

文章编号: 1000-0887(2004) 10-1053-08

# 广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散\*

沈 芳<sup>1,2</sup>, 谭文长<sup>1,3</sup>, 赵耀华<sup>4</sup>, T·增冈隆士<sup>3</sup>

- (1. 北京大学力学与工程科学系, 湍流与复杂系统研究国家重点实验室, 北京 100871;
2. 中国科学院 空间科学与应用研究中心 空间天气学重点实验室, 北京 100080;
3. 九州大学 机械工程科学系, 福岡, 812\_8581 日本;
4. 中国科学院 工程热物理研究所, 北京 100080)

(我刊原编委吴望一推荐)

摘要: 将分数阶微积分运算引入到二阶流体的本构关系中, 建立了带分数阶导数的广义二阶流体模型。研究了广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散, 利用分数阶导数的 Laplace 变换和广义 Mittag-Leffler 函数, 得到了涡流速度场和温度场的精确解, 分析了分数阶指数对涡流速度的衰减和温度扩散的影响

关键词: 广义二阶流体; 分数阶微积分; 涡流; 温度场; 广义 Mittag-Leffler 函数  
中图分类号: O357.1 文献标识码: A

## 引 言

粘弹性流体的涡流运动是高分子稀溶液在搅拌、混合和反应过程中常见的流动现象, 在工业过程中又常常伴随着传热过程的发生, 对其流动和传热规律的研究在石油、化工、食品和生物工程等领域具有重要的应用价值<sup>[1]</sup>。在线性关系的假设下, Fetecau 等人研究了二阶流体涡流运动的速度场和温度场的变化规律<sup>[2]</sup>, 他们所采用的二阶流体的本构方程可简化为:

$$\tau(t) = \mu\varepsilon(t) + E \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}, \quad (1)$$

这里,  $\tau$  为切应力,  $\varepsilon$  为切应变,  $\mu$  为粘性系数,  $E$  为粘弹性系数, (1) 式就是常见的二阶流体的线性本构模型。

近年来, 作为分形几何和分数维的动力学基础, 分数阶微积分的理论和应用研究, 日益倍受关注。在松弛、振荡、扩散与波的研究, 以及在粘弹性本构关系式的研究中均获得了许多重要成果。Bagley<sup>[3]</sup>, Friedrich<sup>[4]</sup>, 黄军旗<sup>[5]</sup>, 何光渝<sup>[6]</sup>, 徐明瑜<sup>[7,8]</sup>, 谭文长<sup>[9-12]</sup> 等人分别将分数阶微积分的运算引入到流变学中, 研究分析了不同问题。江体乾等人<sup>[13,14]</sup> 将分数阶微积分应用到粘弹性胶体的实验数据分析中, 获得了满意的结果。一般地, 广义二阶流体的本构关系可用下面带有分数阶导数的方程表示:

\* 收稿日期: 2002\_12\_29; 修订日期: 2004\_03\_12

基金项目: 日本学术振兴会基金资助项目(P02325); 国家自然科学基金资助项目(10372007)

作者简介: 沈芳(1977—), 女, 河北张家口人, 博士(E-mail: fshen@spaceweather.ac.cn);

谭文长(联系人, Tel: + 86\_10\_62754244; Fax: + 86\_10\_62751812; E-mail: tanwch@mech.pku.edu.cn).

$$\tau(t) = \mu \varepsilon(t) + \alpha_1 D_t^\beta [\varepsilon(t)], \quad (2)$$

式中  $\alpha_1$  为分数阶粘弹性系数,  $D_t^\beta$  为 Riemann-Liouville 分数阶导数算子, 其定义为<sup>[15]</sup>:

$$D_t^\beta [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{d}{dt} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}} d\tau \quad (0 < \beta < 1), \quad (3)$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  表示 Gamma 函数, 在方程(2)中, 当  $\beta = 1$  时简化为(1)式的线性关系, 即经典的二阶流体, 当  $\alpha_1 = 0$  或  $\beta = 0$  时, 即化为完全的粘性牛顿流体。

