应用数学和力学，第6卷第11期（1985年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

初生空化状态相似性问题

蔡树棠　　　　刘一心

（中国科技大学近代力学系）（黄河水利委员会水利科学研究所）

（1984年8月22日收到）

摘　要

在前文中[1]，讨论了热力学条件与初生空化的关系．在此基础上，引进空泡群的体积函数$z_0(r)$，代替前文中的能量方程式，讨论相似流动体系中的空化状态相似性问题．分析结果表明，在两个满足 Froude 准则的相似流动体系中，空化状态是不相似的，其初生空化数随几何比尺的增加而增加．理论结果与实践是符合的．

一、引　言

应用热力学平衡理论，讨论空化水流问题，求解平衡状态下的气-液相变条件，理论上讲，可以给出初生空化的判据，并且按照该判据，我们可以得到初生空化数。但实际上，该方程组在系统实验方面存在很大的困难。首先，流体质点的内能测量及精度无法满足要求，以至于用它来进行计算时会产生相当大的误差。其次，按前文的判据，只要在液相体系内，出现一个极小的气泡，就可能被认为流动体系达到了初生空化条件。然而，一个接近理论值的微空泡，在其运动过程中很难被觉察。因此，我们把前文中的能量方程，改为初生条件下空泡群体的体积比，即体积函数$z_0(r)$，达到某个定值，作为初生空化判别条件，而不是以某单个空泡的具体尺寸是否满足初生空化条件来判断空化初生与否。根据视觉或某确定的观测设备的分辨力，我们就能够讨论，在流动相似条件下，空化状态的相似性问题。

二、初生空化的替代条件

从物理学角度讨论空化现象，运用了能量方程、相平衡方程以及空化初生条件等，组成一个可解的封闭方程组，无疑是可行的。由于实际使用上的困难，而引进一个r的已知的体积函数$z_0(r)$。当初生空化发生时，我们有

$$z_0(r)=\frac{4}{3}\pi r^3 n \tag{2.1}$$

式中r为空泡半径，n为空泡数。由于较大的空泡易于分辨，所以$z_0(r)$随r增加而增加，但n也并非常数，在半径r增加时，n将减小。我们用有关体积函数$z_0(r)$的(2.1)式来代替以下能量方程

$$\bar{U}_0=\sum_j N_j^\alpha u_j^\alpha+\sum_j N_j^\beta u_j^\beta+\sum_j N_j^\alpha P^\alpha V_j^\alpha+\sum_j N_j^\beta P^\beta V_j^\beta$$

$$+4\pi r^2 nu-\sum_j N_j^0 P_0^\beta V_j^\beta \tag{2.1$'$}$$

其中 $u=\sigma-T\dfrac{d\sigma}{dT}$ (2.2)

式中符号与前文同。替代后方程式及未知数的数目不变，因此，仍然是一个可解的封闭方程组。

三、空化初生的条件方程

（1） 相平衡条件

假定空化发生时，空泡的膨胀过程并不迅速，基本上接近平衡状态，其相平衡方程为

$$RT[\phi_i+\ln(P^\alpha x_i^\alpha)]=u_i^\beta-TS_i^{*\beta}+P^\beta V_i^\beta+RT\ln x_i^\beta \qquad (i=1,\ 2,3) \tag{3.1}$$

（2） 初生空化判据

根据前文，有

$$P^\alpha r=\frac{cRT}{\pi\sqrt{2}\,N_a D^2} \tag{3.2}$$

式中 N_a 为 Avogadro 常数。

（3） 力平衡条件

$$P^\alpha-P^\beta=\frac{2\sigma}{r} \tag{3.3}$$

或

$$P^\beta=P^\alpha\left(1-\frac{2\sqrt{2}\,\pi\sigma N_a D^2}{cRT}\right) \tag{3.3$'$}$$

