

# 波动方程的边界单元法\*

顾卫华

(冶金部建筑研究总院, 1984年10月10日收到)

## 摘 要

本文从三维波动方程的 Kirchhoff 积分公式出发, 首先经离散化给出无限均匀介质中的边界单元法公式。其后, 在引入了波在不同介质面和自由面上的反射、折射系数以后, 给出了三维波动方程在分区均匀介质中的边界单元法公式。

## 一、前 言

1978年, C. A. Brebbia 正式使用了“边界单元法(BEM)”这一名称<sup>[1]</sup>; 它的历史可以追溯到本世纪六十年代以来, 对于边界积分方程(BIE)的研究<sup>[2]</sup>。边界单元法以它明显的优越性, 引起了许多学者的重视。它的发展速度极快, 应用范围正在不断推广<sup>[3]</sup>。

边界单元法主要适用于区域或场的初边值问题, 基本思想是建立区域内任一点状态与边界状态的关系。它可以降低所要解决的问题的维数; 从而提高计算速度和精度, 使以前一些无法解决的大型问题得以解决。

本文直接从三维波动方程的 Kirchhoff 积分公式出发, 经离散化给出了无限均匀介质中的边界单元法公式。在离散化的过程中, 提出一种常数四边形单元和等参数五面体单元联合求解的过程; 既较简单地完成了  $P$  波与  $S$  波在边界处波函数的分离, 又避开了在分区均匀介质中较为复杂的角点处的波动问题; 为把公式推广于分区均匀介质打下了基础。接着, 在引入了波在不同介质面和自由面上的反射、折射系数以后, 给出了三维波动方程在分区均匀介质中的边界单元法公式。这一方法可以直接应用于地震工程、基础振动等有关研究领域。

## 二、波阵面上的运动条件及沿任意方向的导函数

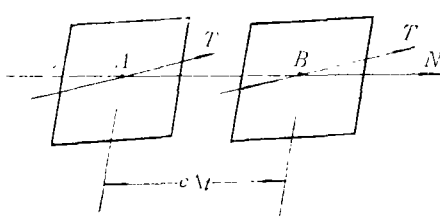
首先假定无限域内所有扰动都是以等幅平面波的形式传播的(如图1所示)。在不考虑波的衰减的情况下,  $B$ 点  $t+\Delta t$  时刻的波函数值等于  $A$ 点  $t$  时刻的波函数值, 即:

$$H(t+\Delta t, x+c\Delta t l', y+c\Delta t m', z+c\Delta t n')=H(t, x, y, z) \quad (2.1)$$

其中:  $l', m', n'$  为波线  $N$  的方向余弦。

当  $\Delta t$  足够小时, (2.1) 式可以近似为:

\* 钱伟长推荐。



$$H(t, x, y, z) + \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial H}{\partial N} c \Delta t \approx H(t, x, y, z) \quad (2.2)$$

由此得到波阵面上的运动条件为:

$$\frac{\partial H}{\partial N} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.3)$$

图 1 平面波的传播

(2.3) 式类似于钱伟长、叶开沅教授所给出的扰动区与未扰动区分界面上的运动条件<sup>[4]</sup>。因此,在不考虑波的衰减的条件下,波前处的运动条件可以适用于任意波阵面。

设波阵面上任一切线方向为  $T(l; m; n)$ , 则有:

$$l'l' + m'm' + n'n' = 0 \quad (2.4)$$

由于  $H$  在同一波阵面上等值, 所以有:

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial x} l' + \frac{\partial H}{\partial y} m' + \frac{\partial H}{\partial z} n' = 0 \quad (2.5)$$

对比公式 (2.4)、(2.5) 有:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{l'} = \frac{\partial H}{\partial y} \frac{1}{m'} = \frac{\partial H}{\partial z} \frac{1}{n'} = k \quad (2.6)$$

因此,波函数  $H$  沿任一方向  $n(l, m, n)$  的导函数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial n} &= \frac{\partial H}{\partial x} l + \frac{\partial H}{\partial y} m + \frac{\partial H}{\partial z} n = k(l'l + m'm + n'n) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} (l'l + m'm + n'n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

