应用数学和力学，第6卷第11期（1985年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

滑开型断裂的复合型脆断判据*

林 拜 松

（中南工业大学，1982年9月10日收到）

摘 要

众所周知，现有的复合型脆断判据都是张开型断裂判据．我们认为亦存在着滑开型断裂的复合型脆断，从而提出三个滑开型断裂的复合型脆断判据：径向剪应力判据、最大剪应力判据及歪形应变能密度判据．这样，我们就能全面解释带裂纹的构件的脆断现象．

一、前 言

Liebowitz、Eftis 和 Jone 利用紧凑剪切试样，作了铝、钛和钢合金的滑开型断裂试验[1]．作为这些试验和其他试验[2]的结果，已作出断言：当结构的载荷沿Ⅱ型方向作用时，滑开型断裂即Ⅱ型断裂可以代表一种实际的断裂形式；而且，对于某些合金来说，滑开型断裂的 $K_{\mathrm{II}c}$ 值可以低于张开型断裂的 $K_{\mathrm{I}c}$ 值．这样，带裂纹的构件的实际断裂形式有两种：张开型断裂和滑开型断裂．于是，我们认为复合型脆断可以是张开型断裂，也可以是滑开型断裂；到底取那种断裂形式，视带裂纹的构件的几何、材料和载荷以及裂纹几何而定．

众所周知，现有的复合型脆断判据都是张开型断裂判据．这些判据不能解释Ⅱ型裂纹和Ⅰ-Ⅱ复合型裂纹发生滑开型扩展．为此，须要建立滑开型断裂的复合型脆断判据．

为了全面解释带裂纹的构件的脆断现象，我们提出了三个滑开型断裂的复合型脆断判据：径向剪应力判据、最大剪应力判据和歪形应变能密度判据．

二、径向剪应力判据

Ⅰ-Ⅱ复合型裂纹尖端附近的径向剪应力分量为：

$$\tau_{r\theta}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\cdot\left[K_{\mathrm{I}}\cdot\sin\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}+K_{\mathrm{II}}\cdot(3\cos\theta-1)\cos\frac{\theta}{2}\right] \tag{2.1}$$

而径向剪应力因子 $\tilde{\tau}_{r\theta}$ 为：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\left[K_{\mathrm{I}}\cdot\sin\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}+K_{\mathrm{II}}\cdot(3\cos\theta-1)\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right] \tag{2.2}$$

其中，K_{I} 和 K_{II} 是复合型应力强度因子．

径向剪应力判据叙述如下：

* 钱伟长推荐．

1） 裂纹在 $\tilde{\tau}_{r\theta}$ 达到最大值的方向开始扩展。从而，确定开裂角 θ_0 的公式为：

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta}=0, \qquad \frac{\partial^2 \tilde{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta^2}<0 \quad (\theta=\theta_0\text{ 时}) \tag{2.3}$$

2） 当径向剪应力因子的最大值达到临界值时，裂纹就开始扩展。于是，裂纹开始扩展条件是：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}|_{\theta=\theta_0}=\tilde{\tau}_{\mathrm{cr}} \tag{2.4}$$

这里，$\tilde{\tau}_{\mathrm{cr}}$ 是 $\tilde{\tau}_{r\theta}$ 的临界值。

现在，我们来说明本判据的应用。

（1） Ⅱ型裂纹

对于这个问题，$\tilde{\tau}_{r\theta}$ 为：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}=\frac{K_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{2\pi}}\cdot(3\cos\theta-1)\cdot\cos\frac{\theta}{2} \tag{2.5}$$

将式(2.5)代入式(2.3)得：

$$\theta_0=0 \tag{2.6}$$

即Ⅱ型裂纹将沿裂纹线方向开始扩展，它表明Ⅱ型裂纹将发生滑开型扩展，这正是我们所期望的。

将 $\theta_0=0$ 代入方程(2.5)得：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}|_{\theta=0}=\tilde{\tau}_{r\theta\max}=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.7}$$

当Ⅱ型裂纹沿裂纹线方向开始扩展时，我们有 $K_{\mathrm{II}}=K_{\mathrm{IIc}}$。于是，由式(2.4)和(2.7)得：

$$\tilde{\tau}_{\mathrm{cr}}=\frac{K_{\mathrm{IIc}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.8}$$

