应用数学和力学，第6卷第10期（1985年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

最小多项式矩阵与线性多变量系统（Ⅱ）*

黄　琳　　于年才

（北京大学力学系，1984年5月2日收到）

摘　要

本文之（Ⅰ）[6]是关于最小多项式矩阵的理论；其（Ⅱ）是关于这一理论在线性多变量系统中的应用。

在本部分的第一节中，我们利用（Ⅰ）中的理论，详细地讨论线性多变量系统输入问题的一些结果。在第二节中，利用对偶性，我们给出行 n.p.m. 及行生成组等概念，并讨论线性多变量系统输出问题的某些结果。在第三节中，我们讨论化状态空间型为多项式矩阵型的方法。在第四节中，我们讨论这一问题的反问题，即化多项式矩阵型为状态空间型的问题。为说明这些理论和方法，我们给出一些有趣的例子。

一、关于线性多变量系统输入部分的讨论

一般说来，研究常系数线性常微分方程所描述的系统有两种方式：状态空间型和多项式矩阵型。寻求这两者之间的系统等价和严格系统等价关系是有益的，并形成线性多变量系统的基本问题。这方面已经有了某些工作，例如[5，6]。问题的中心是这种关系能否保证这两种方式有相同的传递函数矩阵，从而确保有相同的输入——输出特征，或乃至严格系统等价。在研究线性多变量系统中，这两者之间的固有关系是有用的。

让我们考虑线性控制系统

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{1.1}$$

其中$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$B\in\mathbf{C}^{n\times m}$；$x$，$u$分别是$n$，$m$维向量。如果我们取矩阵$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$为$\mathbf{C}^n$的生成组，即$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^n$，多项式矩阵$P(\lambda)$是$A$在$F$的 n.p.m.，则对任意$B\in\mathbf{C}^{n\times m}$，均存在多项式矩阵$U(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times m}$，使得（见（Ⅰ））

（1）　$B=FU(\sigma)$，

（2）　$U(\lambda)$的第i行各元的次数不超过α_i-1。

其中α_i是$P(\lambda)$的(i,i)元的次数。

以下将称$U(\lambda)$是B对应$P(\lambda)$用F表示的矩阵。显然，对给定的A，F和B，$U(\lambda)$依赖于A在F的 n.p.m. 的选择；但如果$P(\lambda)$已给定，满足条件（1）和（2）的$U(\lambda)$是唯一的。

---

* 朱照宣推荐。

本文的主要结果，曾在系统与控制会议（1984年5月，北京）上报告过。

定理1.1 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^n$，$P(\lambda)$是$A$在$F$的n.p.m.. 如果$B\in\mathbf{C}^{n\times m}$，且$U(\lambda)$是$B$对应$P(\lambda)$用$F$表示的矩阵，则存在单模态矩阵$M(\lambda)$，$N(\lambda)$及一适当阶数的多项式矩阵$X(\lambda)$，使得

$$M(\lambda)(\lambda I_n-A\quad B)\begin{pmatrix}N(\lambda) & X(\lambda)\\ 0 & I_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{n-s} & 0 & 0\\ 0 & P(\lambda) & U(\lambda)\end{pmatrix}\tag{1.2}$$

证明 为简短起见，我们假定 $\operatorname{rank}F=s$，设

$$T=(f_1\ Af_1\cdots A^{\alpha_1-1}f_1\ f_2\cdots A^{\alpha_2-1}f_2\cdots f_s\cdots A^{\alpha_s-1}f_s)\tag{1.3}$$

$$B=T\widetilde{B}=(f_1\ Af_1\cdots A^{\alpha_s-1}f_s)\widetilde{B}\tag{1.4}$$

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \cdots\\ B_s\end{pmatrix},\quad B_i=\begin{pmatrix}\beta_{i1}^{(0)} & \cdots & \beta_{im}^{(0)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{i1}^{(\alpha_i-1)} & \cdots & \beta_{im}^{(\alpha_i-1)}\end{pmatrix}\tag{1.5}$$

则

$$\begin{aligned}B&=(f_1\cdots A^{\alpha_1-1}f_1\cdots f_s\cdots A^{\alpha_s-1}f_s)(B_1\cdots B_s)^T\\ &=(f_1\cdots A^{\alpha_1-1}f_1)B_1+\cdots+(f_s\cdots A^{\alpha_s-1}f_s)B_s\\ &=f_1U_1(\sigma)+\cdots+f_sU_s(\sigma)=(f_1\ f_2\cdots f_s)U(\sigma)\end{aligned}$$

其中 $$U_i(\lambda)=(u_{i1}(\lambda)\ u_{i2}(\lambda)\cdots u_{im}(\lambda))\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

$$u_{ij}(\lambda)=\beta_{ij}^{(0)}+\beta_{ij}^{(1)}\lambda+\cdots+\beta_{ij}^{(\alpha_i-1)}\lambda^{\alpha_i-1}\qquad(j=1,2,\cdots,m)$$

根据（I）中定理1.1的证明，可知

$$(\lambda I_n-A\quad B)\longleftrightarrow(\lambda I_n-\widetilde{A}\quad\widetilde{B})\longleftrightarrow\begin{pmatrix}I_{n-s} & 0 & 0\\ 0 & P(\lambda) & U(\lambda)\end{pmatrix}$$

即存在单模态矩阵$M(\lambda)$，$N(\lambda)$及多项式矩阵$X(\lambda)$，使得（1.2）式成立. ▽▽

推论1.1 对线性控制系统

$$\dot{x}=Ax+Bu\tag{1.1}$$

如果$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$具$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^n$，$P(\lambda)$是$A$在$F$的n.p.m.，$B=FU(\sigma)$，其中$U(\lambda)$同上，是$B$对应$P(\lambda)$用$F$表示的矩阵，则多项式矩阵型系统

$$P(s)z=U(s)u\tag{1.6}$$

和系统（1.1）有相同的系统极点和输入解耦零点. ▽▽

如果取状态x作为输出，即

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=x$$

则传递函数矩阵是$(\lambda I_n-A)^{-1}B$，系统矩阵是

$$\left(\begin{array}{c|c}\lambda I_n-A & B\\ \hline -I_n & 0\end{array}\right)$$

在定理1.1的条件下，可有

$$\begin{pmatrix}M(\lambda) & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c}\lambda I_n-A & B\\ \hline -I_n & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix}N(\lambda) & X(\lambda)\\ 0 & I_m\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c}I_{n-s} & 0 & 0\\ 0 & P(\lambda) & U(\lambda)\\ \hline -N_1(\lambda) & -N_2(\lambda) & -X(\lambda)\end{array}\right)$$

其中$N(\lambda)=(N_1(\lambda)\ \ N_2(\lambda))$.从而可知系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c:c}\lambda I_n-A & B\\ \hdashline -I_n & 0\end{array}\right)\text{与}\left(\begin{array}{cc:c}I_{n-s} & 0 & 0\\ 0 & P(\lambda) & U(\lambda)\\ \hdashline 0 & -N_2(\lambda) & -X(\lambda)\end{array}\right)$$

是严格系统等价的，并有相同的传递函数矩阵

$$G(\lambda)=(\lambda I_n-A)^{-1}B=N_2(\lambda)P^{-1}(\lambda)U(\lambda)-X(\lambda)$$

这一结果与定理 1.1 是一致的，因为多项式矩阵$X(\lambda)$将不影响输入解耦零点和系统极点，且$N_2(\lambda)$具左逆多项式矩阵。

推论 1.1 也表明系统的外特征不能单由$P(\lambda)$和$U(\lambda)$决定。这一点可由下面的例子来说明。

例1.1 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$f_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$f_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

则有$\langle A|\mathbf{R}(f_1)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(f_2)\rangle=\mathbf{C}^2$，$A$在$f_i\ (i=1,2)$ 的n.p.m.是$(\lambda-1)^2$，即$P_1(\lambda)=P_2(\lambda)=(\lambda-1)^2$。利用上述过程可得

$$(f_1\ \ Af_1)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ b=Af_1,\ U_1(\lambda)=\lambda$$

$$(f_2\ \ Af_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\ b=f_2,\ U_2(\lambda)=1$$