### 三、Kirchhoff 积分公式的离散化——边界单元法公式的建立

Kirchhoff 积分公式为:

$$H_P = \frac{1}{d} \iint_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial H^\circ}{\partial n} + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial H^\circ}{\partial t} - H^\circ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (3.1)$$

其中:  $H^\circ = H(t-r/c)$ ,  $r = \sqrt{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 + (z-z_P)^2}$ ,  $d$  为积分常数。

把  $S$  面上的挠动, 理解为一个一个独立的次级点波源, 则其对于域内任一点  $P$  的波线方向余弦为:

$$l' = (x_P - x)/B, \quad m' = (y_P - y)/B, \quad n' = (z_P - z)/B \quad (3.2)$$

其中:  $B = \sqrt{(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2 + (z_P - z)^2}$ 。因此有:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} l + \frac{\partial r}{\partial y} m + \frac{\partial r}{\partial z} n = \frac{x-x_P}{B} l + \frac{y-y_P}{B} m + \frac{z-z_P}{B} n = -f \quad (3.3)$$

其中:  $f = l'l + m'm + n'n$ 。

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{r^2} f \quad (3.4)$$

把 (2.7)、(3.3)、(3.4) 式代入 (3.1) 式可得:

$$H_P = \frac{1}{d} \iint_S \left[ -\frac{2}{cr} \frac{\partial H^*}{\partial t} - \frac{1}{r^2} H^* \right] f dS \quad (3.5)$$

把  $S$  面划分为  $k$  个单元, 上式可以写为:

$$H_P = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \left[ -\frac{2}{cr} \frac{\partial H^*}{\partial t} - \frac{1}{r^2} H^* \right] f_i dS \quad (3.6)$$

其中:  $f_i = l' l_i + m' m_i + n' n_i$ .

划分单元足够多时, 则  $S_i$  面可近似为一平面, 此时  $l_i, m_i, n_i$  为常量.

用  $r_0$  表示单元中点到  $P$  点的距离, 且令:

$$t_0 = t - \frac{r_0}{c}, \quad \Delta t = \frac{r_0 - r}{c}$$

$$\text{则} \quad H\left(t - \frac{r}{c}\right) = H\left(t - \frac{r_0}{c} + \frac{r_0 - r}{c}\right) = H(t_0 + \Delta t) \quad (3.7)$$

对  $H$  作泰勒级数展开, 并在线性加速度假定下, 有:

$$\left. \begin{aligned} H\left(t - \frac{r}{c}\right) &= H(t_0) + \dot{H}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{H}(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{H}(t_0)\Delta t^3 \\ \dot{H}\left(t - \frac{r}{c}\right) &= \dot{H}(t_0) + \ddot{H}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\dddot{H}(t_0)\Delta t^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

将(3.8)式代入(3.6)式有:

$$\begin{aligned} H_P &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \left\{ -\frac{2}{cr} \left[ \dot{H}(t_0) + \ddot{H}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\dddot{H}(t_0)\Delta t^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \left[ H(t_0) + \dot{H}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{H}(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{H}(t_0)\Delta t^3 \right] \right\} f_i dS \\ &= -\frac{1}{d} \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \left[ \frac{1}{r^2} f_i H(t_0) + \left( \frac{1}{r^2} f_i \Delta t + \frac{2}{cr} f_i \right) \dot{H}(t_0) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2r^2} f_i \Delta t^2 + \frac{2}{cr} f_i \Delta t \right) \ddot{H}(t_0) + \left( \frac{1}{6r^2} f_i \Delta t^3 + \frac{1}{cr} f_i \Delta t^2 \right) \dddot{H}(t_0) \right] dS \end{aligned} \quad (3.9)$$

近似假定  $H(t_0), \dot{H}(t_0), \ddot{H}(t_0), \dddot{H}(t_0)$  在每一单元上为常数, 即常数单元假定, 则(3.9)式为:

$$H_P = -\frac{1}{d} \sum_{i=1}^k [A_{i1} H(t_0) + A_{i2} \dot{H}(t_0) + A_{i3} \ddot{H}(t_0) + A_{i4} \dddot{H}(t_0)] \quad (3.10)$$

