

# 行动载荷作用下的连续梁的 横向振动问题

叶开沅 马国琳

(兰州大学) (甘肃计算中心)  
(1985年1月17日收到)

## 摘 要

本文在考虑行动载荷质量、惯性力及阻尼影响的情况下, 研究了机车通过连续梁时横向振动问题的整个过程, 并得出了在任意行动载荷  $PF(t)$  作用下的连续梁的动力方程的一般解. 我们具体计算了单个行动载荷为  $P_i + Q_i \sin(\alpha_i t + \epsilon_i)$  时的情形并建立了行动载荷作用下的连续梁横向振动问题的动力理论.

最后, 做为例子, 我们求解了两跨梁的横向振动问题, 跨中点的挠度如图2和图3所示.

## 一、引 言

行动载荷作用下的连续梁的强迫振动问题是一个经典而又复杂的问题, 在工程实际中有很重要的意义. 但由于数学上的复杂性, 特别是当考虑行动载荷质量及惯性力的影响时, 求解的困难很大. 多年来的理论研究成果并不很多而且大多都是忽略行动载荷质量和惯性力影响的情形下得到的.

W. J. Duncan<sup>[1][2]</sup>用导纳法研究了连续梁的强迫和自由振动, 推出了常载荷作用下的连续梁的三弯矩理论的一般形式. R. S. Ayre, George Food 和 L. S. Jacobsen<sup>[3][4]</sup>在忽略阻尼和行动载荷质量的情况下, 得出了两跨梁在常力和交替力作用下的解. D. A. Linger 和 C. L. Hulbos<sup>[5]</sup>研究了连续梁的强迫振动, 他们也是在忽略阻尼的情况下求解的. 近年来, 有一些数值和单跨梁方面的结果<sup>[6]~[14]</sup>探讨, 但多跨情形的解析结果很少.

本文在文[15]的基础上, 研究了行动载荷作用下的连续梁的振动, 考虑行动载荷质量及惯性力的影响, 用小参数法将问题归结为求解一组积分方程, 并分析了所得结果.

## 二、任意单个行动载荷作用下的连续梁动力方程的求解

考虑如图1所示的连续梁, 长为  $l$ , 抗弯刚度为  $EI$ , 总质量为  $m_0$ , 跨距  $\Delta_i$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ) 任意. 其上作用一质量为  $m_0$  的铅垂行动载荷  $PF(t)$ , 并以常速  $v$  通过梁.

我们将梁的跨中支点消去, 代之以集中力  $R_i(t)$  和支点条件  $w(\Delta_i)=0$ , ( $i=1, 2, \dots$ ,

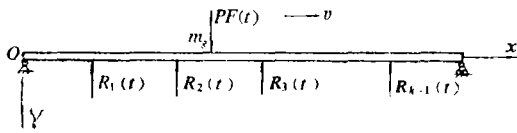


图 1

$k-1$ ). 坐标的方向如图 1 所示, 经过时间  $t_1$  后  
 载荷与坐标原点的距离为  $L=vt_1$ .

设梁的挠度为  $y$ , 引入适当的新变量后,  
 梁的制约微分方程为:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{m_0 v^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(x-t) PF(t) \\ - \delta(x-t) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \lambda + \sum_{i=1}^{k-1} \delta(x-a_i) R_i(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

边界条件和初始条件分别为:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad w = 0, \quad \text{当 } x=0 \text{ 及 } 1 \quad (2.2)$$

$$w = 0, \quad \text{当 } x=a_i \quad (i=1, 2, \dots, k-1) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad w = 0, \quad \text{当 } t=0 \quad (2.4)$$

选  $\lambda$  为小参数并把 (2.1) 中的因变量  $w$  展开成如下的升幂级数

$$w(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t)\lambda + w_2(x, t)\lambda^2 + \dots \quad (2.5)$$

将 (2.5) 式代入 (2.1)~(2.4) 式中并将  $\lambda$  因次相同的项归并在一起, 我们便得到一系列关于  $w_0, w_1, w_2, \dots$  的微分方程及相应的边界条件和初始条件.