本文利用(2)式的本构关系, 研究了广义二阶流体涡流运动的速度场和温度场的变化规律。通过对流动方程的空间变量做 Hankel 变换, 对时间变量做分数阶导数的 Laplace 变换, 利用离散逆 Laplace 变换技巧和广义 Mittag-Leffler 函数, 对于  $\beta$  为任意分数时得到了流动的精确定解, 分析了分数阶扩散指数  $\beta$  对速度场和温度场的影响。一些前人所得到的结果均可作为本文结果的特例而出现, 如 Fetecau 等人有关二阶流体涡流运动的速度衰减和温度扩散解<sup>[2]</sup>, 经典的粘性牛顿流体的涡流解等。这对进一步研究粘弹性流体的力学特性提供了新的解析工具。

## 1 数学模型

考虑广义二阶流体的涡流运动, 在初始时刻涡量为  $\Gamma_0$ , 假定流体不可压缩, 流动轴对称。在柱坐标系  $(r, \theta, z)$  下, 速度分量可以表示为:  $v_r = 0, v_\theta = \omega(r, t), v_z = 0$

广义二阶流体的本构方程为:

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\omega(r, t)}{r} \right] + \alpha_1 D_t^\beta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\omega(r, t)}{r} \right] \right]. \quad (4)$$

动量守恒方程:

$$\rho \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}), \quad (5)$$

其中  $\tau_{r\theta}$  为切应力分量,  $\rho, \mu$  分别为流体的密度和粘度。将(4)式代入(5)式中, 并整理得:

$$\frac{\partial \omega(r, t)}{\partial t} = (\nu + \alpha D_t^\beta) \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{1}{r} \right] \omega(r, t), \quad (6)$$

式中  $\nu = \mu/\rho, \alpha = \alpha_1/\rho$ 。初始条件:

$$\omega(r, 0) = \Gamma_0 / (2\pi r). \quad (7)$$

在无穷远处, 假设自然边条件成立:

$$\omega(r, t), \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial r} \rightarrow 0, \quad \text{当 } r \rightarrow \infty, t > 0. \quad (8)$$

进一步地, 我们考虑广义二阶流体在作涡流运动过程中存在温度场。温度场的初条件和无穷远条件类似文献[2]可以假设为:

$$\theta(r, 0) = \theta_0 / (2\pi r), \quad (9)$$

$$\theta(r, t), \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \rightarrow 0, \quad \text{当 } r \rightarrow \infty, t > 0. \quad (10)$$

根据 Fourier 定律, 温度场的控制方程可写为如下形式<sup>[2]</sup>:

$$\frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t} = \beta_1 \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right] \theta(r, t) + \frac{\nu}{c} \left[ \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial r} - \frac{\omega(r, t)}{r} \right]^2 + \frac{h(r, t)}{c}, \quad (11)$$

式中  $c$  为比热容,  $\beta_1 = k/(\rho c), k$  为热导率,  $\rho$  为流体密度, 均为常数。  $h(r, t)$  为辐射热, 本文中不考虑辐射传热, 将  $h(r, t)$  取为 0。从形式上看, (11) 式与牛顿粘性流体及经典二阶流体的能量方程是相同的, 然而, 由于式中涉及到的速度  $\omega(r, t)$  是广义二阶流体的速度, 不同于牛顿粘性流体和经典二阶流体, 故由(11)式得出的温度场  $\theta(r, t)$  与其也会不同。

