

# 树形多刚体系统动力学方程\*

汪 恩 松

(北京航空学院, 1984年10月22日收到)

## 摘 要

本文提出描述联结成树形多刚体系统位置与排列的“位形图”。在不需要引入“增广体”和“子系统”等概念的情况下, 本文利用“位形矩阵”研究了树形多刚体系统的运动, 并推导出其动力学方程。树形多刚体系统的动态参数与其结构的密切关系在这样的动力学方程中明显地表示出来。

## 符 号

$n$  系统刚体总数

$i$  标号为  $i$  的刚体

$(a)$ ,  $(\mathbf{a})$  元素分别为标量  $a_i$ , 矢量  $\mathbf{a}_i$  的列阵

$[a]$ ,  $[\mathbf{a}]$ ,  $[\mathbf{a}^2]$  元素分别为  $a_{ij}$ ,  $\mathbf{a}_{ij}$  和二阶张量  $\mathbf{a}_{ij}$  的方阵

$c_i$   $i$  的质心

$h_i$   $i$  的内铰点

$\mathbf{c}_i$  由  $h_i$  指向  $c_i$  的矢径

$m_i$   $i$  的质量

$\bar{J}_i^c$   $i$  对于质心  $c_i$  的惯量张量

$\rho_i$   $c_i$  对于惯性参考系中固定点  $O$  的矢径

$\omega_i$   $i$  的绝对角速度

$\mathbf{F}_i$   $i$  上所受外力的主矢

$\mathbf{L}_i$   $i$  上所受外力向  $c_i$  简化的主矩

$\mathbf{r}_i$   $h_i$  对于惯性参考系中固定点  $O$  的矢径

$\mathbf{X}_i^{h_i}$  对应于铰  $h_i$  处的约束力

$\mathbf{Y}_i^{h_i}$  铰  $h_i$  处的约束力偶矩

$\mathbf{Y}_i$  铰  $h_i$  处的阻力偶矩和弹簧力偶矩

$\mathbf{b}_j$  由内铰点  $h_i$  指向  $i$  上另一铰点  $h_j$  的矢量

$M$  系统总质量

$\mathbf{R}$  系统上所有外力的主矢

$\mathbf{G}_i^c$   $i$  对于质心  $c_i$  的动量矩

$\mathbf{G}_i^{h_i}$   $i$  对于内铰点  $h_i$  的动量矩

$\mathbf{p}_i^j$   $i$  相对于下方刚体转动的第  $j$  个转轴的单位矢量

$(\mathbf{e}_0)$  惯性参考系的基矢量组 (行阵)

$(\mathbf{e}_i)$  固连在  $i$  上的基矢量组 (行阵)

## 一、引 言

对多刚体系统动力学问题的研究表明, 点连接树形多刚体系统的问题是最基础的。建立这类系统的动力学方程有各种方法, 其中 R. E. Roberson 和 J. Wittenburg 用图论的观点和矩阵的工具作了系统的研究, 得到许多重要的结果。周起钊在这方面又作了许多有益的改进, 对系统进行动力学等效分解。本文利用反映多刚体系统整体结构位置和排列的“位形图”和“位形矩阵”的概念, 着眼于从整体观点研究系统的运动, 无需提出各种形式的“增广体”和“子系统”等概念, 直接由位形矩阵的性质利用矩阵方法推导得到树形多刚体系统

\* 郭仲衡推荐。

动力学方程。这不仅简化了推证过程，而且使所得到的方程在形式上与系统整体结构的关系表示得更为明显。不与任何运动已知的刚体联结的自由多刚体系统，它的方程是在与某一运动已知刚体联结的约束多刚体系统的基础上建立的。许多文章在研究这个问题时是利用由系统质心处引出的相对矢径作为中间变量，本文利用矩阵演算的方法较简单地得到所需的结论。本文利用位形矩阵的分解在原刚体基础上，而不是在增广体上对系统进行力学等效分解，改善了由周起钊提出的这种方法。

本文研究的是  $n$  个刚体通过铰点连接成的树形系统，两刚体连接处的铰是球铰或万向接头或盘柱铰链。如果所研究的树形多刚体系与一运动已知的刚体（标号为 0 的零刚体）相连接，这样的多刚体系称为约束系统；如果多刚体系不与任何运动已知的刚体连接，就称为自由系统。本文采用规则标号，对于约束系统，取与零刚体连接的刚体标号为 1；对于自由系统，取质量最大或作用最大的刚体作为基础刚体并标号为 1，其余分层顺序标号，离 1 愈远的刚体标号愈大。某铰连接的两个刚体，标号大的称为标号小的上方刚体，反之则称为下方刚体。 $i$  刚体与下方刚体的铰接点称为  $i$  的内铰点，记为  $h_i$ 。对于约束系统， $h_1$  指的是 1 号刚体与零刚体的铰接点；对于自由系统，可在基础刚体上任选一点作为内铰点，这点称为虚铰。

## 二、位形图与位形矩阵

以刚体为顶点，以铰为边作的图称为体铰图。给体铰图的边标注方向，从标号小的顶点指向标号大的顶点。由体铰图可构造系统的关联矩阵  $[I]$ 。树形多刚体系统的关联矩阵是  $n$  阶上三角阵，其对角线上的元素  $I_{ii} = -1$ ；若  $j$  刚体与  $i$  刚体直接铰接，则  $I_{ij} = +1$ ；若  $j$  不与  $i$  直接铰接，则  $I_{ij} = 0$ 。系统的关联矩阵刻画了系统各刚体间的相互关系，即各刚体排列的情况。