于是

$$P_1^{-1}(\lambda)U_1(\lambda)\neq P_2^{-1}(\lambda)U_2(\lambda) \tag{1.7}$$

一般说来，对给定的A，如果取不同的矩阵$F_i\in\mathbf{C}^{n\times s}(i=1,2)$作为生成组，$\langle A|\mathbf{R}(F_1)\rangle=\mathbf{C}^n=\langle A|\mathbf{R}(F_2)\rangle$，则对$A$在$F_i$的 n.p.m. $P_i(\lambda)$ $(i=1,2)$通常有$P_1(\lambda)\neq P_2(\lambda)$。如果$U_i(\lambda)$是$B$对应$P_i(\lambda)$用$F_i$表示的矩阵$(i=1,2)$，则常有$P_1^{-1}(\lambda)U_1(\lambda)\neq P_2^{-1}(\lambda)U_2(\lambda)$。

如果$B\in\mathbf{C}^{n\times s}$具$\langle A|\mathbf{R}(B)\rangle=\mathbf{C}^n$，即矩阵$B$本身是$\mathbf{C}^n$关于$A$的生成组，则对任何$A$在$B$的n.p.m. 均有$B$用$B$表示的矩阵为$U(\lambda)=I_s$。在这种情况下，定理 1.1 可以变为

$$\begin{pmatrix}M(\lambda)&0\\0&I\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c:c}\lambda I_n-A & B\\ \hdashline -C & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix}N(\lambda)&0\\0&I_s\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc:c}I_{n-s} & 0 & 0\\ 0 & P(\lambda) & I_s\\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{-CN(\lambda)} & 0\end{array}\right)\longleftrightarrow\left(\begin{array}{cc:c}I_{n-s} & 0 & 0\\ 0 & P(\lambda) & I_s\\ \hdashline 0 & -CN_2(\lambda) & 0\end{array}\right)$$

其中$N(\lambda)=(N_1(\lambda)\ \ N_2(\lambda))$。

据此，我们可得系统（A，B，C）的传递函数矩阵是

$$C(\lambda I_n-A)^{-1}B=CN_2(\lambda)P^{-1}(\lambda)$$

因此，矩阵对$(P(\lambda)$，$CN_2(\lambda))$是有理矩阵$C(\lambda I_n-A)^{-1}B$的右分解，而且这一右分解有预期的输入输出维数。如果矩阵对$(C$，$A)$完全可观测，则$C(\lambda I_n-A)^{-1}B$的右分解$(P(\lambda)$，$CN_2(\lambda))$为右既约分解。如果$(C$，$A)$不是完全可观测的，则系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c:c}P(\lambda) & I_s\\ \hdashline -CN_2(\lambda) & 0\end{array}\right)\ \text{和}\ \left(\begin{array}{c:c}\lambda I_n-A & B\\ \hdashline -C & 0\end{array}\right)$$

有相同的输出解耦零点。

如果$B=B_1$不是$\mathbf{C}^n$关于A的生成组，则我们可以把它扩充成$\mathbf{C}^n$关于A的生成组

$F=(B_1\ B_2)$，矩阵B_2可以从子空间$\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(B_1^TA^{T(i-1)})$中选取。既然$F=(B_1\ B_2)$是$\mathbf{C}^n$关于$A$的生成组，如果$B_1\in\mathbf{C}^{n\times r_1}$，$B_2\in\mathbf{C}^{n\times r_2}$，利用上述方法，我们可以知道两系统矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n-A & B_1 & B_2 \\ -C & 0 & 0 \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} I_{n-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1(\lambda) & I_{r_1} & 0 \\ 0 & P_2(\lambda) & 0 & I_{r_2} \\ 0 & -CN_2(\lambda) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是严格系统等价的。其中$P(\lambda)=\begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ P_2(\lambda)\end{pmatrix}$是$A$在$(B_1\ B_2)$的 n.p.m.. 由此我们又有

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n-A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} I_{n-s} & 0 & 0 \\ 0 & P_1(\lambda) & I_{r_1} \\ 0 & P_2(\lambda) & 0 \\ 0 & -CN_2(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

是两个严格等价的系统矩阵。这样从$r_2<s$我们可以断定所有满足 rank $P_2(\lambda)<r_2$ 的 λ 是系统（A, B, C）的输入解耦零点。

二、关于线性多变量系统输出部分的讨论

下面，将用$(\mathbf{C}^n)^T$表示n维复数行向量空间，即$(\mathbf{C}^n)^T=\{x^T|x^T=(\xi_1\ \xi_2\ \cdots\ \xi_n),\ \forall\xi_i\in\mathbf{C},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$。对给定的矩阵$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，利用对偶性，我们可以定义行生成组和$A$在对偶空间$(\mathbf{C}^n)^T$中的向量组$G^T$上的行最小多项式矩阵。

首先，对给定的$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，我们引进线性算子$\tau:(\mathbf{C}^n)^T\to(\mathbf{C}^n)^T$且规定

$$\tau c^T\triangleq c^TA \tag{2.1}$$

其中$c^T\in\mathbf{C}^{1\times n}$是$(\mathbf{C}^n)^T$中的行向量。则对任意$\varphi(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$，我们可有

$$\varphi(\tau)c^T\triangleq c^T\varphi(A) \tag{2.2}$$

类似地，对给定的多项式矩阵$Q(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{k\times m}$，其元用$\mathscr{K}_{ij}(\lambda)$表示，矩阵$G^T=(g_1^T\ \cdots\ g_m^T)^T\in\mathbf{C}^{m\times n}$，我们有

$$Q(\tau)G^T=\begin{pmatrix} \mathscr{K}_{11}(\tau)g_1^T+\mathscr{K}_{12}(\tau)g_2^T+\cdots+\mathscr{K}_{1m}(\tau)g_m^T \\ \cdots\qquad\cdots \\ \mathscr{K}_{k1}(\tau)g_1^T+\mathscr{K}_{k2}(\tau)g_2^T+\cdots+\mathscr{K}_{km}(\tau)g_m^T \end{pmatrix}$$
$$\triangleq\begin{pmatrix} g_1^T\mathscr{K}_{11}(A)+g_2^T\mathscr{K}_{12}(A)+\cdots+g_m^T\mathscr{K}_{1m}(A) \\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots \\ g_1^T\mathscr{K}_{k1}(A)+g_2^T\mathscr{K}_{k2}(A)+\cdots+g_m^T\mathscr{K}_{km}(A) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

定义2.1 对给定$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$G^T\in\mathbf{C}^{m\times n}$，非奇异多项式矩阵$Q(\lambda)$称为行消失多项式矩阵系指它满足

$$Q(\tau)G^T=0 \tag{2.4}$$

其中$Q(\tau)G^T$由（2.3）式定义。

如果多项式矩阵$R(\lambda)$不仅满足（2.4）式，而且对所有使（2.4）式成立的$Q(\lambda)$，均有

$$\deg(\det R(\lambda))\leqslant\deg(\det Q(\lambda))$$

则称$R(\lambda)$为A在G^T的行最小多项式矩阵。

如果存在一组非负整数 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 使得

1） $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=\dim(\langle \mathbf{R}^T(G^T)|A\rangle)$，其中 $\langle \mathbf{R}^T(G^T)|A\rangle=\mathrm{span}\,(g_1^T \cdots g_1^T A^{n-1}\, g_2^T \cdots g_2^T A^{n-1} \cdots g_s^T \cdots g_s^T A^{n-1})$。

2） 行向量组$(g_1^T \cdots g_1^T A^{\alpha_1-1} \cdots g_s^T \cdots g_s^T A^{\alpha_s-1})$是线性无关组。

则存在唯一多项式矩阵$\Phi(\lambda)$，它具有性质

1） $\Phi(\lambda)$的第 j 列各元的次数低于α_j，

2） $(g_1^T A^{\alpha_1}\; g_2^T A^{\alpha_2} \cdots g_s^T A^{\alpha_s})^T=\Phi(\tau)G^T$