（4） 空泡体积最小条件

$$n\frac{4}{3}\pi r^3=z_0(r) \tag{3.4}$$

（5） 物态方程

$$P_i^\alpha n\frac{4}{3}\pi r^3=N_i^\alpha RT \qquad (i=1,2,3) \tag{3.5}$$

式中 $P_i^\alpha=P^\alpha\cdot x_i^\alpha$，将(3.5)式改写成为

$$P_i^\alpha z_0(r)=N_i^\alpha RT \tag{3.5$'$}$$

及

$$4\pi r^2 n=\frac{3\sqrt{2}\,\pi N^\alpha N_a D^2}{c} \tag{3.5$''$}$$

（6） 各种分子数守恒条件

$$N_i^{\alpha}+N_i^{\beta}=N_i^0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{3.6}$$

以上10个方程式相应于$N_i^{\alpha}(i=1,\ 2,\ 3)$，$N_i^{\beta}(i=1,\ 2,\ 3)$，$P^{\alpha}$，$P^{\beta}$，$r$及$n$共10个未知数，所以问题是可解的。上式中$N_i^0$是初生空化点处的值，不同的比尺，不同形状的物体，该值是不同的。

四、初生空化条件下的解

将(3.1)式写为

$$P^{\alpha}x_i^{\alpha}=P_i^{\alpha}=k_i x_i^{\beta}$$

式中k_i为亨利（Henry）系数

$$k_i=\exp\left[\frac{u_i^{\beta}-TS_i^{*\beta}+P^{\beta}V_i^{\beta}}{RT}-\phi_i\right] \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{4.1}$$

代入(3.2)得

$$r\sum_i k_i x_i^{\beta}=\frac{cRT}{\pi\sqrt{2}\,N_a D^2} \tag{4.2}$$

将(3.6)代入(3.5)′及(4.2)，有

$$k_i\frac{N_i^0-N_i^{\alpha}}{N^0-N^{\alpha}}z_0(r)=N_i^{\alpha}RT \tag{4.3}$$

式中 $N^0=\sum_i N_i^0$，$N^{\alpha}=\sum_i N_i^{\alpha}$，且由于$N^0\approx N_1^0\approx N_1^{\beta}$并接近一常数及$N^0\gg N_2^0$，$N_3^0$，

所以

$$N^{\beta}=N^0-N^{\alpha}\approx N^0 \tag{4.4}$$

(4.3)可写为

$$k_i(N_i^0-N_i^{\alpha})z_0(r)=N^0N_i^{\alpha}RT$$

$$N_i^{\alpha}[k_i z_0(r)+N^0RT]=k_iN_i^0z_0(r)$$

得：

$$N_i^{\alpha}=\frac{k_iN_i^0z_0(r)}{N^0RT+k_iz_0(r)} \tag{4.5}$$

$$N_i^{\beta}=N_i^0-N_i^{\alpha}=\frac{N_i^0N^0RT}{N^0RT+k_iz_0(r)} \tag{4.6}$$

$$x_i^{\beta}=\frac{N_i^{\beta}}{N^{\beta}}=\frac{N_i^0RT}{N^0RT+k_iz_0(r)} \tag{4.7}$$

$$P_i^{\alpha}=k_ix_i^{\beta}=\frac{k_iN_i^0RT}{N^0RT+k_iz_0(r)} \tag{4.8}$$

将(4.7)式代入(4.2)式，得到确定r的方程式

$$r=\frac{c}{\sqrt{2}\,\pi N_aD^2\left[\sum_i\frac{k_iN_i^0}{N^0RT+k_iz_0(r)}\right]} \tag{4.9}$$

及

$$P^{\alpha}=\sum_{i}\frac{k_i N_i^0 RT}{N^0 RT+k_i z_0(r)} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}P^{\beta}&=P^{\alpha}\left(1-\frac{\pi 2\sqrt{2}\,\sigma N_a D^2}{cRT}\right)\\&=\left[\sum_{i}\frac{k_i N_i^0 RT}{N^0 RT+k_i z_0(r)}\right]\left(1-\frac{\pi 2\sqrt{2}\,\sigma N_a D^2}{cRT}\right)\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}n&=\frac{z_0(r)}{4\pi r^3/3}\\&=\frac{3z_0(r)}{4\pi}\left[\frac{\sqrt{2}\,\pi N_a D^2\sum_{i}\frac{k_i N_i^0}{N^0 RT+k_i z_0(r)}}{c^3}\right]^3\end{aligned} \tag{4.12}$$