求解这些微分方程<sup>[15]</sup>, 我们即得一组关于  $R_i(t)$  的积分方程. 利用  $w(a_i) = 0$  的条件联立求解此积分方程组, 解出  $R_i(t)$  并代入 (2.5) 式即可得出问题的解答.

如前所示, 机车的重量被简化成  $m$  个集中行动载荷  $m_{0j}$  ( $j=0, 1, 2, \dots, m-1$ ), 它们各自与零号载荷相距  $s_j$  ( $j=1, 2, \dots, m-1$ ). 对于任一载荷  $PF(t)$ , 就整个机车而言, 挠度的表达式为

$$w = \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ t - \frac{s_j}{v} \right\}^0 w_j \quad (2.6)$$

显然, (2.6) 式满足所有的微分方程和边界条件.

我们所求出的解只适用于  $0 \leq t < 1$ , 当  $t > 1$  时, 挠度所满足的方程和解答与 [15] 相同.

### 三、数值结果和分析

我们用本文的理论具体计算了集中载荷  $PF(t) = Q_i + P_i \sin(\alpha_i t + \epsilon_i)$  作用下的两跨连续梁. 设梁长为 540 呎, 重 900 英吨, 两跨距相等.

经过计算, 我们求得

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x \quad (3.1)$$

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin m\pi x \quad (3.2)$$

.....

其中

$$\begin{aligned}
 T_n(t) = & -\frac{2n\pi Q}{\Delta_n^*} \left[ 2He^{-Ht} \cos k_n t + \frac{H^2 - k_n^2 + n^2 \pi^2}{k_n} e^{-Ht} \sin k_n t \right] \\
 & - \frac{4n\pi HQ}{\Delta_n^*} \cos n\pi t + \frac{2Q(\omega^2 - n^2 \pi^2)}{\Delta_n^*} \sin n\pi t \\
 & - \frac{2}{k_n} \int_0^t \sum_{i=1}^{k-1} R_i(\tau) \sin n\pi a_i e^{-H(t-\tau)} \sin k_n(t-\tau) d\tau \\
 & + P[F^{(3)}(a_n^{(1)}) \cos \epsilon + F^{(1)}(a_n^{(1)}) \sin \epsilon] \sin a_n^{(1)} t \\
 & - P[F^{(3)}(a_n^{(2)}) \cos \epsilon + F^{(1)}(a_n^{(2)}) \sin \epsilon] \sin a_n^{(2)} t \\
 & + P[F^{(3)}(a_n^{(1)}) \sin \epsilon - F^{(1)}(a_n^{(1)}) \cos \epsilon] \cos a_n^{(1)} t \\
 & + P[F^{(1)}(a_n^{(2)}) \cos \epsilon - F^{(3)}(a_n^{(2)}) \sin \epsilon] \cos a_n^{(2)} t \\
 & + \frac{P}{k_n} \{ [F^{(2)}(a_n^{(1)}) - F^{(2)}(a_n^{(2)})] \cos \epsilon \\
 & + [F^{(4)}(a_n^{(2)}) - F^{(4)}(a_n^{(1)})] \sin \epsilon \} e^{-Ht} \sin k_n t \\
 & + P\{ [F^{(1)}(a_n^{(1)}) - F^{(1)}(a_n^{(2)})] \cos \epsilon \\
 & + [F^{(3)}(a_n^{(2)}) - F^{(3)}(a_n^{(1)})] \sin \epsilon \} e^{-Ht} \cos k_n t
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中,  $Q$  是无量纲常数, 表示该项载荷是常量,  $\epsilon$  是相角,  $a = 2l/D$  ( $D$  为车轮直径),  $P \sin(at + \epsilon)$  相当于车轮偏心质量引起的交替惯性力。