则称$Q(\lambda)=\mathrm{diag}(\lambda^{\alpha_1}\;\lambda^{\alpha_2}\cdots\lambda^{\alpha_s})-\Phi(\lambda)$ 是 A 在G^T 的行自然多项式矩阵(简记为行 n.p.m.)。显然，A在G^T的行n.p.m. 都是A在G^T的行最小多项式矩阵（简记为行 m.p.m.)。

A在G^T的行 n.p.m.（或行 m.p.m.）$Q(\lambda)$具有如下性质：

1） 如果多项式矩阵 $Q_1(\lambda)$使得 $Q_1(\tau)G^T=0$，则$Q(\lambda)$一定是 $Q_1(\lambda)$的右因子，即存在多项式矩阵$H(\lambda)$使得$Q_1(\lambda)=H(\lambda)Q(\lambda)$。

2） 如果$Q_1(\lambda)$ 和 $Q_2(\lambda)$都是A在G^T的行 m.p.m.，则存在单模态矩阵$M(\lambda)$ 使得$Q_1(\lambda)=M(\lambda)Q_2(\lambda)$，即$Q_1(\lambda)$，$Q_2(\lambda)$是行等价的。

利用对偶性，对任给$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$G^T\in\mathbf{C}^{m\times n}$，若 $Q(\lambda)$是A 在 G^T 的行 n.p.m.，则对任意$G_1\in\mathbf{C}^{l\times n}$ 具有

$$\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}\,(G_1^T A^{i-1})\supseteq\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(G^T A^{i-1}) \tag{2.5}$$

则存在唯一的多项式矩阵$V(\lambda)$，使得

$$G_1^T=V(\tau)G^T \tag{2.6}$$

且$V(\lambda)$的第 j 列各元的次数不超过α_j-1，其中α_j是$Q(\lambda)$的第 j 行对角元的次数。则我们称$V(\lambda)$是G_1^T 对应$Q(\lambda)$用G^T表示的矩阵。

定理2.1 对给定$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$G^T\in\mathbf{C}^{m\times n}$，设$Q(\lambda)$是$A$在 G^T 的行 n.p.m.，$G_1^T\in\mathbf{C}^{l\times n}$满足(2.5)式$V(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{l\times m}$是$G_1^T$对应$Q(\lambda)$ 用G^T表示的矩阵，则下列命题等价。

1） (2.5) 成为等式，即

$$\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}\,(G_1^T A^{i-1})=\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(G^T A^{i-1}) \tag{2.7}$$

2） $Q(\lambda)$与$V(\lambda)$是右互质的，即存在多项式矩阵$X(\lambda)$，$Y(\lambda)$使得

$$X(\lambda)Q(\lambda)+Y(\lambda)V(\lambda)=I_m \tag{2.8}$$

3） $$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} Q(\lambda) \\ V(\lambda)\end{pmatrix}=m,\quad \forall\lambda\in\mathbf{C} \tag{2.9}$$

▽▽

这个定理对线性多变量系统，特别是可观测性问题是有意义的。

推论2.1 考虑线性系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=C_1x \tag{2.10}$$

子空间 $\mathbf{T}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(C_1A^{i-1})$，其中$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$C_1\in\mathbf{C}^{m\times n}$则矩阵$C$使系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx \tag{2.11}$$

与系统（2.10）有相同可观测性当且仅当

1)　$\mathbf{N}(C)\supset\mathbf{T}$

2)　$C=V(\tau)C_1$，使得$V(\lambda)$和$Q(\lambda)$是右互质的，其中$Q(\lambda)$是A在C_1的行 n.p.m.，$V(\lambda)$是C对应$Q(\lambda)$用C_1表示的矩阵。　$\nabla\nabla$

如果推论2.1中，$\mathbf{T}=\{0\}$，则我们可以得到使系统完全可观测的矩阵的集合。

推论2.2　如果矩阵对(C_1,A)是完全可观测的，则能使系统(2.11)完全可观测的全体矩阵的集合可以表示为

$\mathbf{C}=\{C\,|\,C=V(\tau)C_1,Q(\lambda)$与$V(\lambda)$是右互质的$\}$其中多项式矩阵$Q(\lambda)$和$V(\lambda)$确定如上。$\nabla\nabla$

定理2.2　设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$G^T\in\mathbf{C}^{s\times n}$具$\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(G^TA^{i-1})=\{0\}$，$Q(\lambda)$是$A$在$G^T$的行 n.p.m.。若$C\in\mathbf{C}^{l\times n}$，$V(\lambda)$是$C$对应$Q(\lambda)$用$G^T$表示的矩阵，则存在单模态矩阵$M(\lambda)$，$N(\lambda)$和适当阶数的矩阵$Y(\lambda)$，使得

$$\begin{pmatrix} M(\lambda) & 0\\ Y(\lambda) & I_l\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n-A & B\\ \hline -C & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix} N(\lambda) & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$$
$$=\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-s} & 0 & M_1(\lambda)B\\ 0 & Q(\lambda) & M_2(\lambda)B\\ \hline 0 & -V(\lambda) & Y(\lambda)\end{array}\right)\overset{\cdot}{\hookleftarrow}\left(\begin{array}{ccc} I_{n-s} & 0 & 0\\ 0 & Q(\lambda) & M_2(\lambda)B\\ \hline 0 & -V(\lambda) & Y(\lambda)\end{array}\right)\tag{2.12}$$

其中　$M(\lambda)=\begin{pmatrix} M_1(\lambda)\\ M_2(\lambda)\end{pmatrix}$　$\nabla\nabla$

推论2.3　对线性系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx\tag{2.13}$$

如果$G^T\in\mathbf{C}^{s\times n}$具$\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(G^TA^{i-1})=\{0\}$，$Q(\lambda)$是$A$在$G^T$的行n.p.m.，$C=V(\tau)G^T$，其中$V(\lambda)$是$C$对应$Q(\lambda)$用$G^T$表示的矩阵，则多项式矩阵型系统

$$Q(\lambda)z=M_2(\lambda)Bu,\quad y=V(\lambda)z+Y(\lambda)u\tag{2.14}$$

和系统(2.13)有相同的系极极点，全部零点和解耦零点。　$\nabla\nabla$

推论2.4　符号与条件同定理2.2，且$C=G^T$则(2.12)式变为

$$\begin{pmatrix} M(\lambda) & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n-A & B\\ \hline -C & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix} N(\lambda) & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$$
$$=\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-s} & 0 & M_1(\lambda)B\\ 0 & Q(\lambda) & M_2(\lambda)B\\ \hline 0 & -I & 0\end{array}\right)\overset{\cdot}{\hookleftarrow}\left(\begin{array}{ccc} I_{n-s} & 0 & 0\\ 0 & Q(\lambda) & M_2(\lambda)B\\ \hline 0 & -I & 0\end{array}\right)\tag{2.15}$$

系统(A,B,C)的传递函数矩阵为

$$G(\lambda)=C(\lambda I_n-A)^{-1}B=Q^{-1}(\lambda)M_2(\lambda)B$$

$(Q(\lambda),M_2(\lambda)B)$是有理矩阵$G(\lambda)$的右分解。如果$(A,B)$是完全可控的，则$(Q(\lambda),M_2(\lambda)B)$是右既约分解。　$\nabla\nabla$

如果$C=C_1$不是$(\mathbf{C}^n)^T$关于A的行生成组，类似地，我们也可以扩充其为$(\mathbf{C}^n)^T$关于A的行生成组，即$G^T=\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\end{pmatrix}$，其中$C_1\in\mathbf{C}^{r_1\times n}$，$C_2\in\mathbf{C}^{r_2\times n}$，利用类似的方法，我们知两系统矩

阵

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - A & B \\ -C_1 & 0 \\ -C_2 & \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} I_{n-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_1(\lambda) & Q_2(\lambda) & M_2(\lambda)B \\ 0 & -I_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{r_2} & 0 \end{pmatrix}$$