这里，K_{IIc} 是Ⅱ型裂纹开始发生滑开型扩展时应力强度因子 K_{II} 的临界值。

（2） Ⅰ型裂纹

对于Ⅰ型裂纹，式(2.2)取简单形式：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{2\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\sin\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2} \tag{2.9}$$

将它代入式(2.3)得：

$$\theta_0=\pm 70.5^\circ \tag{2.10}$$

这样，$\tilde{\tau}_{r\theta}$ 的最大值为：

$$|\tilde{\tau}_{r\theta}|_{\max}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{2\pi}}|\sin\theta_0|\cos\frac{\theta_0}{2} \tag{2.11}$$

当Ⅰ型裂纹发生滑开型扩展时，我们可以得到：

$$K_{\mathrm{Ic}}^{\mathrm{II}}=2.6K_{\mathrm{IIc}} \tag{2.12}$$

这里，$K_{\mathrm{Ic}}^{\mathrm{II}}$ 是Ⅰ型裂纹开始发生滑开型扩展时应力强度因子 K_{I} 的临界值，它与Ⅰ型裂纹开始发生张开型扩展时应力强度因子 K_{I} 的临界值 K_{Ic} 是不同的，两者不能混淆。

（3） 复合型裂纹

我们来研究单向均匀拉伸或压缩下无限板内的一中心斜裂纹。这个裂纹是一个Ⅰ-Ⅱ复

合型裂纹，它的应力强度因子为：

$$K_{\mathrm{I}}=\pm\sigma\sqrt{\pi a}\cdot\sin^2\beta,\qquad K_{\mathrm{II}}=\pm\sigma\sqrt{\pi a}\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta \tag{2.13}$$

式中：σ——拉或压应力，a——裂纹半长，β——裂纹角。

将式(2.13)中的 K_{I} 和 K_{II} 代入式(2.2)，我们就得到：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}=\pm\frac{\sigma\cdot\sqrt{\pi a}\cdot\sin^2\beta}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\left[\sin\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{ctg}\beta\cdot(3\cos\theta-1)\cos\frac{\theta}{2}\right] \tag{2.14}$$

应用本判据，就得到了确定 θ_0 的公式：

$$3\cos\theta_0-\mathrm{ctg}\beta\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cdot(9\cos\theta_0+5)=1 \tag{2.15}$$

和计算比值 $\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{IIc}}$ 的公式：

$$\frac{\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}}{K_{\mathrm{IIc}}}=\frac{2}{\sin^2\beta\cdot\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cdot[\sin\theta_0+\mathrm{ctg}\beta\cdot(3\cos\theta_0-1)]} \tag{2.16}$$

式中，$\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}$ 是中心斜裂纹开始发生滑开型扩展时应力 σ 的临界值，它与中心斜裂纹开始发生张开型扩展时应力 σ 的临界值 σ^{I}_{cr} 是不同的，两者不能混淆。θ_0 和 $\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{IIc}}$ 的计算值列在表 1 上。根据表 1 上 $\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{IIc}}$ 的计算值，我们可以断言：$\beta=50°$ 的中心斜裂纹最弱。

表 1　　$\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{IIc}}$ 和 θ_0 之值

β	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
θ_0	5.9°	9.4°	13.4°	18.4°	25.5°	35.6°	50.8°	70.5°
$\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{IIc}}$	3.084	2.256	1.936	1.852	1.934	2.261	2.448	2.600

三、最大剪应力判据

Ⅰ-Ⅱ复合型裂纹尖端附近的最大剪应力为：

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\cdot[K_{\mathrm{I}}^2\cdot\sin^2\theta+(4-3\sin^2\theta)\cdot K_{\mathrm{II}}^2+2K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{II}}\sin2\theta]^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

而最大剪应力因子为：

$$\tilde{\tau}_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot[K_{\mathrm{I}}^2\cdot\sin^2\theta+(4-3\sin^2\theta)\cdot K_{\mathrm{II}}^2+2K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{II}}\sin2\theta]^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

最大剪应力判据是：

1） 裂纹在 $\tilde{\tau}_{\max}$ 达到最大值的方向开始扩展。从而，确定开裂角 θ_0 的公式为：

$$\frac{\partial\tilde{\tau}_{\max}}{\partial\theta}=0,\qquad\frac{\partial^2\tilde{\tau}_{\max}}{\partial\theta^2}<0\qquad(\theta=\theta_0\text{ 时}) \tag{3.3}$$

