 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{T}, \quad \delta_3=0.294 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{T};$$

$$a=8\text{m}, \quad b=4\text{m}, \quad f_a=0.80\text{m}, \quad f_0=0.67\text{m}, \quad f_m=(f_a+f_0)/2=0.735\text{m},$$

$$\varepsilon=(f_a-f_0)/(f_a+f_0)=0.088;$$

$$k_{ym}=0.368 \text{ 1/m}, \quad R_{ym}=2.72\text{m}, \quad R_{ya}=2.99\text{m}, \quad R_{y0}=2.5\text{m}.$$

各系数 $A_{mn}^{(0)}$, $B_{mn}^{(0)}$, $A_{mn}^{(1)}$, $B_{mn}^{(1)}$ 的值由(2.13)及(2.14)计算, 将计算结果列于表1。

根据公式(2.10)可得应力函数 ϕ 及挠度函数 w 的各级近似表达式

$$\begin{aligned} \phi_0(x, y) &= 68.75 \sin \frac{\pi}{8} x \cdot \sin \frac{\pi}{4} y + 0.125 \sin \frac{\pi}{8} x \cdot \sin \frac{3}{4} \pi y \\ &+ 2.6088 \sin \frac{3}{8} \pi x \cdot \sin \frac{\pi}{4} y + 0.150 \sin \frac{3}{8} \pi x \cdot \sin \frac{3}{4} \pi y + \dots \end{aligned}$$

表 1

	m, n	1, 1	1, 3	3, 1	3, 3
$k=0$	$A_{mn}^{(0)}$	68.7500	0.1250	2.6088	0.1500
	$B_{mn}^{(0)}$	1550×10^{-7}	127.5×10^{-7}	61.25×10^{-7}	30.75×10^{-7}
	m, n	2, 1	2, 3	4, 1	4, 3
$k=1$	$A_{mn}^{(1)}$	5.3200	-0.2188	1.7238	0.2700
	$B_{mn}^{(1)}$	218.175×10^{-7}	272.713×10^{-7}	92.838×10^{-7}	97.175×10^{-7}

$$\phi_1(x, y) = 5.32 \sin \frac{\pi}{4} x \cdot \sin \frac{\pi}{4} y - 0.2188 \sin \frac{\pi}{4} x \cdot \sin \frac{3}{4} \pi y$$

$$+ 1.7238 \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \sin \frac{\pi}{4} y + 0.27 \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \sin \frac{3}{4} \pi y + \dots$$

$$w_0(x, y) = 1550 \times 10^{-7} \sin \frac{\pi}{8} x \cdot \sin \frac{\pi}{4} y + 127.5 \times 10^{-7} \sin \frac{\pi}{8} x \cdot \sin \frac{3}{4} \pi y$$

$$+ 61.25 \times 10^{-7} \sin \frac{3}{8} \pi x \cdot \sin \frac{\pi}{4} y + 30.75 \times 10^{-7} \sin \frac{3}{8} \pi x \cdot \sin \frac{3}{4} \pi y + \dots$$

$$w_1(x, y) = 218.175 \times 10^{-7} \sin \frac{\pi}{4} x \cdot \sin \frac{\pi}{4} y + 272.713 \times 10^{-7} \sin \frac{\pi}{4} x \cdot \sin \frac{3}{4} \pi y$$

$$+ 92.838 \times 10^{-7} \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \sin \frac{\pi}{4} y + 97.175 \times 10^{-7} \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \sin \frac{3}{4} \pi y + \dots$$

再由公式(2.5)可得应力函数 ϕ 及挠度函数 w 的最终结果为

$$\phi(x, y) = \phi_0(x, y) + 0.088\phi_1(x, y) + 0.088^2\phi_2(x, y) + \dots$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 0.088w_1(x, y) + 0.088^2w_2(x, y) + \dots$$

将上式代入(2.2)可求出壳体上各点的挠度, 中面内力及弯曲内力。

今计算如图 2 所示各点的挠度值, 并且将这些结果列于表 2 中。

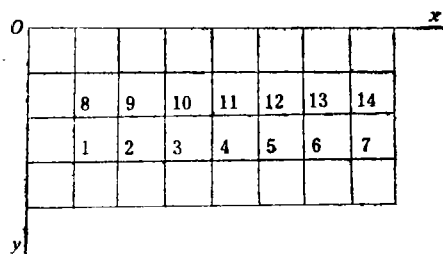


图 2

表 2

№	$w(m)$	№	$w(m)$
1	5.6875×10^{-5}	8	5.4625×10^{-5}
2	10.2250×10^{-5}	9	9.1500×10^{-5}
3	12.9875×10^{-5}	10	10.8000×10^{-5}
4	13.9125×10^{-5}	11	11.2000×10^{-5}
5	13.0500×10^{-5}	12	10.6000×10^{-5}
6	10.3125×10^{-5}	13	8.5375×10^{-5}
7	5.7625×10^{-5}	14	4.8000×10^{-5}

至于计算其它各点的挠度及全部内力也是没有什么困难的。由(2.5)式和具体的计算表明: 将挠度函数 w 及应力函数 ϕ 表示成按小参数展开的级数形式, 它不但在理论分析上并且在实际计算中收敛性都是很好的。

参 考 文 献

- [1] Torroja, E., *Riv. Ing.*, 9 (1941), 29.
- [2] Flügge, W., *Statik und Dynamik der Schalen*, Zweite Verlag, Berlin (1957), 127.
- [3] Soare, M., *Bauingenieur*, 33 (1958), 256.
- [4] Doganoff, I., *Bautechnik*, 34 (1957), 232.
- [5] Ахунд-Заде Э. М. и Х. К. Сейфуллаев, Об устойчивости пологих коноидальных оболочек, *Строительная Механика и Расчёт Сооружений*, 6 (1973).
- [6] Сейфуллаев Х. К., Расчёт пологих коноидальных оболочек, внецентренно защемленных в упругих балках, *При. Мех.*, II, 7 (1975), 70—78.
- [7] Островский А. Ю., Приближенный расчёт коноидальной оболочки, *Стр. Мех. и Расч. Соору.*, 4 (1970).
- [8] Власов В. З. и Н. Н. Леонтьев, *Балки, Плиты и Оболочки на Упругом Основании* (1960).
- [9] Райзер В. Д., Расчёт покрытий из оболочек отрицательной кривизны, *Стр. Мех. и Расч. Соору.*, 4 (1970).
- [10] Амбарцумян С. А., *Теория Анизотропных Оболочек*, М., Физматгиз (1961).
- [11] Власов В. З., *Избранные Труды*, том. I, М., Издательство АН СССР (1962).

Calculation of Orthotropic Shallow Conoidal Shell Roofs

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

The present paper introduces the method for the calculation of the roof with orthotropic shallow conoidal shells which are always used in the industrial buildings. Since the middle surface of the shallow conoidal shell having the variable curvatures and twists, therefore, the system of fundamental equations which was obtained by us be possessed of the variable coefficients.

If we want to find the exact analytical solutions, it will be involved in great mathematical difficulties. This paper gives the approximate solutions of the orthotropic shallow conoidal shell roof simply supported at all edges and uniformly distributed load. In text the method of small parameter be used.