是严格系统等价的。其中 $Q(\lambda)=(Q_1(\lambda)\ \ Q_2(\lambda))$ 是A在$G^T=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$的行 n.p.m.。由此可知，两系统矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n - A & B \\ -C_1 & 0 \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} I_{n-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_1(\lambda) & Q_2(\lambda) & M_2(\lambda)B \\ 0 & -I_{r_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是严格系统等价的。于是从 $r_2<s$ 可以得出结论，所有满足 rank $Q_2(\lambda)<r_2$ 的 λ 是系统 (A, B, C) 的输出解耦零点。

三、化状态空间型为多项式矩阵型

为了利用A在F的 n.p.m. 和A在 G^T 的行 n.p.m. 得到状态空间型与多项式矩阵型之间的等价和严格等价关系，我们必须回答下列问题。

（1） 对给定的矩阵 A，是否存在生成组F 和行生成组G^T，使得A在F 的 n.p.m.$P(\lambda)$ 和A在G^T的行 n.p.m. $Q(\lambda)$ 是相同的，即$P(\lambda)=Q(\lambda)$？

（2） 如果问题（1）的回答是肯定的，设$U(\lambda)$，$V(\lambda)$分别是B用F，C用G^T对应$P(\lambda)=Q(\lambda)$表示的矩阵，则两系统 (A, B, C) 与$\begin{pmatrix} P(\lambda) & U(\lambda) \\ -V(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$是否等价或严格等价，或者对适当的$W(\lambda)$，系统 (A, B, C) 与$\begin{pmatrix} P(\lambda) & U(\lambda) \\ -V(\lambda) & W(\lambda) \end{pmatrix}$是否等价或严格等价？

定理3.1 对给定$A\in \mathbf{C}^{n\times n}$，$F\in \mathbf{C}^{n\times s}$具$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^n$，若$P(\lambda)$ 是 A 在 F 的 n.p.m.，则存在$G^T\in \mathbf{C}^{s\times n}$具$\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(G^TA^{i-1})=\{0\}$且$A$在$G^T$的行 n.p.m. 是$P^T(\lambda)$。

证明 设$S(\lambda)$是$P(\lambda)$的 Smith 标准形，则存在单模态矩阵 $M(\lambda)$和$N(\lambda)$，使得

$$\left.\begin{aligned} & P(\lambda)=M(\lambda)S(\lambda)N(\lambda),\ \ S(\lambda)=\mathrm{diag}(I_{s-k}S_1(\lambda)) \\ & S_1(\lambda)=\mathrm{diag}(\psi_1(\lambda)\cdots\psi_k(\lambda)),\psi_i(\lambda)|\psi_{i+1}(\lambda),i=1,2,\cdots,k-1 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中$\psi_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,k)$的次数满足

$$\sum_{i=1}^{k}\deg\psi_i(\lambda)=n$$

如果我们取 $(F_1\ F_2)=FM(\sigma)$，则有

$$F_1=0,\ \ F_2S_1(\sigma)=0 \tag{3.2}$$

易知$F_2=(f_1\ \ f_2\ \cdots\ f_k)$ 是$\mathbf{C}^n$关于A的最小生成组，向量 f_1，f_2，…，f_k 是对$\mathbf{C}^n$关于A做循

环不变子空间分解的生成元。

设矩阵 $T=(T_1\ T_2\cdots T_k)$，$T_i=(f_i\ Af_i\cdots A^{\nu_i-1}f_i)$

其中$\nu_i=\deg\psi_i(\lambda)$。则我们知道$T$是非奇异矩阵，$T^{-1}$存在。取$T^{-1}$的第 ν_1，$\nu_1+\nu_2$，$\cdots$，$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{k-1}$，$n$ 行做为A的行生成元，g_1^T，g_2^T，$\cdots$，g_k^T，令

$$G_2^T=\begin{pmatrix} g_1^T \\ \vdots \\ g_k^T \end{pmatrix},\quad K_i^T=\begin{pmatrix} g_i^T \\ \vdots \\ g_i^T A^{\nu_i-1} \end{pmatrix}, K^T=\begin{pmatrix} K_1^T \\ \vdots \\ K_k^T \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

则

$$K^T T=\operatorname{diag}(H_1\ H_2\cdots H_k),\ H_i=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ 0 & & 1 & \times \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

其中×表示无必要明确写出的元。

于是可知K 非奇异，G_2^T 满足$\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathbf{N}(G_2^T A^{i-1})=\{0\}$。

由于矩阵K_i^T和T_j之间有

$$K_i^T T_j=0 \qquad (i\neq j) \tag{3.5}$$

于是

$$g_i^T A^t f_j=0 \qquad (i\neq j,\ \forall t\geqslant 0) \tag{3.6}$$

因为G_2^T是$(\mathbf{C}^n)^T$关于A的行生成组，则必定存在多项式$\tilde{\alpha}_{i1}(\lambda)$，$\cdots$，$\tilde{\alpha}_{ik}(\lambda)$，$\deg\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda)\leqslant\nu_j-1$，使得

$$g_i^T A^{\nu_i}=g_1^T\tilde{\alpha}_{i1}(A)+\cdots+g_k^T\tilde{\alpha}_{ik}(A) \tag{3.7}$$

由（3.6）式易证

$$g_j^T\tilde{\alpha}_{ij}(A)A^t f_j=0 \qquad (i\neq j,\ \forall t\geqslant 0) \tag{3.8}$$

如果依次取 $t=0,1,2,\cdots,\nu_j-1$，并加以重写则有

$$g_j^T\tilde{\alpha}_{ij}(A)T_j=0 \qquad (i\neq j) \tag{3.9}$$

既然$\deg\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda)\leqslant\nu_j-1$，如果令

$$\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda)=\delta_0+\delta_1\lambda+\cdots+\delta_{\nu_j-1}\lambda^{\nu_j-1},\ d^T=(\delta_0\ \delta_1\cdots\delta_{\nu_j-1})$$

则可将（3.9）式写成

$$0=d^T K_j^T T_j=d^T H_j$$

从而推得 $d^T=0$，即$\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda)=0 \qquad (\forall i\neq j)$ (3.10)

于是（3.7）式可以写成

$$g_j^T(A^{\nu_j}-\tilde{\alpha}_{jj}(A))=0 \tag{3.11}$$

由此我们有

$$g_j^T(A^{\nu_j}-\tilde{\alpha}_{jj}(A))A^t f_j=0 \qquad (\forall t\geqslant 0;\ j=1,2,\cdots,k) \tag{3.12}$$

如果我们记多项式 $\psi_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,k)$为

$$\psi_i(\lambda)=\lambda^{\nu_i}-\alpha_i(\lambda) \qquad \text{（见（3.1）式）}$$

$\deg\alpha_i(\lambda)\leqslant\nu_i-1$。令 $\varphi_j(\lambda)=\alpha_j(\lambda)-\tilde{\alpha}_{jj}(\lambda)$则由（3.12）式推知有

$$g_j^T\varphi_j(A)T_j=0 \tag{3.13}$$

仿照（3.9）推知（3.10）式，立即可得

$$\varphi_j(\lambda)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

即 $$\tilde{a}_{jj}(\lambda)=a_j(\lambda) \qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

于是由（3.11）式和这一结论，我们有

$$\psi_i(\tau)g_i^T=0 \qquad (i=1,2,\cdots,k)$$

或等价地写成

$$S_1(\tau)G_2^T=0$$

由此以及 $\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(G_2^TA^{i-1})=\{0\}$，我们可证得 $S_1(\lambda)$ 是 A 在 G_2^T 的行 n.p.m.. 如果我们令

$$G^T=M^{-T}(\tau)\begin{pmatrix}0\\G_2^T\end{pmatrix}$$

则有 $$P^T(\tau)G^T=P^T(\tau)M^{-T}(\tau)\begin{pmatrix}0\\G_2^T\end{pmatrix}=N^T(\tau)S^T(\tau)\begin{pmatrix}0\\G_2^T\end{pmatrix}=0$$

即 G^T 是 $(\mathbf{C}^n)^T$ 关于 A 的行生成组，且 $P^T(\lambda)$ 是 A 在 G^T 的 n.p.m.. ▽▽

定理3.2 对给定 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，设其循环指数为 k，则必存在 $F\in\mathbf{C}^{n\times k}$，$G^T\in\mathbf{C}^{k\times n}$，使得 A 在 F 的 n.p.m. 和 A 在 G^T 的行 n.p.m. 都等于 $S_1(\lambda)$，$S_1(\lambda)$ 是一 Smith 标准形的矩阵.