## 2 速度场

引入如下无量纲参数:  $\omega^* = \omega \mathcal{V} / \Gamma_0^2$ ,  $r^* = r \Gamma_0 / \mathcal{V}$ ,  $t^* = t \Gamma_0^2 / \mathcal{V}$ , 利用(3)式和积分中值定理可以证明<sup>[7, 9, 16]</sup>, 算子  $D_t^\beta$  具有分数阶时间量纲  $[\mathcal{V} / \Gamma_0^2]^{-\beta}$ . 因此, 无量纲分数阶方程和定解条件(为简单起见, 以下省略右上角无量纲记号“\*”)可写为:

$$\frac{\partial \omega(r, t)}{\partial t} = (1 + \eta D_t^\beta) \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{1}{r} \right] \omega(r, t), \tag{12}$$

$$\omega(r, t), \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial r} \rightarrow 0, \quad \text{当 } r \rightarrow \infty, t > 0, \tag{13}$$

$$\omega(r, 0) = 1 / (2\pi r), \tag{14}$$

其中  $\eta = \alpha (\Gamma_0^2 / \mathcal{V}^2)$ , 考虑到方程(12) ~ (14)式的分数阶方程整数阶初条件的特点, 算子  $D_t^\beta$  应当取为 Miller\_Ross 型序贯分数阶导数(sequential fractional derivatives)<sup>[15]</sup>. 为了对方程精确求解, 引入如下 Hankel 变换<sup>[17]</sup>.

正变换为:

$$\omega_h(\xi, t) = \int_0^\infty r J_1(\xi r) \omega(r, t) dr; \tag{15}$$

逆变换为:

$$\omega(r, t) = \int_0^\infty \xi J_1(\xi r) \omega_h(\xi, t) d\xi \tag{16}$$

这里  $J_1(\xi r)$  为第一类一阶 Bessel 函数.

对(12)、(14)式做如上 Hankel 正变换, 利用无穷远条件(13)式, 整理得:

$$\frac{d \omega_h(\xi, t)}{dt} + (1 + \eta D_t^\beta) [\xi^2 \omega_h(\xi, t)] = 0, \tag{17}$$

$$\omega_h(\xi, 0) = 1 / (2\pi \xi). \tag{18}$$

设  $\overline{\omega}_h(\xi, s) = L\{\omega_h(\xi, t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \omega_h(\xi, t) dt$

为  $\omega_h(\xi, t)$  的象函数,  $s$  为变换参量, 对(17)式应用分数阶导数的 Laplace 变换<sup>[15]</sup>, 结合(18)式, 可得:

$$\overline{\omega}_k(\xi, s) = \frac{1}{2\pi \xi} (1 + \eta \xi^2 s^{\beta-1}) \frac{1}{s + \eta \xi^2 s^\beta + \xi^2}. \tag{19}$$

为了求得  $\overline{\omega}_k(\xi, s)$  的逆 Laplace 变换, 这里采用离散逆 Laplace 变换技巧, 将(19)式右端展为 Taylor 级数, 则有:

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_k(\xi, s) &= \frac{1}{2\pi \xi} (1 + \eta \xi^2 s^{\beta-1}) \frac{1}{\xi^2} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \xi^{2(k+1)} \frac{s^{-\beta k - \beta}}{(s^{\beta-1} + \eta \xi^2)^{k+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi \xi^3} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \xi^{2(k+1)} \frac{s^{-\beta k - \beta}}{(s^{\beta-1} + \eta \xi^2)^{k+1}} + \\ &= \frac{\eta}{2\pi \xi} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \xi^{2(k+1)} \frac{s^{-\beta k - 1}}{(s^{\beta-1} + \eta \xi^2)^{k+1}}. \end{aligned} \tag{20}$$

对上式逐项求逆 Laplace 变换, 可得:

$$\begin{aligned} \omega_h(\xi, t) &= \frac{1}{2\pi \xi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \xi^{2k} t^k [E_{\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\eta \xi^2 t^{\beta-1}) + \\ &= \eta^{\beta-1} E_{\beta, 2+\beta(k-1)}^{(k)}(-\eta \xi^2 t^{\beta-1})], \end{aligned} \tag{21}$$

其中  $E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$  是广义 Mittag-Leffler 函数<sup>[15]</sup>, 在获得(21)式的过程中利用了广义 Mittag-Leffler 函数的 Laplace 逆变换的一个重要性质:

$$L^{-1} \left\{ \frac{n! s^{\lambda-\mu}}{(s^{\lambda} + c)^{n+1}} \right\} = t^{\lambda+\mu-1} E_{\lambda, \mu}^{(n)}(\pm ct^{\lambda}) \quad (\operatorname{Re}(s) > |c|^{\lambda}) \quad (22)$$