2） 当最大剪应力因子的最大值达到临界值时，裂纹就开始扩展。于是，裂纹开始扩展条件是：

$$\tilde{\tau}_{\max}|_{\theta=\theta_0}=\tilde{\tau}_{cr} \tag{3.4}$$

下面，我们谈谈这个判据的应用。

(1) Ⅱ型裂纹

对于Ⅱ型裂纹，我们有

$$\tilde{\tau}_{\max}=\frac{K_{\mathrm{II}}}{2\sqrt{2\pi}}\cdot(4-3\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

利用式(3.3)和(3.4)，我们得到：

$$\theta_0=0,\qquad \tilde{\tau}_{cr}=\frac{K_{\mathrm{II}c}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.6}$$

(2) Ⅰ型裂纹

对于这个问题，式(3.2)取简单形式：

$$\tilde{\tau}_{\max}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\sin\theta \tag{3.7}$$

根据本判据，得到如下结果：

$$\theta_0=\pm\frac{\pi}{2},\qquad K^{\mathrm{I}}_{\mathrm{I}c}=2K_{\mathrm{I}c} \tag{3.8}$$

(3) 中心斜裂纹

对于中心斜裂纹单向拉伸或压缩情形，最大剪应力因子为：

$$\tilde{\tau}_{\max}=\pm\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\sin^2\beta\cdot[\sin^2\theta+\mathrm{ctg}^2\beta\cdot(4-3\sin^2\theta)+2\mathrm{ctg}\beta\cdot\sin2\theta]^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

将式(3.9)代入式(3.3)和(3.4)，我们就得到确定开裂角 θ_0 和临界应力 σ^{I}_{cr} 的公式分别为：

$$\mathrm{tg}2\theta_0=4\mathrm{ctg}\beta/(3\mathrm{ctg}^2\beta-1) \tag{3.10}$$

和

$$\frac{\sigma^{\mathrm{I}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}}{K_{\mathrm{I}c}}=\frac{2}{\sin^2\beta\cdot[\sin^2\theta_0+\mathrm{ctg}^2\beta\cdot(4-3\sin^2\theta_0)+2\mathrm{ctg}\beta\cdot\sin2\theta_0]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.11}$$

计算结果全列在表 2 上。从表 2 可以看出，$\beta=60^\circ$ 的中心斜裂纹最弱。

表 2 θ_0 和 $\sigma^{\mathrm{I}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{I}c}$ 之值

β	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
θ_0	13.5°	20.5°	27.8°	35.8°	45°	56.3°	71°	90°
$\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{II}c}$	3.046	2.193	1.837	1.700	1.691	1.780	1.864	2

四、歪形应变能密度判据

Ⅰ-Ⅱ复合型裂纹尖端附近的歪形应变能密度因子 S_d 为[3]：

$$S_d=c_{11}K_{\mathrm{I}}^2+2c_{12}K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{II}}+c_{22}K_{\mathrm{II}}^2 \tag{4.1}$$

式中诸系数 $c_{ij}(i,j=1,2)$ 为：

$$c_{11}=\frac{1}{16\pi\mu}\cdot(1+\cos\theta)(\kappa+1-\cos\theta)$$

$$\left.\begin{aligned}c_{12}&=\frac{1}{16\pi\mu}\cdot\sin\theta\cdot(2\cos\theta-\kappa)\\c_{22}&=\frac{1}{16\pi\mu}\cdot[\kappa(1-\cos\theta)+4-3\sin^2\theta]\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

式中：μ——剪切弹性模量；$\kappa=\frac{2}{3}\cdot(1-2\nu)^2$（平面应变）；$\kappa=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^2$（平面应力）；$\nu$ 是泊松比。

歪形应变能密度判据为：

1）裂纹在 S_d 取最大值的方向开始扩展，即

$$\frac{\partial S_d}{\partial\theta}=0,\qquad\frac{\partial^2 S_d}{\partial\theta^2}<0\qquad(\theta=\theta_0\text{ 时})\tag{4.3}$$