证明 在定理 3.1 的证明中，分别取 $F=F_2$，$G^T=G_2^T$，立即可证得此结论. ▽▽

在下面，如果 F，G^T 满足定理 3.2 的要求，我们将称矩阵对 (F, G^T) 是一对偶生成组的自然对.

对给定的系统

$$\dot{x}=Ax+Bu, \quad y=Cx \tag{3.14}$$

其中 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$B\in\mathbf{C}^{n\times m}$ 和 $C\in\mathbf{C}^{l\times n}$. 如果我们找到矩阵 $F\in\mathbf{C}^{n\times k}$ 和 $G^T\in\mathbf{C}^{k\times n}$ 形成对偶生成组的自然对，$S(\lambda)$ 是 A 在 F 的 n.p.m.（显然也是 A 在 G^T 的 n.p.m.），$U(\lambda)$，$V(\lambda)$ 分别是 B 用 F，C 用 G^T 表示的矩阵，则我们要问是否存在多项式矩阵 $W(\lambda)$，使得系统（3.14）和系统

$$\left(\begin{array}{cc|c} I & 0 & 0\\ 0 & S(\lambda) & U(\lambda)\\ \hline 0 & -V(\lambda) & W(\lambda)\end{array}\right) \tag{3.15}$$

是等价或严格等价的，进而使 $W(\lambda)=0$ 是否为可能?

引理3.1 对给定的 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 和 $f\in\mathbf{C}^n$ 具 $\langle A|\mathbf{R}(f)\rangle=\mathbf{C}^n$，令 $T=(f\ Af\ \cdots\ A^{n-1}f)$ 则 T 是非奇异的，且 f 和 $g^T=e_n^TT^{-1}$ 可以形成对偶生成组的自然对，其中 $e_n^T=(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)\in\mathbf{C}^{1\times n}$，$g^T=e_n^TT^{-1}$ 是 T^{-1} 的第 n 行. 如果 A 在 f 的 n.p.m. 是

$$\psi(\lambda)=\lambda^n-\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}-\cdots-\alpha_1\lambda-\alpha_0$$

及 $$K^T=\begin{pmatrix}g^T\\g^TA\\ \vdots\\ g^TA^{n-1}\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} & 1\\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & & \cdots & & \cdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

则 $$K^TTR=I_n \text{或} K^TT=R^{-1} \tag{3.16}$$

证明 首先考虑多项式序列

$$\lambda\varphi^{(k)}(\lambda)=\varphi^{(k-1)}(\lambda)+\alpha_{k-1} \quad (k=1,2,\cdots,n);\quad \varphi^{(0)}(\lambda)=\psi(\lambda) \tag{3.17}$$

由于$\varphi^{(0)}(A)=0$，则我们有

$$\left.\begin{aligned}&A\varphi^{(1)}(A)=a_0I_n=\varepsilon_1(A)\\&A^2\varphi^{(2)}(A)=a_1A+a_0I_n=\varepsilon_2(A)\\&\qquad\cdots\qquad\cdots\\&A^n\varphi^{(n)}(A)=a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I_n=\varepsilon_n(A)\end{aligned}\right\}\tag{3.18}$$

其中 $\deg\varepsilon_j(\lambda)\leqslant j-1$。

设$K^TTR=H=(\eta_{ij})$，则我们有

$$\eta_{ij}=g^TA^{i-1}\varphi^{(j)}(A)f$$

而由 $g^T(f\ Af\ \cdots\ A^{n-2}f)=0$，则有

$$g^T\beta(A)f=0,\quad\forall\deg\beta(\lambda)\leqslant n-2,\ \beta(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$$

由此可知

（1）　$i>j$，$\deg(\lambda^{i-j-1}\varepsilon_j(\lambda))\leqslant n-2\Rightarrow g^TA^{i-j-1}\varepsilon_j(A)f=0$
$\Rightarrow g^TA^{i-1}\varphi^{(j)}(A)f=0\Rightarrow\eta_{ij}=0$

（2）　$i<j$，$\deg(\lambda^{i-1}\varphi^{(j)}(\lambda))\leqslant n-2\Rightarrow g^TA^{i-1}\varphi^{(j)}(A)f=0\Rightarrow\eta_{ij}=0$

于是我们有

$$K^TTR=H=\mathrm{diag}(g^T\varphi^{(1)}(A)f,\ g^TA\varphi^{(2)}(A)f,\cdots,g^TA^{n-1}\varphi^{(n)}(A)f)$$

但我们知

$$\begin{aligned}g^TA^{n-1}\varphi^{(n)}(A)f&=g^TA^{n-2}(\varphi^{(n-1)}(A)+a_{n-1}I_n)f=g^TA^{n-2}\varphi^{(n-1)}(A)f\\&=\cdots\cdots\\&=g^T\varphi^{(1)}(A)f=g^T(f\ Af\ \cdots\ A^{n-1}f)(-a_1\ \cdots\ -a_{n-1}\ 1)^T=1\end{aligned}$$

即可知，$K^TTR=I_n$ 或 $K^TT=R^{-1}$。　▽▽

定理3.3　对给定矩阵$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$b\in\mathbf{C}^n$，$c\in\mathbf{C}^{1\times n}$，$f\in\mathbf{C}^n$，$g^T\in(\mathbf{C}^n)^T$，$\varphi(\lambda)=\lambda^n-a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}-\cdots-a_1\lambda-a_0$，$f$，$g$，$\varphi(\lambda)$同引理3.1．如果$u(\lambda)$，$v(\lambda)$分别是$b$用$f$，$c$用$g^T$表示的矩阵，则存在$w(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$使系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c}\lambda I_n-A&b\\\hline -c&0\end{array}\right)\ 与\ \left(\begin{array}{cc|c}I_{n-1}&0&0\\0&\varphi(\lambda)&u(\lambda)\\\hline 0&-v(\lambda)&w(\lambda)\end{array}\right)\tag{3.19}$$

是严格系统等价的。

证明　首先，我们取T，K^T如引理3.1，

$$u(\lambda)=\beta_0+\beta_1\lambda+\cdots+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}$$
$$v(\lambda)=\gamma_0+\gamma_1\lambda+\cdots+\gamma_{n-1}\lambda^{n-1}$$

则有

$$\begin{pmatrix}T^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c}\lambda I_n-A&b\\\hline -c&0\end{array}\right)\begin{pmatrix}T&0\\0&1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}\lambda I_n-\tilde{A}&\tilde{b}\\\hline -\tilde{c}K^TT&0\end{array}\right)$$

其中

$$\tilde{b}=(\beta_0\ \beta_1\ \cdots\ \beta_{n-1})^T=(\beta_0\ b_1^T)^T,\ \tilde{c}K^T=c$$

$$\tilde{c}=(\gamma_0\ \gamma_1\ \cdots\ \gamma_{n-1}),\ \tilde{A}=\begin{pmatrix}0&a_0\\I_{n-1}&a_1\end{pmatrix},\ a_1=(a_1\ \cdots\ a_{n-1})^T$$

如果我们令

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix} 1\ \lambda\ \lambda^2 \cdots \lambda^{n-1} \\ 0 \quad M_1(\lambda) \end{pmatrix},\quad M_1(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{n-2} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \lambda \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