在正常视觉分辨率的条件下，欲在液相流体内发现空化，必须是空泡的数目足够多，或者空泡足够大，即在空泡个体较小时，需要较多的空泡个数。上式中$n(r)$是随空泡半径r的增加而减小，$z_0(r)$则是随r增加的函数。

由于空气在水中的溶解度较小 故有

$$x_1^{\beta}\approx 1$$

当$z_0(r)$小到可以忽略时，x_2^{β}和x_3^{β}与N_2^0及N_3^0成正比，即氧($i=2$)，氮($i=3$)的溶解度与来流的初始压力P_0成正比。因此

$$P_1^{\alpha}=P^{\alpha}x_1^{\alpha}\approx P_s \tag{4.13}$$

对于$i=2$，$i=3$，则有

$$\left.\begin{aligned}P_2^{\alpha}&=P^{\alpha}x_2^{\alpha}\approx k_2 x_2^{\beta}\\P_3^{\alpha}&=P^{\alpha}x_3^{\alpha}\approx k_3 x_3^{\beta}\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

式中k_2，k_3分别为氧、氮的亨利系数。令

$$P^{*\alpha}=P^{\alpha}x_2^{\alpha}+P^{\alpha}x_3^{\alpha} \tag{4.15}$$

$$N^{*\alpha}=N_2^{\alpha}+N_3^{\alpha} \tag{4.16}$$

有

$$\begin{aligned}P^{*\beta}&=P^{*\alpha}\left(1-\frac{\pi 2\sqrt{2}\,\sigma N_a D^2}{cRT}\right)\\P^{*\alpha}&=N^{*\alpha}RT\end{aligned} \tag{4.17}$$

由于$x_1^{\beta}\approx 1$，$P_1^{\alpha}\approx P_s$，于是

$$\begin{aligned}P^{\alpha}&=\sum_{j}P^{\alpha}x_j^{\alpha}\approx P^{\alpha}x_2^{\alpha}+P^{\alpha}x_3^{\alpha}+P_s\\&=P^{*\alpha}+P_s\end{aligned} \tag{4.18}$$

五、初生空化状态的相似性

本文仅讨论在满足 Froude 准则的相似流动中，初生空化状态相似性问题。即当

$$F_r=\frac{v_m^2}{L_m g_m}=\frac{v_P^2}{L_P g_P} \tag{5.1}$$

式中F_r为弗汝德数 (Froude number); v为流速; L为线尺度; g为重力加速度; 足标m和P分别表示二个不同的流动体系，若(5.1)式满足，则"m"和"P"两流动体系保持流态相似。且

$$\left.\begin{array}{ll} L_P:L_m=M, & v_P:v_m=\sqrt{M} \\ P_{0P}:P_{0m}=M, & (N_i^0)_P:(N_i^0)_m=M \quad (i=2,3) \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

若已知"m"流动体系的初生空化数K_{im}为

$$\begin{aligned} K_{im}&=\frac{P_m^\beta-P_s}{\rho v_m^2/2} \\ &\approx\frac{(P_m^{*a}+P_s)\left(1-\dfrac{2\sqrt{2}\,\pi\sigma N_a D^2}{cRT}\right)-P_s}{\rho v_m^2/2} \\ &\approx\frac{\left[\sum\limits_{i=2}^{3}\dfrac{k_i N_{im}^0 RT}{N^0RT+k_i z_0(r)_m}+P_s\right]\left(1-\dfrac{2\sqrt{2}\,\pi\sigma N_a D^2}{cRT}\right)-P_s}{\rho v_m^2/2} \\ &=\frac{P_m^{*\beta}}{\rho v_m^2/2}-\frac{P_s}{\rho v_m^2/2}\,\frac{2\sqrt{2}\,\pi\sigma N_a D^2}{cRT} \end{aligned} \tag{5.3}$$