2）当歪形应变能密度因子的最大值达到临界值时，裂纹就开始扩展，即

$$S_{d\max}=S_d|_{\theta=\theta_0}=S_{dcr}\tag{4.4}$$

现在，我们将本判据应用于Ⅰ型裂纹、Ⅱ型裂纹和中心斜裂纹。

（1）Ⅱ型裂纹

对于这种情形，S_d 为：

$$S_d=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{16\pi\mu}\cdot[\kappa(1-\cos\theta)+4-3\sin^2\theta]\tag{4.5}$$

将式(4.5)代入式(4.3)和(4.4)得：

$$\theta_0=0,\qquad S_{dcr}=\frac{K_{\mathrm{Ic}}^2}{4\pi\mu}\tag{4.6}$$

（2）Ⅰ型裂纹

对于Ⅰ型裂纹，式(4.1)取如下形式：

$$S_d=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{16\pi\mu}(1+\cos\theta)(\kappa+1-\cos\theta)\tag{4.7}$$

应用本判据于式(4.7)，我们得到

$$\theta_0=\pm\cos^{-1}\left(\frac{\kappa}{2}\right)\tag{4.8}$$

和

$$K_{\mathrm{Ic}}^{\mathrm{I}}=\frac{2K_{\mathrm{Ic}}}{1+\kappa/2}\tag{4.9}$$

显然，θ_0 和 $K_{\mathrm{Ic}}^{\mathrm{I}}$ 都决定于泊松比 ν。计算结果列在表 3 上。

表 3　　θ_0 和比值 $K_{\mathrm{Ic}}^{\mathrm{II}}/K_{\mathrm{Ic}}$

泊松比 ν		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\pm\theta_0$	平面应变	70.5°	77.7°	82.1°	87°	89.2°	90°
	平面应力	70.5°	77.1°	81.5°	84.5°	86.5°	87.5°
$K_{\mathrm{Ic}}^{\mathrm{II}}/K_{\mathrm{IIc}}$	平面应变	1.2	1.65	1.79	1.90	1.97	2
	平面应力	1.2	1.64	1.74	1.82	1.88	1.93

(3)　中心斜裂纹

对于这种情形，将式(2.13)代入式(4.1)，然后利用式(4.3)和(4.4)，我们就得到确定开裂角 θ_0 的如下公式：

$$\left.\begin{array}{l}\kappa\cdot\sin\theta_0\cdot(\mathrm{ctg}^2\beta-1)+\sin2\theta_0\cdot(1-3\mathrm{ctg}^2\beta)\\ \quad+2\mathrm{ctg}\beta\cdot(\cos2\theta_0-\kappa\cos\theta_0)=0\\ \{\kappa\cos\theta_0\cdot(\mathrm{ctg}^2\beta-1)+2\cos2\theta_0\cdot(1-3\mathrm{ctg}^2\beta)\\ \quad-2\mathrm{ctg}\beta\cdot(2\sin2\theta_0-\kappa\sin\theta_0)\}<0\end{array}\right\}\tag{4.10}$$

和比值 $\sigma^{\mathrm{I}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{I}c}$ 的计算公式：

$$\frac{\sigma^{\mathrm{I}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}}{K_{\mathrm{I}c}}=2\cdot\sin^{-2}\beta\cdot\{\kappa(1+\cos\theta_0)+1-\cos^2\theta_0+2\mathrm{ctg}\beta\cdot(\sin2\theta_0-\kappa\sin\theta_0)$$
$$+\mathrm{ctg}^2\beta\cdot[\kappa(1-\cos\theta_0)+4-3\sin^2\theta_0]\}^{-\frac{1}{2}}\tag{4.11}$$

对于 $\nu=\frac{1}{3}$ 的材料，开裂角 θ_0 和 $\sigma^{\mathrm{I}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{I}c}$ 的计算结果都列在表4上。由表4上 $\sigma^{\mathrm{I}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{I}c}$ 的计算值可以看出，$\beta=40°$ 的中心斜裂纹最弱。

表 4　　θ_0 和 $\sigma^{\mathrm{I}}_{cr}\cdot\sqrt{\pi a}/K_{\mathrm{I}c}$ 之值（$\nu=1/3$）

β		20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
θ_0	平面应变	6.7°	11°	17°	26.5°	42.6°	62.5°	77°	87.9°
	平面应力	6.1°	10°	15.8°	24.6°	39.5°	59°	74.4°	85.2°
$\frac{\sigma^{\mathrm{II}}_{cr}\sqrt{\pi a}}{K_{\mathrm{II}c}}$	平面应变	3.058	2.217	1.408	1.519	1.670	1.754	1.859	1.930
	平面应力	3.053	2.205	1.343	1.504	1.637	1.721	1.803	1.850