则有

$$\begin{pmatrix} M(\lambda) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c:c} \lambda I_n-\tilde{A} & \tilde{b} \\ \hdashline -\tilde{c}K^TT & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc:c} 0 & \varphi(\lambda) & u(\lambda) \\ -I_{n-1} & M_1(\lambda)(\lambda\tilde{e}_{n-1}-a_1) & M_1(\lambda)b_1 \\ \hdashline & -\tilde{c}K^TT & 0 \end{array}\right)$$

严格等价于 $\left(\begin{array}{cc:c} I_{n-1} & -M_1(\lambda)(\lambda\tilde{e}_{n-1}-a_1) & -M_1(\lambda)b_1 \\ 0 & \varphi(\lambda) & u(\lambda) \\ \hdashline -\tilde{c}K^T(f\ \cdots\ A^{n-2}f) & -\tilde{c}K^TA^{n-1}f & 0 \end{array}\right)$

严格等价于 $\left(\begin{array}{cc:c} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(\lambda) & u(\lambda) \\ 0 & -\tilde{v}(\lambda) & w(\lambda) \end{array}\right)$

其中 $\tilde{e}_{n-1}=(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)^T\in\mathbf{C}^{n-1}$,

$w(\lambda)=-\tilde{c}K^T(f\ Af\ \cdots\ A^{n-2}f)M_1(\lambda)b_1$

$\tilde{v}(\lambda)=\tilde{c}K^TA^{n-1}f+\tilde{c}K^T(f\ \cdots\ A^{n-2}f)M_1(\lambda)(\lambda\tilde{e}_{n-1}-a_1)$

$=\tilde{c}K^T(f\ Af\ \cdots\ A^{n-1}f)\left(e_n+\begin{pmatrix} M_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(-a_1\ \cdots\ -a_{n-2}\ \lambda-a_{n-1}\ 0)^T\right)$

$=\tilde{c}K^TT(\varphi^{(1)}(\lambda)\ \cdots\ \varphi^{(n)}(\lambda))^T=\tilde{c}K^TTR(1\ \lambda\ \cdots\ \lambda^{n-1})^T$

$=\tilde{c}(1\ \lambda\ \cdots\ \lambda^{n-1})^T=v(\lambda)$

其中 $\varphi^{(i)}(\lambda)$ 由(3.17)式给出。

简言之，我们完成了定理的证明。 ▽▽

既然 $w(\lambda)=-\tilde{c}K^T(f\ Af\ \cdots\ A^{n-2}f)M_1(\lambda)b_1$，则有两种情况需要加以讨论：

（1） 如果 $b_1=0$，即 $b=\beta_0 f$ 或 $b\in\mathbf{R}(f)$，有 $w(\lambda)=0$；

（2） 如果 $c=\gamma_0 g^T$，即 $\tilde{c}=\gamma_0 e_1^T$，则也有 $w(\lambda)=0$。

定理3.4 对给定系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx \tag{3.20}$$

其中 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$B\in\mathbf{C}^{n\times m}$，$C\in\mathbf{C}^{l\times n}$。又 $F\in\mathbf{C}^{n\times k}$ 和 $G^T\in\mathbf{C}^{k\times n}$ 是满足定理3.2的要求的对偶生成组的自然对。$S(\lambda)$ 是 A 在 F 的n.p.m.（或 A 在 G^T 的行n.p.m.），$S(\lambda)=\mathrm{diag}(\psi_1(\lambda)\ \psi_2(\lambda)\ \cdots\ \psi_k(\lambda))$，$\psi_i(\lambda)|\psi_{i+1}(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,k-1$。$U(\lambda)$，$V(\lambda)$ 分别是 B 用 F，C 用 G^T 对应 $S(\lambda)$ 表示的矩阵，即 $B=FU(\sigma)$，$C=V(\tau)G^T$，则存在多项式矩阵 $W(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{l\times m}$，使得系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c:c} \lambda I_n-A & B \\ \hdashline -C & 0 \end{array}\right) 与 \left(\begin{array}{cc:c} I_{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & S(\lambda) & U(\lambda) \\ \hdashline 0 & -V(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right)$$

是严格系统等价的。

证明 这里仍取 T_i，T，K_i^T 和 K^T 如同定理3.2，且令

$$B=T\widetilde{B}=(T_1\ T_2\ \cdots\ T_k)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km}\end{pmatrix} \tag{3.21}$$

$$C=\widetilde{C}K^T=\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} & \cdots & \widetilde{c}_{1k} \\ \cdots & \cdots & & \\ \widetilde{c}_{l1} & \widetilde{c}_{l2} & \cdots & \widetilde{c}_{lk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1^T \\ K_2^T \\ \vdots \\ K_k^T\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$$u_{ij}(\lambda)=(1\ \lambda\ \cdots\ \lambda^{\nu_i-1})b_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,m)$$

$$v_{ij}(\lambda)=\widetilde{c}_{ij}(1\ \lambda\ \cdots\ \lambda^{\nu_j-1})^T \qquad (i=1,2,\cdots,l;\ j=1,2,\cdots,k) \tag{3.23}$$

则可知系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n-A & B \\ \hline -C & 0\end{array}\right)$$

严格等价于

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda I_{\nu_1}-A_1 & & & & \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\end{matrix} \\ & \lambda I_{\nu_2}-A_2 & & & \begin{matrix} b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\end{matrix} \\ & & \ddots & & \begin{matrix} \cdots & & \cdots \end{matrix} \\ & & & \lambda I_{\nu_k}-A_k & \begin{matrix} b_{k1} & b_{k2} & & b_{km}\end{matrix} \\ \hline -\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} \\ \widetilde{c}_{21} \\ \vdots \\ \widetilde{c}_{l1}\end{pmatrix}K_1^T T_1 & \cdots & & -\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{1k} \\ \widetilde{c}_{2k} \\ \vdots \\ \widetilde{c}_{lk}\end{pmatrix}K_k^T T_k & 0\end{array}\right)$$

从定理 3.1, 3.2 及 3.3, 我们可知此系统矩阵严格等价于

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & S(\lambda) & U(\lambda) \\ \hline 0 & -V(\lambda) & W(\lambda)\end{array}\right)$$

其中

$$W(\lambda)=(w_{ij}(\lambda))\in\mathbf{C}[\lambda]^{l\times m}$$

$$w_{ij}(\lambda)=-\widetilde{c}_{ij}K_j^T(f_j\ \cdots\ A^{\nu_j-1}f_j)\left(\sum_{t=1}^{k} M_t(\lambda)\widetilde{b}_{tj}\right)$$

其中 $\widetilde{b}_{tj}$ 是由 b_{tj} 去掉第一行得到的, $M_t(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{(\nu_t-1)\times(\nu_t-1)}$ 类似于定理3.3的证明中$M_1(\lambda)$的形式. ▽▽

同样, 这里也有两个有意思的情况:

(1) 如果 $\mathbf{R}(B)\subset\mathbf{R}(F)$, 则 $W(\lambda)=0$.

(2) 如果 $\mathbf{N}(C)\supset\bigcap_{i=1}^{n}\mathbf{N}(G^TA^{i-1})$, 则 $W(\lambda)=0$.