$$\Delta_n^* = (\omega_n^2 - n^2 \pi^2)^2 + 4n^2 \pi^2 H^2 \tag{3.4}$$

$$a_n^{(1)} = \alpha - n\pi, \quad a_n^{(2)} = \alpha + n\pi \tag{3.5}$$

$$F^{(1)}(a_n^{(i)}) = \frac{a_n^{(i)2} - \omega_n^2}{\Delta_n^*(a_n^{(i)})} \tag{3.6}$$

$$F^{(2)}(a_n^{(i)}) = \frac{H(a_n^{(i)2} - \omega_n^2)}{\Delta_n^*(a_n^{(i)})} \tag{3.7}$$

$$F^{(3)}(a_n^{(i)}) = \frac{2Ha_n^{(i)}}{\Delta_n^*(a_n^{(i)})} \tag{3.8}$$

$$F^{(4)}(a_n^{(i)}) = \frac{a_n^{(i)}(H^2 - k_n^2 + a_n^{(i)2})}{\Delta_n^*(a_n^{(i)})} \tag{3.9}$$

$$\Delta_n^*(a_n^{(i)}) = (\omega_n^2 - a_n^{(i)2})^2 + 4H^2 a_n^{(i)2} \tag{3.10}$$

$T_{mn}(t)$  的表达式可以同样求出。

我们具体计算了八种速度情况下方程的解。两跨中点的挠度分别如图 2 和图 3 所示。横坐标单位为秒, 纵坐标单位为吋, 阻尼系数  $h = 0.7539823$ 。数值计算的结果表明:

1. 行动载荷质量的效应直接影响挠度的值, 它是由共振产生的并主要由锤击力引起, 故忽略行动载荷质量是不合理的。

2. 忽略阻尼的效应在速度值远离共振区时是合理的, 这时阻尼对挠度的值影响较小。

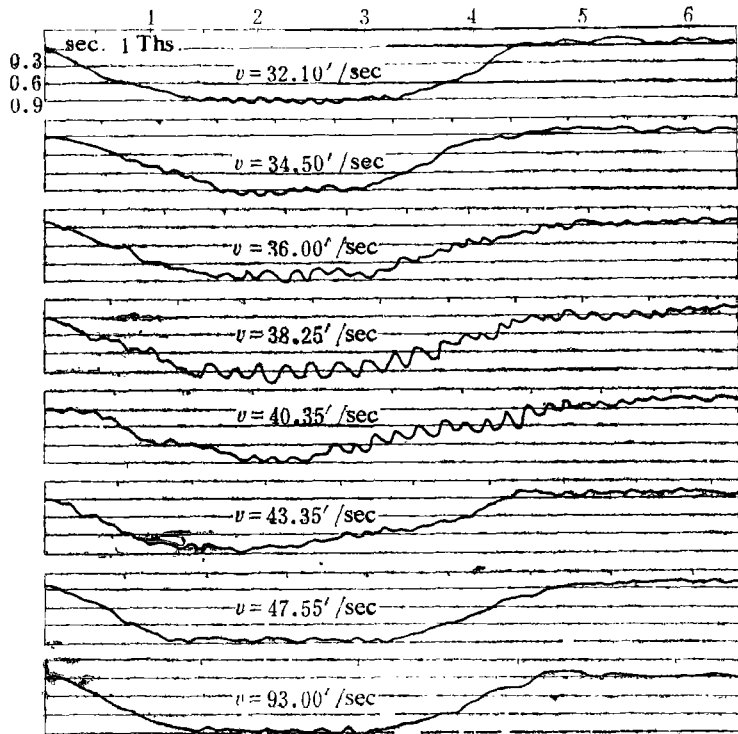


图 2

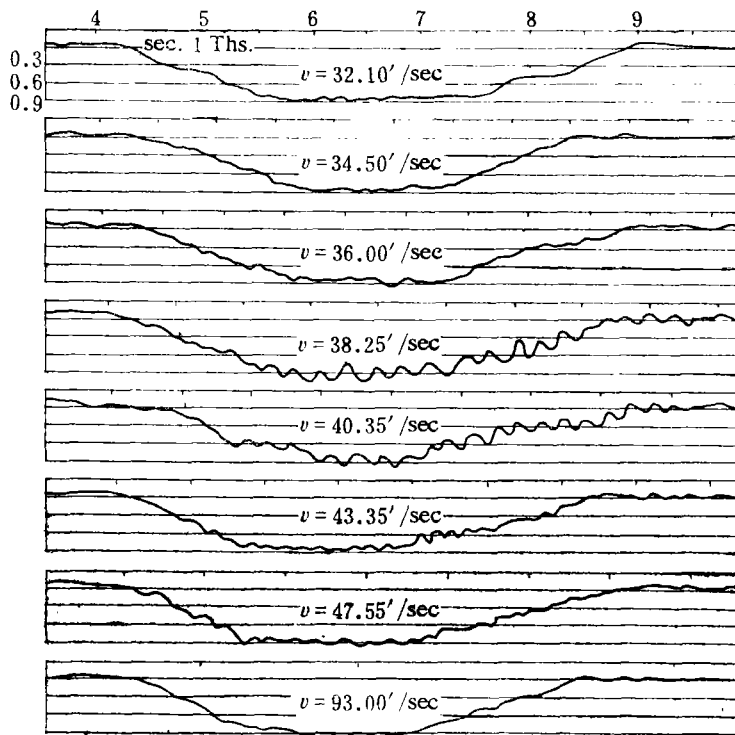


图 3

但当速度值接近共振区时, 阻尼对挠度值的影响变得很大, 因而这时也不应忽略阻尼的影响。

3. 与[15]比较, 本文中梁跨的挠度值要比单跨时大, 这是由于多跨和单跨时梁的抗弯刚度不同而引起的。

### 参 考 文 献

- [1] Duncan, W. J., *Phil. Mag.*, ser 7, **32** (1941), 401—419.
- [2] Duncan, *Phil. Mag.*, ser 7, **34** (1943), 49—63.
- [3] Ayer, R. S., et al., *J. Appl. Mech.*, **17** (1950), 1—12.
- [4] Ayer, et al., *J. Appl. Mech.*, **17** (1950), 283—290.
- [5] Linger, D. A., et al., *High. Res. Board Bull.*, **339** (1962), 1—22.
- [6] Timoshenko, S. P., *Phil. Mag.*, **43** (1922), 1018.
- [7] Lowan, A. N., *Phil. Mag.*, ser 7, **19** (1935), 708.
- [8] Darnley, E. R., *Phil. Mag.*, **41** (1921), 81
- [9] Mise, K., et al., *Quart. J. Math. and Appl. Mech.*, **9** (1956), 195—206.
- [10] Chilver, A. H., *Quart. J. Math. and Appl. Mech.*, **9** (1956), 207—211.
- [11] Biggs, J. M., et al., *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **124** (1959), 291—318.
- [12] Tang, S., *AIAA J.*, **4** (1966), 711—713.
- [13] Knowles, J. K., *J. Appl. Mech.*, **35** (1968), 1—6.
- [14] Byers, W. G., *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, **96** (1970), 1083—1103.
- [15] Yeh Kai-yuan and Ma Guo-lin, *Scientia Sinica, A*, **8** (1984), 831—846.

## Vibration Theory of Continuous Beam under the Action of Moving Load

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Ma Guo-lin

(Computing Center of Gansu Province, Lanzhou)

### Abstract

This paper uses the small parameter method to investigate the dynamic calculation of the whole vibration process of trains passing through a continuous beam, considering the effects of the mass and the damping as well as the masses of the moving loads. By solving a set of integral equation, we find out the general solution of continuous beam under the action of arbitrary moving load  $PF(t)$  and calculate the case of single moving load being  $Q_i + P_i \sin(\alpha_i t + \epsilon_i)$ . By concluding our results, we establish the dynamic theory of vibration of continuous beam acted by the moving load.

Finally, as an example, we calculate the vibration question of two-span continuous beam. The deflections of two midspan are shown in Fig.2 and Fig. 4.