对(21)式做 Hankel 逆变换, 利用逆变换表达式(16)可得速度场的精确解:

$$\omega(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_1(r\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \xi^{2k} t^k [E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\eta \xi^2 t^{1-\beta}) + \eta \xi^2 t^{1-\beta} E_{1-\beta, 2+\beta(k-1)}^{(k)}(-\eta \xi^2 t^{1-\beta})] d\xi \quad (23)$$

特别的, 当  $\eta = 0$  时, (19)式化为:

$$\overline{\omega}_k(\xi, s) = \frac{1}{2\pi \xi (s + \xi^2)} \quad (24)$$

对(24)式的  $s$  和  $\xi$  分别做 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换后, 很容易得到:

$$\omega(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) \right] \quad (25)$$

将(25)转化为有量纲的形式便可得到经典的牛顿粘性流体的 Reiner-Rivlin 流动解<sup>[2]</sup>.

如令  $\beta = 1$ , (19)式化为:

$$\overline{\omega}_k(\xi, s) = \frac{1}{2\pi \xi} \frac{1 + \eta \xi^2}{s + \eta \xi^{2\beta} + \xi^2} \quad (26)$$

对(26)式的  $s$  和  $\xi$  分别做 Laplace 逆变换和 Hankel 逆变换后, 可以得到:

$$\omega(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_1(r\xi) \exp\left[-\frac{\xi^2}{1 + \eta \xi^2} t\right] d\xi \quad (27)$$

将(27)转化为有量纲的形式, 就可以得到 Fetecau 等人有关二阶流体涡流运动的速度解<sup>[2]</sup>.

### 3 温度场

引入如下无量纲参数:

$$\theta^* = \frac{\theta V}{\theta_0 \Gamma_0}, \quad \omega^* = \frac{\omega V}{\Gamma_0}, \quad r^* = \frac{r \Gamma_0}{V}, \quad t^* = \frac{t \Gamma_0^2}{V}$$

则(9)~(11)可化为(以下为简便记, 省略右上角“\*”):

$$\frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t} = \beta_2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right] \theta(r, t) + \eta_1 \left[ \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial r} - \frac{\omega(r, t)}{r} \right]^2, \quad (28)$$

$$\theta(r, t), \quad \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \rightarrow 0, \quad \text{当 } r \rightarrow \infty, t > 0, \quad (29)$$

$$\theta(r, 0) = 1/(2\pi r), \quad (30)$$

其中  $\beta_2 = \frac{\beta_1}{V}, \quad \eta_1 = \frac{\Gamma_0^3}{c \theta_0}$

$$\text{令 } f(r, t) = \eta_1 \left[ \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial r} - \frac{\omega(r, t)}{r} \right]^2, \quad (31)$$

(28)式可化为:

$$\frac{\partial \theta(r, t)}{\partial t} = \beta_2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right] \theta(r, t) + f(r, t) \quad (32)$$

为了解析求解, 对(30)、(32)式的空间变量  $r$  作 Hankel 变换<sup>[17]</sup>, 根据方程(32)的形式拟采用的 Hankel 变换为:

正变换为:

$$\theta_h(\xi, t) = \int_0^\infty r J_0(\xi r) \theta(r, t) dr; \tag{33}$$

逆变换为:

$$\theta(r, t) = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \theta_h(\xi, t) d\xi, \tag{34}$$

这里  $J_0(\xi r)$  为第一类零阶 Bessel 函数。

对(32)式做如上 Hankel 正变换, 利用无穷远条件(29)式, 经整理得:

$$\frac{d\theta_h(\xi, t)}{dt} + \beta_2 \xi^2 \theta_h(\xi, t) = f_h(\xi, t), \tag{35}$$