在结束这一节之前, 让我们进一步考虑定理 3.3 和定理 3.4 已经回答了的问题, 就是对给定的系统 (A,B,C), 我们总可找到矩阵 F 和 G^T 作为对偶生成组的自然对. 对分别是 B 用 F, C 用 G^T 对应 $S(\lambda)$ 表示的矩阵 $U(\lambda)$, $V(\lambda)$, 确实存在多项式矩阵 $W(\lambda)$, 使得系统

矩阵

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & S(\lambda) & U(\lambda) \\ \hline 0 & -V(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right) \text{与} \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n - A & B \\ \hline -C & 0 \end{array}\right)$$

是严格等价的。

因此我们总有

$$V(\lambda)S^{-1}(\lambda)U(\lambda)+W(\lambda)=C(\lambda I_n-A)^{-1}B$$

而其右边是严格的真有理矩阵。我们感兴趣的问题是，是否存在$\tilde{V}(\lambda)$，$\tilde{U}(\lambda)$及$P(\lambda)$，使得

$$\tilde{V}(\lambda)P^{-1}(\lambda)\tilde{U}(\lambda)=C(\lambda I_n-A)^{-1}B$$

其中$P(\lambda)$不仅是A在最小生成组F的n. p. m.，而且是A在行最小生成组G^T的行n. p. m.，$\tilde{U}(\lambda)$，$\tilde{V}(\lambda)$分别是B用F，C用G^T表示的矩阵（注：这里$P(\lambda)$不一定是Smith标准形，F，G^T也可任取，而不必通过定理3.3和3.4的特殊方法。）下面的简单例子说明这一情况。

例3.1 对系统(A,B,C)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

容易求得其传递函数矩阵是

$$G(\lambda)=C(\lambda I_n-A)^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & 4\lambda \\ 3\lambda & 6 \end{pmatrix}\Big/\lambda^2$$

有$\operatorname{rank} G(\lambda)=2$。

如果我们取$f=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则可知$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^2$，$T=(f\ \ Af)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=T^{-1}$，$g^T=(10)$，且$\lambda^2$是$A$在$f$的n. p. m.，也是$A$在$g^T=(1\ \ 0)$的行n. p. m.。由此得$B$用$f$，$C$用$g^T$表示的矩阵分别是

$$U(\lambda)=(\lambda\ \ 2),\quad V(\lambda)=\begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3 \end{pmatrix}$$

易知可取$W(\lambda)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，使系统矩阵

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda & 2 \\ \hline 0 & -2\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{与} \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n - A & B \\ \hline -C & 0 \end{array}\right)$$

是严格等价的。

如果我们希望$W(\lambda)=0$，既然对所有$U(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{1\times 2}$和$V(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{2\times 1}$，均有$\operatorname{rank} U(\lambda)=\operatorname{rank} V(\lambda)=1$，则$\operatorname{rank}(V(\lambda)P^{-1}(\lambda)U(\lambda))\leqslant 1$，对任意$U(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{1\times 2}$，$V(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{2\times 1}$成立。

这一事实告诉我们，存在f，g^T，使得A在f的n. p. m. $P(\lambda)$（也是A在g^T的行n.p.m.），B用f表示的矩阵$U(\lambda)$，C用g^T表示的矩阵$V(\lambda)$形成的系统矩阵

$$\left(\begin{array}{cc|c} I & 0 & 0 \\ 0 & P(\lambda) & U(\lambda) \\ \hline 0 & -V(\lambda) & 0 \end{array}\right) \text{与} \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n - A & B \\ \hline -C & 0 \end{array}\right)$$

严格等价，一般说来是不可能的。

四、化多项式矩阵型为状态空间型

在这一节，利用上述结果，我们来回答相反的问题，即从多项式矩阵型建立与其严格等价的状态空间型。为简便起见，我们总假定系统的传递函数矩阵是严格真有理矩阵。

让我们考虑系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} P(\lambda) & U(\lambda) \\ \hline -V(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right) \tag{4.1}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}(V(\lambda)P^{-1}(\lambda)U(\lambda)+W(\lambda))=0 \tag{4.2}$$

则条件 (4.2) 意味着存在系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n - A & B \\ \hline -C & 0 \end{array}\right)$$

严格等价于(4.1)。

为方便，我们不妨假定 $P(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{n\times n}$，$\deg(\det P(\lambda))=n$。

首先，我们可求得 $P(\lambda)$ 的 Smith 标准形为$S(\lambda)$，即存在单模态矩阵$M(\lambda)$，$N(\lambda)$ 使得

$$M(\lambda)P(\lambda)N(\lambda)=S(\lambda)$$

则系统矩阵 (4.1) 严格等价于

$$\left(\begin{array}{c|c} S(\lambda) & M(\lambda)U(\lambda) \\ \hline -V(\lambda)N(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right)$$

即

$$\begin{pmatrix} M(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} P(\lambda) & U(\lambda) \\ \hline -V(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right)\begin{pmatrix} N(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} S(\lambda) & M(\lambda)U(\lambda) \\ \hline -V(\lambda)N(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right)$$

令 $U_1(\lambda)=M(\lambda)U(\lambda)$，$V_1(\lambda)=V(\lambda)N(\lambda)$，则系统矩阵$\left(\begin{array}{c|c} S(\lambda) & U_1(\lambda) \\ \hline -V_1(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right)$与(4.1)等价。

如果用 $u_{ij}(\lambda)$ 表示 $U_1(\lambda)$ 的元 (i,j)，则据多项式的除法有

$$u_{ij}(\lambda)=\sigma_i(\lambda)\xi_{ij}(\lambda)+\tilde{u}_{ij}(\lambda)$$

其中或 $\tilde{u}_{ij}(\lambda)=0$ 或 $\deg\tilde{u}_{ij}(\lambda)<\deg\sigma_i(\lambda)$，而 $\sigma_i(\lambda)$ 是 $S(\lambda)$ 的第 i 行对角元。令

$$X(\lambda)=(\xi_{ij}(\lambda)),\quad \tilde{U}(\lambda)=(\tilde{u}_{ij}(\lambda))$$

则有 $U_1(\lambda)=S(\lambda)X(\lambda)+\tilde{U}(\lambda)$

类似地可有

$$V_1(\lambda)=Y(\lambda)S(\lambda)+\tilde{V}(\lambda)$$

其中 $Y(\lambda)=(\eta_{ij}(\lambda))$，$\tilde{V}(\lambda)=(\tilde{v}_{ij}(\lambda))$，其中 $\tilde{v}_{ij}(\lambda)=0$，或 $\deg\tilde{v}_{ij}(\lambda)<\deg\sigma_j(\lambda)$。

由于

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ Y(\lambda) & I \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} S(\lambda) & U_1(\lambda) \\ \hline -V_1(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right)\begin{pmatrix} I & -X(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} S(\lambda) & \tilde{U}(\lambda) \\ \hline -\tilde{V}(\lambda) & \widetilde{W}(\lambda) \end{array}\right)$$

其中 $$\widetilde{W}(\lambda)=W(\lambda)+V_1(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)U_1(\lambda)-Y(\lambda)S(\lambda)X(\lambda)$$

且设 $$S(\lambda)=\begin{pmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & S_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$S_1(\lambda)=\mathrm{diag}(\psi_1(\lambda)\ \psi_2(\lambda)\ \cdots\ \psi_k(\lambda)),\ \psi_i(\lambda)\mid\psi_{i+1}(\lambda)\qquad(i=1,2,\cdots,k-1)$$

则我们有

$$\left(\begin{array}{c|c} S(\lambda) & \tilde{U}(\lambda) \\ \hline -\tilde{V}(\lambda) & \widetilde{W}(\lambda) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & S_1(\lambda) & \bar{U}(\lambda) \\ \hline 0 & -\bar{V}(\lambda) & \widetilde{W}(\lambda) \end{array}\right)\tag{4.3}$$

其中 $\bar{U}(\lambda)$ 的第 i 行元的次数和 $\bar{V}(\lambda)$ 的第 i 列元的次数均小于 $\nu_i=\deg\psi_i(\lambda)$。因为

$$\lim_{\lambda\to\infty}(V(\lambda)P^{-1}(\lambda)U(\lambda)+W(\lambda))=0$$

可知 $$\lim_{\lambda\to\infty}(\bar{V}(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\bar{U}(\lambda)+\widetilde{W}(\lambda))=0\tag{4.4}$$

以下我们就从(4.3)和(4.4)出发，寻求严格等价于(4.1)的系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_n-A & B \\ \hline -C & 0 \end{array}\right)$$

其次，令

$$A=\mathrm{diag}(N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_k),\ N_i=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{0i} \\ & \alpha_{1i} \\ I_{\nu_i-1} & \vdots \\ & \alpha_{\nu_i-1,i} \end{pmatrix}\tag{4.5}$$

其中 α_{ji} 是 $\psi_i(\lambda)$ 的系数，即

$$\psi_i(\lambda)=\lambda^{\nu_i}-(\alpha_{\nu_i-1,i}\lambda^{\nu_i-1}+\cdots+\alpha_{1i}\lambda+\alpha_{0i}).$$