其中:  $A_{i1} = \iint_{S_i} \frac{1}{r^2} f_i dS$

$$\begin{aligned} A_{i2} &= \iint_{S_i} \left( \frac{1}{r^2} f_i \Delta t + \frac{2}{cr} f_i \right) dS = \iint_{S_i} \left( \frac{f_i}{r^2} \frac{r_0 - r}{c} + \frac{2f_i}{cr} \right) dS \\ &= \frac{r_0}{c} \iint_{S_i} \frac{1}{r^2} f_i dS + \iint_{S_i} \frac{1}{cr} f_i dS = \frac{1}{c} (r_0 A_{i1} + B_{i1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{其中: } B_{i1} = \iint_{S_i} \frac{1}{r} f_i dS \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} A_{i3} &= \iint_{S_i} \left( \frac{f_i}{r^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{2}{cr} f_i \Delta t \right) dS = \iint_{S_i} \left[ \frac{1}{2r^2} (r_0^2 - 2r_0 r + r^2) + \frac{2}{cr} (r_0 - r) \right] f_i dS \\ &= \iint_{S_i} \left( \frac{r_0^2}{2c^2 r^2} + \frac{r_0}{c^2 r} - \frac{3}{2c^2} \right) f_i dS \\ &= \frac{r_0^2}{2c^2} \iint_{S_i} \frac{f_i}{r^2} dS + \frac{r_0}{c^2} \iint_{S_i} \frac{f_i}{r} dS - \frac{3}{2c^2} \iint_{S_i} f_i dS \\ &= \frac{r_0^2}{2c^2} A_{i1} + \frac{r_0}{c^2} B_{i1} - \frac{3}{2c^2} B_{i2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\text{其中: } B_{i2} = \iint_{S_i} f_i dS \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} A_{i4} &= \iint_{S_i} \left( \frac{1}{6r^2} \Delta t^3 + \frac{1}{cr} \Delta t^2 \right) f_i dS \\ &= \iint_{S_i} \frac{f_i}{c^3} \left[ \frac{1}{6r^2} (r_0 - r)^3 + \frac{1}{r} (r_0 - r)^2 \right] dS \\ &= \iint_{S_i} \frac{f_i}{c^3} \left[ \frac{1}{6r^2} (r_0^3 - 3r_0^2 r + 3r_0 r^2 - r^3) + \frac{1}{r} (r_0^2 - 2r_0 r + r^2) \right] dS \\ &= \iint_{S_i} \left( \frac{r_0^3}{6c^3} \frac{f_i}{r^2} + \frac{r_0^2}{2c^3} \frac{f_i}{r} - \frac{3r_0}{2c^3} f_i + \frac{5}{6c^3} f_i r \right) dS \\ &= \frac{r_0^3}{6c^3} A_{i1} + \frac{r_0^2}{2c^3} B_{i1} - \frac{3r_0}{2c^3} B_{i2} + \frac{5}{6c^3} B_{i3} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{其中: } B_{i3} = \iint_{S_i} f_i r dS \quad (3.16)$$

在局部坐标中 (如图 2 所示), 有向量:

$$\vec{dk} = \left[ \frac{\partial x}{\partial k} dk, \frac{\partial y}{\partial k} dk, \frac{\partial z}{\partial k} dk \right]$$

$$\vec{dh} = \left[ \frac{\partial x}{\partial h} dh, \frac{\partial y}{\partial h} dh, \frac{\partial z}{\partial h} dh \right]$$

因此:

$$dS = |\vec{dk} \times \vec{dh}| = |\vec{a} \times \vec{b}| dk dh \quad (3.17)$$

$$\text{其中: } \vec{a} = \left[ \frac{\partial x}{\partial k}, \frac{\partial y}{\partial k}, \frac{\partial z}{\partial k} \right], \quad \vec{b} = \left[ \frac{\partial x}{\partial h}, \frac{\partial y}{\partial h}, \frac{\partial z}{\partial h} \right].$$

所以:

$$\left. \begin{aligned} A_{i1} &= \iint_{S_i} \frac{1}{r^2} f_i |\vec{a} \times \vec{b}| dk dh, & B_{i1} &= \iint_{S_i} \frac{1}{r} f_i |\vec{a} \times \vec{b}| dk dh \\ B_{i2} &= \iint_{S_i} f_i |\vec{a} \times \vec{b}| dk dh, & B_{i3} &= \iint_{S_i} f_i r |\vec{a} \times \vec{b}| dk dh \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