其中  $f_h(\xi, t)$  为  $f(r, t)$  的 Hankel 变换, 将(23)式代入到(31)中, 得到:

$$f_h(\xi, t) = \frac{\eta_1}{4\pi^2} \int_0^\infty r J_0(\xi r) \times \left\{ \int_0^\infty x J_2(xr) \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} t^k [E_{1-\beta, 1+\beta, k}^{(k)}(-\eta x^2 t^{1-\beta}) + \eta x^2 t^{1-\beta} E_{1-\beta, 2+\beta, (k-1)}^{(k)}(-\eta x^2 t^{1-\beta})] dx \right\}^2 dr. \tag{36}$$

上式的推导过程中用到 Bessel 函数的递推公式<sup>[17]</sup>:

$$xr J_1(xr) = J_1 - xr J_2(xr).$$

初始条件(30)式作 Hankel 正变换可得:

$$\theta_h(\xi, 0) = 1/(2\pi\xi). \tag{37}$$

由(35)、(37)容易得到:

$$\theta_h(\xi, t) = e^{-\beta_2 \xi^2 t} \left[ \frac{1}{2\pi\xi} + \int_0^t f_h(\xi, \tau) e^{\beta_2 \xi^2 \tau} d\tau \right]. \tag{38}$$

利用(34)对上式作 Hankel 逆变换, 可得:

$$\theta(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\beta_2 \xi^2 t} J_0(\xi r) d\xi + \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \cdot \left[ \int_0^t f_h(\xi, \tau) e^{-\beta_2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau \right] d\xi. \tag{39}$$

将(36)式代入上式中, 便可得温度场分布:

$$\theta(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\beta_2 \xi^2 t} J_0(\xi r) d\xi + \frac{\eta_1}{4\pi^2} \int_0^\infty \xi J_0(r\xi) \int_0^\infty e^{-\beta_2 \xi^2 (t-\tau)} \int_0^\infty r J_0(\xi r) g^2(r, \tau) dr d\tau d\xi \tag{40}$$

其中:

$$g(r, \tau) = \int_0^\infty x J_2(rx) \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \tau^k [E_{1-\beta, 1+\beta, k}^{(k)}(-\eta x^2 \tau^{1-\beta}) + \eta x^2 \tau^{1-\beta} E_{1-\beta, 2+\beta, (k-1)}^{(k)}(-\eta x^2 \tau^{1-\beta})] dx. \tag{41}$$

### 4 结果分析与讨论

公式(23)和(40)分别给出了广义二阶流体涡流运动的速度场和温度场的解析解, 利用数学软件 Matlab 数值模拟了在不同时刻下分数阶指数  $\beta$  对速度场和温度场空间分布的影响。图