则与"m"保持流动相似的"P"流动体系的初生空化数K_{iP}应为:

$$K_{iP}=\frac{\left[M\sum\limits_{i=2}^{3}\dfrac{k_i N_{im}^0 RT}{N^0RT+k_i z_0(r)_P}+P_s\right]\left(1-\dfrac{\pi 2\sqrt{2}\,\sigma N_a D^2}{cRT}\right)-P_s}{\rho M v_m^2/2} \tag{5.4}$$

式中$z_0(r)_m$与$z_0(r)_P$分别为"m"和"P"流动体系的空泡体积函数。$z_0(r)$随流体压强P_0的增加而增加。

由(5.3), (5.4)可得

$$K_{iP}=\frac{(M+\Delta M)\sum\limits_{i=2}^{3}\dfrac{k_i N_{im}^0 RT}{N^0RT+k_i z_0(r)_m}\left(1-\dfrac{\pi 2\sqrt{2}\,N_a D^2}{cRT}\right)}{\rho M v_m^2/2}-\frac{P_s\left(\dfrac{\pi 2\sqrt{2}\,\sigma N_a D^2}{cRT}\right)}{\rho M v_m^2/2} \tag{5.5}$$

$$K_{iP}=\frac{M+\Delta M}{M}\cdot\frac{\rho_m^{*\beta}}{\rho v_m^2/2}-\frac{1}{M}\cdot\frac{P_s\cdot\dfrac{\pi 2\sqrt{2}\,\sigma N_a D^2}{cRT}}{\rho v_m^2/2} \tag{5.6}$$

$$\frac{M+\Delta M}{M}=\frac{\sum\limits_{i=2}^{3}\dfrac{k_i N_{im}^0 RT}{N^0RT+k_i z_0(r)_P}}{\sum\limits_{i=2}^{3}\dfrac{k_i N_{im}^0 RT}{N_0RT+k_i z_0(r)_m}} \tag{5.7}$$

若令$M>1$则有

$$z_0(r)_P<z_0(r)_m$$

$$\sum_{i=2}^{3}\frac{k_i N_{im}^0 RT}{N^0RT+k_i z_0(r)_P}>\sum_{i=2}^{3}\frac{k_i N_{im}^0 RT}{N^0RT+k_i z_0(r)_m} \tag{5.8}$$

故有

$$\frac{M+\Delta M}{M}>1 \tag{5.9}$$

及

$$\frac{K_{iP}}{K_{im}}>1 \quad 或 \quad K_{iP}>K_{im} \tag{5.10}$$

六、讨　论

根据热力学原理，讨论空化现象及其状态相似性问题，分析结果表明：若二个流动体系保持运动相似、几何相似，则其空化状态不相似。且初生空化数 K_i 随几何比尺M的增加而增加。

通常，采用正态物理模型进行模拟实验以预报原型工程中可能发生的空化现象及状态，这里，我们把 “m” 流动体系视为模型水流，“P” 作为原型工程，(5.10) 式表明，原型工程水流较模型实验更易于发生空化。例如，当模型实验中出现初生空化状态，则相应的原型工程可能处于空化充分发育期。事实上，空化相似性研究内容之一，是探讨如何由模型实验来予报原型工程空化的问题。理论分析结果与实践是相符的。

参 考 文 献*

[1] 蔡树棠、刘一心，热力学理论与空化现象，应用数学和力学，4，6(1983年11月)，737—742.

* 其他参考文献同[1]

Similarity Problem of Inceptive Cavitation

Tsai Shu-tang

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Liu Yi-xin

(Institute of Hydraulic Research, Yellow River Conservancy Commission, Zhengzhou)

Abstract

In the preceding article[1], the relation between thermodynamics condition and inceptive cavitation stage has been discussed. In this paper, we try to introduce the volume function of inceptive cavitation bubbles, $z_0(r)$, instead of the energy equation used in the reference[1], for discussing cavitation similarity problem in similar flow systems. Under this condition, theoretical result shows that the inception cavitation number K_i increases with a rise of geometry linear scale. In other words, if two flow systems are kept with similar pattern and liquid, it is impossible to satisfy the cavitation similarity. This conclusion accords with practice.