(3.18)式可利用高斯积分进行近似计算。

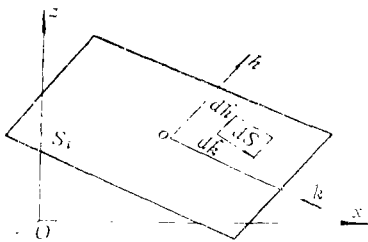


图2 平面局部坐标

### 四、分区均匀介质中的边界单元法公式

弹性波在遇到不同介质分界面或自由表面时，将发生波的反射与折射现象。当入射波为单一的P波或S波时，反、折射波可能同时具有P波和S波。

三维平面波在某一平面界面上的反、折射性质，可以通过研究同时垂直于波阵面和界面的平面上的二维波的反射、折射性质而得到。S波位移矢量可以分解为此平面内和垂直于此平面的矢量分别进行考虑；即SV波和SH波。

反、折射系数的推导一般是在正弦波的假定下完成的，但因为这些系数与波的振动频率无关，因此，可以证明其同样适用于非正弦波的情况<sup>[5]</sup>。

Kirchhoff积分公式可以理解为惠更斯原理的数学表达式<sup>[6]</sup>，边界S上的边界条件可以理解为次级点波源。在无限均匀介质中，波的传播方向、振动形式等波动特性是由真正的波动源所决定的；而在分区均匀介质中，波在自由面和不同介质面上将产生反射、折射。每一个经过反射和折射后的波动都将具有各自的波动特性；因此，就必须把它们作为真正的次级点波源看待。经过S面的离散化，可以近似地把每一个单元 $S_i$ 中点的挠动作为次级点波源，它们在各自域内将产生波动。在进行反射、折射计算的时候，各个点波源（单元 $S_i$ ）引起的波动应该分别逐个进行；而最后的迭加值将作为新的边界条件。

对于q域内任意点P，t时刻的位移矢量可以写为：

$$H_P^q = -\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n_q} [A_{i1}H_i(t_0) + A_{i2}\dot{H}_i(t_0) + A_{i3}\ddot{H}_i(t_0) + A_{i4}\ddot{\ddot{H}}_i(t_0)] = -\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n_q} F_i \tag{4.1}$$

其中： $n_q$ 为q域的边界单元总数， $H=[u \ v \ w]$ 。

若P点在边界上，则有：

$$H_P^q = -\frac{1}{d} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq P}}^{n_q} F_i' - \frac{1}{d} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq P}}^{n_q'} F_j'' \tag{4.2}$$

其中： $n_q'$ 为邻域 $q'$ 的边界单元（作点波源看待）总数， $F_i'$ 为本域中i单元扰动在P点处的反射结果， $F_j''$ 为邻域中j单元扰动在P点处的折射结果，因此：

$$\left. \begin{aligned} F_i' &= R_i' [A_{i1}h_i(t_0) + A_{i2}\dot{h}_i(t_0) + A_{i3}\ddot{h}_i(t_0) + A_{i4}\ddot{\ddot{h}}_i(t_0)] \cdot \vec{n}_i \\ F_j'' &= R_j'' [A_{j1}h_j(t_0) + A_{j2}\dot{h}_j(t_0) + A_{j3}\ddot{h}_j(t_0) + A_{j4}\ddot{\ddot{h}}_j(t_0)] \cdot \vec{n}_j \end{aligned} \right\} \tag{4.3}$$

其中： $R_i'$ 表示反射系数； $R_j''$ 表示折射系数； $h, \dot{h}, \ddot{h}, \ddot{\ddot{h}}$ 为对应于P波或S波的波函数值； $\vec{n}_i, \vec{n}_j$ 分别为反射与折射波位移的方向余弦向量。

利用公式(4.2)，任一边界P单元t时刻的波函数值则可根据同一域及相邻域上其它边界单元上 $t-r_0/c$ 时刻的波函数值而求得。

### 五、关于非平面波

假定点波源C点（如图3所示）的扰动值为 $\theta, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ ，其将在R域内产生向各个方向传播的非等幅波，波阵面A如图中实线所示。为了得到某一波线方向N上的扰动传播情况，可以把波阵面A看作为沿所研究方向传播的平面波阵面a。并假定波函数在每一波阵