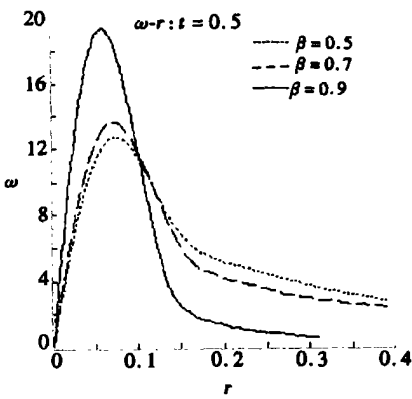


图1 不同 β 值的涡流速度分布曲线

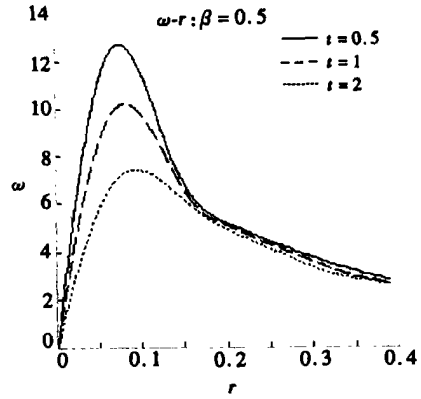


图2 不同时间的涡流速度分布曲线

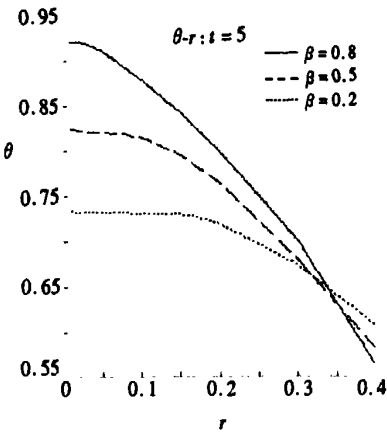


图3 不同 β 值的温度分布曲线

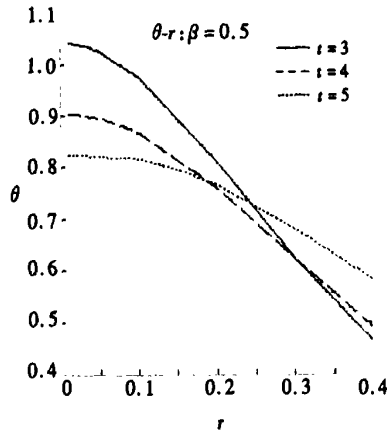


图4 不同时间的温度分布曲线

1 和图2 给出了选定参数下涡流速度  $\omega(r, t)$  随空间变量  $r$  的扩散规律。从分布曲线中可看出: 起初, 随着  $r$  的增加, 由于初始时刻存在涡量  $\Gamma_0$ ,  $\omega(r, t)$  先从0 逐渐增加; 由于流体中粘性的存在, 涡旋的影响随着  $r$  的增加逐渐减小, 因此  $\omega(r, t)$  在增加到某一值后开始减小, 直至无穷远处衰减为0; 曲线总的变化趋势与文献[2] 中的经典二阶流体是一致的。从图1 中还可以看出不同的  $\beta$  值对速度扩散的影响:  $\beta$  越大, 曲线的变化越剧烈, 即速度的最大值越大, 达到速度最大值所对应的距离  $r$  越小, 随后速度衰减越快。可见,  $\beta$  越大, 流体的弹性效应越强, 越接近于经典二阶流体, 当  $\beta = 1$  时, 完全化为经典二阶流体; 反之,  $\beta$  越小, 流体的粘性效应则越强, 当  $\beta = 0$  时, 完全化为粘性牛顿流体。图2 主要体现了时间  $t$  对涡流速度分布曲线的影响。从图中可以看出, 随着时间的推移, 同一位置的涡流速度逐渐减小, 这是由于流体中存在粘性的作用。

图3、图4 是不同参数下, 温度场  $\theta(r, t)$  随空间变量  $r$  的增加而衰减的变化曲线。图3 给出了分数阶扩散指数  $\beta$  对温度场衰减的影响。从图中可以看出:  $\beta$  越大, 温度随  $r$  的增加而衰减的速度越快, 流体的弹性效应越明显; 反之,  $\beta$  越小, 温度衰减的速度越慢, 流体的粘性效应则越强。图4 是不同时刻温度场随  $r$  的衰减曲线。从图中可以看出: 随着时间的延续, 温度场衰减越来越缓慢, 这是由于流体中存在的粘性效应和涡流的性质。我们从这4 幅图还发现, 当时间  $t$  和空间坐标  $r$  增大到一定值后, 无论是速度场还是温度场都开始衰减, 直至衰减为零,

并且  $\beta$  越大衰减得越快, 这说明流体的粘弹性不利于速度和温度的传播。

本文运用分数阶微积分运算, 将经典的粘性牛顿流体和二阶流体推广到带分数阶导数的广义二阶流体, 求解了广义二阶流体涡流速度的衰减和温度扩散, 所得的结果更具有广泛性, 这对进一步研究粘弹性流体的力学性质提供了新的解析工具。