五、结　　论

根据已有的张开型断裂的复合型脆断判据[3-4]和本文的滑开型断裂的复合型脆断判据，我们可以得到下列结论：

（1）　Ⅰ型裂纹有两个临界应力强度因子 $K_{\mathrm{I}c}$ 和 $K^{\mathrm{II}}_{\mathrm{I}c}$。当 $K^{\mathrm{II}}_{\mathrm{I}c}<K_{\mathrm{II}c}$ 时，Ⅰ型裂纹只会发生滑开型扩展；而当 $K^{\mathrm{II}}_{\mathrm{I}c}>K_{\mathrm{II}c}$ 时，Ⅰ型裂纹只会发生张开型扩展。根据式(3.8)和表3，我们可以取 $K^{\mathrm{II}}_{\mathrm{I}c}\approx2K_{\mathrm{I}c}$；这样，对于 $\nu=1/3$ 的材料，只要 $K_{\mathrm{II}c}>0.5K_{\mathrm{I}c}$，Ⅰ型裂纹就不会发生滑开型扩展。

（2）　Ⅱ型裂纹有两个临界应力强度因子 $K_{\mathrm{II}c}$ 和 $K^{\mathrm{I}}_{\mathrm{II}c}$，而 $K^{\mathrm{I}}_{\mathrm{II}c}$ 是Ⅱ型裂纹开始发生张开型扩展时应力强度因子 K_{I} 的临界值。当 $K^{\mathrm{I}}_{\mathrm{II}c}<K_{\mathrm{II}c}$ 时，Ⅱ型裂纹只能发生张开型扩展；而当 $K^{\mathrm{I}}_{\mathrm{II}c}>K_{\mathrm{II}c}$ 时，Ⅱ型裂纹只能发生滑开型扩展。根据文献[3]和[4]，我们得到如下结果：当 $\nu=1/3$ 时，应变能密度判据有 $K^{\mathrm{I}}_{\mathrm{II}c}=0.905K_{\mathrm{I}c}$，而周向应力应变乘积判据取 $K^{\mathrm{I}}_{\mathrm{II}c}=0.607K_{\mathrm{I}c}$。这样，对于 $\nu=1/3$ 的材料，如果 $K_{\mathrm{I}c}\leqslant K_{\mathrm{II}c}$，Ⅱ型裂纹就只会发生张开型扩展；如果 $K_{\mathrm{I}c}>1.11K_{\mathrm{II}c}$，则应变能密度判据予言Ⅱ型裂纹不会发生张开型扩展；这个予言适合于钛合金[1]。

（3） 单向拉伸或压缩下的中心斜裂纹有两个临界应力σ_{cr}^{I}和σ_{cr}^{II}。当$\sigma_{cr}^{I}<\sigma_{cr}^{II}$时，中心斜裂纹会发生张开型扩展；而当$\sigma_{cr}^{I}>\sigma_{cr}^{II}$时，中心斜裂纹会发生滑开型扩展。

参 考 文 献

[1] Liebowitz, H., J. Eftis, and D. L. Jones, Some recent theoretical and experimental developments in fracture mechanics, *Fracture* (1977), ICF4, Waterloo, Canada, 1, 695-723.

[2] Chisholm, D. B., D. SC. Dissertation, The George Washington University, Washington, D. C. (1975).

[3] Sih, G. C., Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems, *Int. Journ. of Fracture*, 10(1974), 305.

[4] 林拜松，复合型脆断的周向应力应变乘积判据，应用数学和力学，5，6(1984)，849—854.

The Mixed Mode Brittle Fracture Criteria in Sliding Mode Fracture

Lin Bai-song

(Central-South Institute Polytechnic University, Changsha)

Abstract

It is well known that the present mixed mode brittle fracture criteria are all the opening mode fracture criteria. We consider that mixed mode brittle fracture of sliding mode fracture exists, too. Hence we propose three criteria of mixed mode brittle fracture of sliding mode fracture the radial shearing stress criterion, the maximum shearing stress criterion and the distortional strain-energy-density criterion. Thus, we can completely explain the phenomena of brittle fracture in the structural elements with cracks.