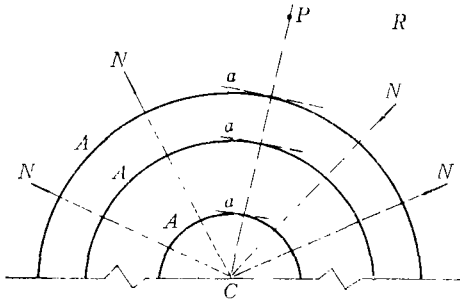


图3 非平面波的传播

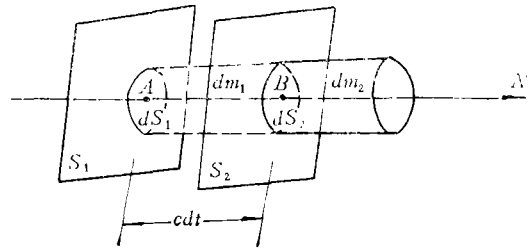


图4 波动中的能量传播

面  $a$  上等幅, 其幅值为波线与原波阵面  $A$  交点上的值. 域内任一点  $P$  处的挠动情况, 用此平面波假定所得到的结果与原扰动 (由点波源  $C$  所引起的挠动) 显然是一致的. 因此, 在所研究的波线方向足够多的情况下, 就可以得到由点波源  $C$  所引起的整个域  $R$  的波动情况. 而不同方向传播的等幅平面波在  $C$  点处都应该满足原扰动条件.

(a) 等幅平面波波阵面上的动力条件:

在与波线相垂直的平面  $S_1, S_2$  上作两个小圆柱体  $dm_1, dm_2$  (如图 4 所示).

假定  $t-dt$  时刻, 波的前阵面与  $S_1$  平面重合; 此时, 在  $dS_1$  上作用有外力  $X', Y', Z'$ . 其对  $dm_1$  的冲量为<sup>[4]</sup>:

$$-X'dS_1dt, -Y'dS_1dt, -Z'dS_1dt \quad (5.1)$$

其中负号表示应力矢量方向与  $N$  方向相反.

$dm_1$  由此获得的动量为:

$$\rho dS_1 c dt \frac{\partial u'}{\partial t}, \rho dS_1 c dt \frac{\partial v'}{\partial t}, \rho dS_1 c dt \frac{\partial w'}{\partial t} \quad (5.2)$$

动量等于冲量, 所以有:

$$\left. \begin{aligned} -X'dS_1dt &= \rho dS_1 c dt \frac{\partial u'}{\partial t} \\ -Y'dS_1dt &= \rho dS_1 c dt \frac{\partial v'}{\partial t} \\ -Z'dS_1dt &= \rho dS_1 c dt \frac{\partial w'}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$t$  时刻, 波的前阵面与  $S_2$  平面重合, 此时,  $dS_2$  上的应力状态相同于  $dS_1$  面在  $t-dt$  时刻的应力状态; 即此截面上的外力为  $X', Y', Z'$ . 而在  $dS_1$  面上, 此时外力为  $X, Y, Z$ . 这些外力对  $dm_1$  的冲量为:

$$-XdS_1dt + X'dS_2dt, -YdS_1dt + Y'dS_2dt, -ZdS_1dt + Z'dS_2dt \quad (5.4)$$

$dm_1$  由此冲量获得的动量为:

$$\rho dS_1 c dt \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u'}{\partial t} \right), \rho dS_1 c dt \left( \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v'}{\partial t} \right), \rho dS_1 c dt \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w'}{\partial t} \right) \quad (5.5)$$

根据动量等于冲量, 并考虑到 (5.3) 式关系, 可得:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = -X, \quad \rho c \frac{\partial v}{\partial t} = -Y, \quad \rho c \frac{\partial w}{\partial t} = -Z \quad (5.6)$$

此时,  $dS_2$  面上的外力对  $dm_2$  的冲量为:

$$-X'dS_2dt, -Y'dS_2dt, -Z'dS_2dt \quad (5.7)$$

$dm_2$  由此获得的动量为:

$$\rho dS_2 c dt \frac{\partial u'}{\partial t}, \rho dS_2 c dt \frac{\partial v'}{\partial t}, \rho dS_2 c dt \frac{\partial w'}{\partial t} \quad (5.8)$$

此式表明  $dm_1$  在  $t-dt$  时刻由  $dS_1$  面上的冲量而获得的动量, 在  $t$  时刻传给了  $dm_2$ . 沿波线作一串小圆柱体, 用上述方法即可描述出波动中的能量传递过程.