我们令

$$f_1=e_1,\ f_2=e_{\nu_1+1},\ \cdots,\ f_k=e_{\nu_1+\cdots+\nu_{k-1}+1},\ F=(f_1\ f_2\ \cdots\ f_k)$$

则 F 是 $\mathbf{C}^n$ 关于由(4.5)定义的 A 的生成组。容易证明

$$T=(T_1\ T_2\ \cdots\ T_k),\ T_i=(f_i\ Af_i\ \cdots\ A^{\nu_i-1}f_i)$$

满足 $$T=T^{-1}=I_n$$

如果我们取

$$g_1^T=e_{\nu_1}^T,\ g_2^T=e_{\nu_1+\nu_2}^T,\ \cdots,\ g_k^T=e_n^T,\ G^T=(g_1^T\ \cdots\ g_k^T)^T$$

则 F 和 G^T 可以形成 A 对应 $S_1(\lambda)$ 的对偶生成组的自然对。

如果我们记 $\bar{U}(\lambda)$ 的元 (i,j) 为

$$\bar{u}_{ij}(\lambda)=\beta_{ij}^{(0)}+\beta_{ij}^{(1)}\lambda+\cdots+\beta_{ij}^{(\nu_i-1)}\lambda^{\nu_i-1}$$

则由 $T=I_n$ 知（见第三节），

$$B=\widetilde{B}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix},\quad B_i=\begin{pmatrix} \beta_{i1}^{(0)} & \beta_{i2}^{(0)} & \cdots & \beta_{im}^{(0)} \\ & \cdots & \cdots & \\ \beta_{i1}^{(\nu_i-1)} & \beta_{i2}^{(\nu_i-1)} & \cdots & \beta_{im}^{(\nu_i-1)} \end{pmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{4.6}$$

类似地可记 $\bar{V}(\lambda)$ 的元 (i,j) 为

$$\bar{v}_{ij}(\lambda)=\gamma_{ij}^{(0)}+\gamma_{ij}^{(1)}\lambda+\cdots+\gamma_{ij}^{(\nu_j-1)}\lambda^{\nu_j-1}$$

则（也见第三节）可有

$$\widetilde{C}=(\widetilde{C}_1\ \widetilde{C}_2\ \cdots\ \widetilde{C}_k),\quad \widetilde{C}_i=\begin{pmatrix} \gamma_{1i}^{(0)} & \cdots & \gamma_{1i}^{(\nu_i-1)} \\ \cdots & & \cdots \\ \gamma_{li}^{(0)} & \cdots & \gamma_{li}^{(\nu_i-1)} \end{pmatrix}$$

如果我们令

$$L_i=(h_i^T\ h_i^TN_i\ \cdots\ h_i^TN_i^{\nu_i-1})^T,\quad h_i^T=(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)\in\mathbf{C}^{1\times\nu_i} \qquad (i=1,2,\cdots,k)$$

$$K^T=\mathrm{diag}(L_1\ L_2\ \cdots\ L_k)$$

则有

$$C=\widetilde{C}K^T=(\widetilde{C}_1L_1\ \widetilde{C}_2L_2\ \cdots\ \widetilde{C}_kL_k) \tag{4.7}$$

据第三节的定理，可以断定由(4.5)，(4.6)和(4.7)得到的系统 (A,B,C)，使得对某一多项式矩阵 $W_1(\lambda)$，

$$\left(\begin{array}{c:c} \lambda I_n-A & B \\ \hdashline -C & 0 \end{array}\right) \text{ 与 } \left(\begin{array}{cc:c} I_{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & S_1(\lambda) & \bar{U}(\lambda) \\ \hdashline 0 & -\bar{V}(\lambda) & W_1(\lambda) \end{array}\right)$$

是严格等价的（见定理3.4）。这样，我们有

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\bar{V}(\lambda)S_1^{-1}(\lambda)\bar{U}(\lambda)+W_1(\lambda))=\lim_{\lambda\to\infty}C(\lambda I_n-A)^{-1}B=0 \tag{4.8}$$

综合(4.4)和(4.8)，我们得

$$\lim_{\lambda\to\infty}(W_1(\lambda)-\widetilde{W}(\lambda))=0 \tag{4.9}$$

但 $W_1(\lambda)-\widetilde{W}(\lambda)$ 是多项式矩阵，所以

$$W_1(\lambda)-\widetilde{W}(\lambda)=0,\ \text{即}\ W_1(\lambda)=\widetilde{W}(\lambda)$$

因此可以得出结论，系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c:c} \lambda I_n-A & B \\ \hdashline -C & 0 \end{array}\right) \text{ 与(4.1)}$$

是严格系统等价的。其中 A,B,C 分别由(4.5)，(4.6)，(4.7)得到。

例4.1 多项式型系统矩阵

$$\left(\begin{array}{c:c} S(\lambda) & U(\lambda) \\ \hdashline -V(\lambda) & W(\lambda) \end{array}\right)$$

给定如下

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},\quad U(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$V(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix},\quad W(\lambda)=-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则其传递函数矩阵是

$$G(\lambda)=V(\lambda)S^{-1}(\lambda)U(\lambda)+W(\lambda)=\begin{pmatrix}(4\lambda+2)/\lambda^2 & 3/\lambda\\ 3/\lambda & 2/\lambda\end{pmatrix}$$

按照上述方法，我们得

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \tilde{B}=B=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}g_1^T=(1\quad 0\quad 0)\\ g_2^T=(0\quad 0\quad 1)\end{matrix}$$

$$K^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \tilde{C}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&1\end{pmatrix},\quad C=\tilde{C}K^T=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&0\end{pmatrix}$$

则得严格系统等价的状态空间型系统矩阵为

$$\left(\begin{array}{c:c}\lambda I_3-A & B\\ \hdashline -C & 0\end{array}\right)$$

且可验证

$$C(\lambda I_3-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\lambda&0&0\\0&1/\lambda&0\\0&1/\lambda^2&1/\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(4\lambda+2)/\lambda^2 & 3/\lambda\\ 3/\lambda & 2/\lambda\end{pmatrix}=G(\lambda)$$

致谢 我们感谢系统科学所韩京清同志，在中国第二届系统理论会议上的报告中，谈到关于从系统实现 A, B, C, 求出三个多项式矩阵来描述控制系统的设想.

（续完）

参 考 文 献

[1] Гантмахер Ф. Р., *Теория Матриц*, Изд «Наука», Москва (1966).

[2] 黄 琳，《系统与控制理论中的线性代数》，科学出版社，北京（1983）.

[3] Hoffman, K. and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. (1971).

[4] Wonham, W. M., *Linear Multi-Variable Control, A Geometric Approach*, Springer-Verlag, New York (1979).

[5] Rosenbrock, H. H., *State-Space and Multivariable Theory*, Nelson London (1970).

[6] 许可康、韩京清，线性时不变系统两种描述的等价性，系统科学与数学，3，3（1983）.

[7] Hwang Ling(黄 琳), Generating element and controllability, *Proceeding of the Bilateral Meeting on Control Systems* (P. R. C. and U. S. A.), Scientific Press, Beijing (1981).

[8] 黄 琳、于年才，最小多项式矩阵与线性多变量系统（Ⅰ），应用数学和力学，6,7（1985）.

Minimal Polynomial Matrix and Linear Multivariable System(II)

Hwang Ling Yu Nian-cai

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

Part (Ⅰ) of this work is on the theory of minimal polynomial matrix and part (Ⅱ) is on the applications of this theory to linear multivariable systems.

In §1 of this part, using the theory in part (Ⅰ), some results about imput part of a linear multivariable system are discussed in detail and in §2, using duality properties, the concepts about row n. p. m. and row generating system, etc are given, and some results about output part of linear multivariable system are discussed, too. In §3, we discuss the approach which can give the polynomial model with less dimension from the state-space model and in §4 we discuss the inverse of the problem to give the state-space model from the polynomial model. Some interesting examples are given to explain the theory and approach.