### [参 考 文 献]

- [1] 余钊圣, 林建忠. 粘弹性二阶流体混合层流场拟序结构的数值研究[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(8): 671—677.
- [2] Fetecau C, Fetecau Corina, Zierep J. Decay of a potential vortex and propagation of a heat wave in a second grade fluid[J]. International Journal of Non Linear Mechanics, 2002, **37**(6): 1051—1056.
- [3] Bagley R L. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. Journal of Rheology, 1983, **27**(3): 201—210.
- [4] Friedrich C H R. Relaxation and retardation function of the Maxwell model with fractional derivatives [J]. Rheol Acta, 1991, **30**(2): 151—158.
- [5] 黄军旗, 何光渝, 刘慈群. 双筒流变仪中广义二阶流体运动分析[J]. 中国科学, A 辑, 1996, **26**(10): 912—920.
- [6] 何光渝, 黄军旗, 刘慈群. 广义二阶流体内轴向流动[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(9): 767—773.
- [7] 徐明瑜, 谭文长. 广义二阶流体分数阶反常扩散速度场、应力场及涡旋层的理论分析[J]. 中国科学, A 辑, 2001, **31**(7): 626—638.
- [8] 徐明瑜, 谭文长. 粘弹性材料本构方程的广义分数阶单元网格表述及其广义解[J]. 中国科学, A 辑, 2002, **32**(8): 673—681.
- [9] 谭文长, 鲜峰, 魏兰. 广义二阶流体非定常 Couette 流动的精解[J]. 科学通报, 2002, **47**(16): 1226—1229.
- [10] TAN Wen\_chang, XU Ming\_yu. The impulsive motion of flat plate in a general second grade fluid[J]. Mechanics Research Communication, 2002, **29**(1): 3—9.
- [11] TAN Wen\_chang, XU Ming\_yu. Plane surface suddenly set in motion in a viscoelastic fluid with fractional Maxwell model[J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, **18**(4): 342—349.
- [12] TAN Wen\_chang, PAN Wen\_xiao, XU Ming\_yu. A note on unsteady flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model between two parallel plates[J]. International Journal of Non Linear Mechanics, 2003, **38**(5): 645—650.
- [13] 李健, 江体乾. 带分数导数的粘弹性流体本构方程的研究[A]. 见: 全国流变学学术会议论文集[C]. 广州: 华南理工大学出版社, 1993.
- [14] Song D Y, Jiang T Q. Study on the constitutive equation with fractional derivative for the viscoelastic fluids\_modified Jeffreys model and its application [J]. Rheologica Acta, 1998, **27**(5): 512—517.
- [15] Podlubny I. Fractional Differential Equations [M]. San Diego: Academic Press, 1999, 1—303.
- [16] Paradisi P, Cesari R, Mainardi R, et al. The fractional Fick's law for non-local transport processes [J]. Physica A, 2001, **293**(1): 130—142.
- [17] 奥齐西克. 热传导[M]. 俞昌铭译. 北京: 高等教育出版社, 1983, 563—715.

## Decay of Vortex Velocity and Diffusion of Temperature in a Generalized Second Grade Fluid

SHEN Fang<sup>1,2</sup>, TAN Wen\_chang<sup>1,3</sup>, ZHAO Yao\_hua<sup>4</sup>, T. Masuoka<sup>3</sup>

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, State Key Laboratory for Turbulence and Complex System Research, Peking University, Beijing 100871, P. R. China;

2. Key Laboratory for Space Weather, Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, P. R. China;

3. Department of Mechanical Engineering Science, Kyushu University, Fukuoka, 812\_8581, Japan;

4. Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China)

**Abstract:** The fractional calculus approach in the constitutive relationship model of viscoelastic fluid was introduced. The velocity and temperature fields of the vortex flow of a generalized second fluid with fractional derivative model were described by fractional partial differential equations. Exact analytical solutions of these differential equations were obtained by using the discrete Laplace transform of the sequential fractional derivatives and generalized Mittag-Leffler function. The influence of fractional coefficient on the decay of vortex velocity and diffusion of temperature was also analyzed.

**Key words:** generalized second grade fluid; fractional calculus; unsteady flow; temperature field; generalized Mittag-Leffler function