$t$  时刻,  $dm_1$  圆柱体侧面上亦有外力存在, 但在等幅平面波的情况下, 此外力对  $dm_1$  的冲量和为零.

设  $S$  为平面  $S_1$  与  $S_2$  之间任意一个与  $N$  垂直的平面, 并构筑坐标系  $koh, hoN, Nok$ ,  $k, h$  轴在  $S$  平面内,  $N$  即为波线方向;  $U, V, W$  为相应的位移分量. 由等幅条件可得  $U, V, W$  在  $S$  面上为常量. 因此:

$$\frac{\partial U}{\partial k} = \frac{\partial U}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial k} = \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial W}{\partial k} = \frac{\partial W}{\partial h} = 0 \quad (5.9)$$

设外力  $\vec{F} = [F_k, F_h, F_N]$ .

其中:

$$F_k = \sigma_k l + \tau_{kh} m + \tau_{Nk} n, \quad F_h = \tau_{kh} l + \sigma_h m + \tau_{Nh} n, \quad F_N = \tau_{kN} l + \tau_{hN} m + \sigma_N n \quad (5.10)$$

圆柱体侧面外法线向量为

$$\vec{n} = [l, m, 0] \quad (5.11)$$

根据虎克定律, 并考虑 (5.11) 式关系可得:

$$F_k = \lambda \frac{\partial W}{\partial N} l, \quad F_h = \lambda \frac{\partial W}{\partial N} m, \quad F_N = \mu \frac{\partial U}{\partial N} l + \mu \frac{\partial V}{\partial N} m \quad (5.12)$$

其中:  $\lambda, \mu$  为拉梅常数.

沿  $k$  方向的冲量为:

$$\oint_L F_k dL dt = dt \oint_L \lambda \frac{\partial W}{\partial N} l dL = dt \int_0^{2\pi} \lambda \frac{\partial W}{\partial N} \cos \alpha \cdot r d\alpha \quad (5.13)$$

其中:  $r$  为  $dS$  的半径.

由于任一垂直于  $N$  方向平面上的  $U, V, W$  为常量, 所以在  $S$  平面上有:

$$\frac{\partial U}{\partial N} = \text{const}, \quad \frac{\partial V}{\partial N} = \text{const}, \quad \frac{\partial W}{\partial N} = \text{const} \quad (5.14)$$

因此:

$$\oint_L F_k dL dt = dt \lambda \frac{\partial W}{\partial N} r \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = 0 \quad (5.15)$$

类此可得, 沿  $h$  及  $N$  方向的冲量为:

$$\oint_L F_h dL dt = dt \lambda \frac{\partial W}{\partial N} r \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = 0 \quad (5.16)$$

$$\oint_L F_N dL dt = dt \mu \left( \frac{\partial U}{\partial N} r \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha + \frac{\partial V}{\partial N} r \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \right) = 0 \quad (5.17)$$

由于上述平面  $S$  为  $S_1$  和  $S_2$  之间圆柱体上的任一垂直于  $N$  的平面, 所以整个小圆柱体侧面上的外力的冲量和等于零. 因此, 当  $dS \rightarrow 0$  时, 即可得到一点处的动力条件 (5.6) 式, 根据虎克定律, 动力条件可以写为:

$$\left. \begin{aligned} -\rho c \frac{\partial u}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu)l'\theta - \mu m'\omega_z + \mu n'\omega_y \\ -\rho c \frac{\partial v}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu)m'\theta - \mu n'\omega_x + \mu l'\omega_z \\ -\rho c \frac{\partial w}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu)n'\theta - \mu l'\omega_y + \mu m'\omega_x \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

其中:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

对于P波波阵面有:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c_P l'\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c_P m'\theta, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -c_P n'\theta \quad (5.19)$$

其中:  $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  为P波波速.

对于S波波阵面有:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_S(m'\omega_z - n'\omega_y), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c_S(n'\omega_x - l'\omega_z), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = c_S(l'\omega_y - m'\omega_x) \quad (5.20)$$

其中:  $c_S = \sqrt{\mu/\rho}$  为S波波速.

(b) 边界某一点处的应变值:

设  $S_i$  为边界上的某一个四边形单元, 在单元中点外法线负方向上任取一点, 从而形成一个等参数五面体单元 (如图5所示), 可构筑如下形函数:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-k)(1-h)(1-n'), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+k)(1-h)(1-n') \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+k)(1+h)(1-n'), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-k)(1+h)(1-n'), & N_5 &= n' \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

局部坐标与总坐标的关系可以写为:

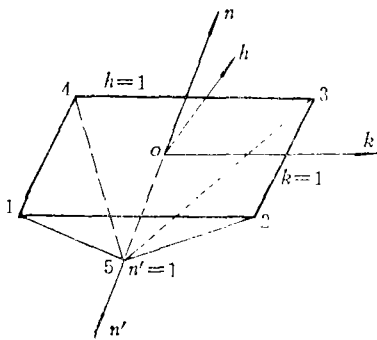


图5 等参数五面体单元

$$x = \sum_{i=1}^5 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^5 N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^5 N_i z_i \quad (5.22)$$

同时有下列关系:

$$u = \sum_{i=1}^5 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^5 N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^5 N_i w_i \quad (5.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial z} u_i, \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

$v, w$  有类似关系. 根据复合函数求导法则有:



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial k} \\ \frac{\partial N_i}{\partial h} \\ \frac{\partial N_i}{\partial n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial k} & \frac{\partial y}{\partial k} & \frac{\partial z}{\partial k} \\ \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial y}{\partial h} & \frac{\partial z}{\partial h} \\ \frac{\partial x}{\partial n'} & \frac{\partial y}{\partial n'} & \frac{\partial z}{\partial n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

因此有:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial k} \\ \frac{\partial N_i}{\partial h} \\ \frac{\partial N_i}{\partial n'} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

只要知道了单元结点的位移值, 根据 (5.26) 和 (5.24) 式即可求得单元中点的应变值。

## 六、结 论

分区均匀介质中波的传播问题, 是一个非常复杂的问题; 要想得到它的解析解是非常困难的。有限元方法为研究这一问题提供了非常有利的工具。但是, 当在三维空间中研究较大问题的时候, 对计算机的存储量和计算速度将提出很高的要求。因此, 边界单元法为解决这一问题提供了一条使人非常感兴趣的途径。

从 Kirchhoff 积分公式出发, 经离散化所得到的边界单元法公式为显式公式, 从而可以节省计算时间。这一方法可以应用于场地地震反应、基础振动等有关研究领域; 并且, 在引入适当的边界条件以后, 还可以推广应用于其它许多课题的研究。

## 参 考 文 献

- [1] Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, Halstead, New York (1978).
- [2] Cruse, T. A. (Ed.) and F. J. Rizzo (Co-Ed.), *Boundary-Integral Equation Method; Computational Applications in Applied Mechanics*, Presented at 1975 Applied Mechanics Conference, The Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, June (1975), 23—25.
- [3] Brebbia, C. A., Introductory remarks, boundary element methods, *Proceedings of the Third International Seminar*, Editor, C. A. Brebbia, Irvine, California, July (1981).
- [4] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社 (1956).
- [5] M. 巴特著 (瑞典), 《地震学的数学问题》, 科学出版社, 郑治真译, 朱传镇校 (1976).
- [6] W. 伊文等著, 《层状介质中的弹性波》, 刘光鼎译, 王耀文校, 科学出版社 (1966).

## The Boundary Element Method (BEM) for Wave Equation

Gu Wei-hua

*(Central Research Institute of Building and Construction of MMI, Beijing)*

### Abstract

The formula of BEM suited to solve the problems of wave propagation in boundless medium is obtained from numerical treatment of Kirchhoff integral equation. After quoting the coefficients of refraction and reflection of wave at surface or interface, the expression of BEM which is suitable for the problems of wave propagation in multi-isotropic mediums is also given.