若  $i$  上有两个以上的铰点，则由其内铰  $h_i$  指向另一铰  $h_j$  的矢量称为“茎”，记为  $b_j$ ，由  $h_i$  指向质心  $c_i$  的矢量记为  $c_i$ 。由  $h_i$  引出的  $b_j$  和  $c_i$  都是固连在  $i$  上的。以系统各铰点  $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 和质心  $c_i$  为顶点，以  $b_j$  ( $j=2, 3, \dots, n$ ) 和  $c_i$  为边构成的有向图称为多刚体系统的“位形图”。位形图一方面反映了系统各刚体在惯性参考系中的位置，另一方面也反映了各刚体排列的情况。

图 1(a) 给出了由八个刚体组成的树形多刚体系统的实体图，图 1(b) 给出了该系统的体

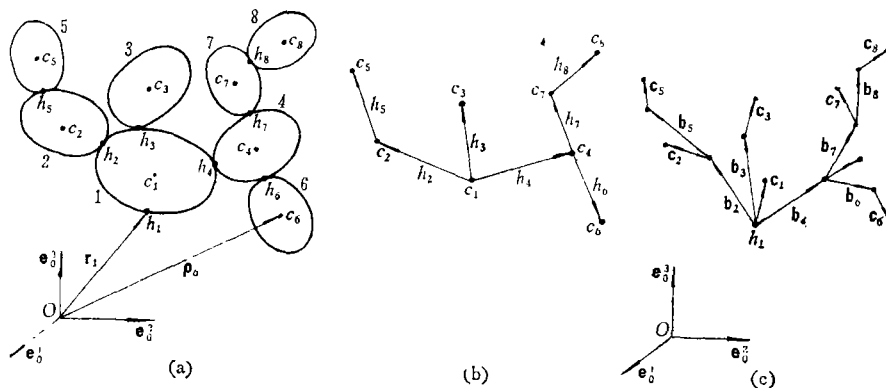


图 1

铰图，图 1 (c)给出了系统的位形图。

系统的关联矩阵 $[I]$ 是满秩阵，设其逆阵为 $[H]$ ，显然 $[H]$ 也是上三角阵，其主对角线上的元素 $H_{ii}=-1$ ；在位形图上，如由 $h_i$ 出发，通过 $i$ 的某一条茎 $b_i$ ，直接或间接指向刚体 $j$  ( $j \geq k > i$ )，则 $H_{ij}=-1$ ；其余元素均为零。下面给出图 1(c)所示系统位形图的关联矩阵 $[I]$ 和其逆阵 $[H]$

$$[I]=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix}, [H]=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

根据位形图可以构造一个在建立系统动力学方程中起重要作用的“位形矩阵” $[b^c]$ ，这也是一个上三角阵，非零元素为位形图上各矢量 $b_j$ 和 $c_i$ ， $[b^c]$ 的主对角线上的元素 $b_{ii}^c$ 为 $c_i$ ；如 $i$ 上有茎 $b_j$ ，从位形图上看，由茎 $b_j$ 的正向出发经其它茎而指向铰 $h_k$  (显然有 $k > i$ )，则 $b_{ik}^c=b_j$ ；而对于其它情况 $b_{ik}^c=0$ 。显然若 $i$ 上没有茎， $[b^c]$ 的第 $i$ 行元素，除 $b_{ii}^c=c_i$ 外，其余的均为零。对于图 1(c)中所示的系统的位形图，其位形矩阵为

$$[b^c]=\begin{bmatrix} c_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_2 & b_4 & b_4 & b_4 \\ & c_2 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ & & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_4 & 0 & b_6 & b_7 & b_7 \\ & & & & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & c_6 & 0 & 0 \\ & & & & & & c_7 & b_8 \\ & & & & & & & c_8 \end{bmatrix}$$

由 $[H]$ 与 $[b^c]$ 对比可看出，它们的非零元素的位置是相同的。

从位形矩阵可以看出，第 $i$ 行非零元素都是固连在 $i$ 上的矢量茎 $b_j$ 和 $c_i$ ；其第 $k$ 列元素是位形图上由 $h_1$ 到 $k$ 的质心 $c_k$ 的各个矢量。因此，位形矩阵刻画了系统整体在惯性参考系中的位置和形态（即各刚体排列的情况）。由于 $[b^c]$ 的 $k$ 列元素的和表示由 $h_1$ 到 $k$ 刚体质心 $c_k$ 的矢量，故系统各刚体质心 $c_i$ 对于惯性参考系中的固定点 $O$ 的矢径 $\rho_i$ 为元素的列阵 $(\rho)$ 与位形矩阵 $[b^c]$ 的关系为

$$(\rho)=[b^c]^T(1)+r_1(1) \tag{2.1}$$

式中的 $(1)$ 表示元素都是1的列阵， $r_1$ 是 $h_1$ 相对于惯性参考系中的固定点 $O$ 的矢径， $[b^c]^T$ 是 $[b^c]$ 的转置。上式对时间求二次导数得

$$(\ddot{\rho})=-[b^c]^T \times (\dot{\omega})+\{[b^c]^T \times [\omega]\} \times (\omega)+\ddot{r}_1(1) \tag{2.2}$$

式中 $(\omega)$ ， $[\omega]$ 分别是角速度列阵和对角阵。

位形矩阵 $[b^c]$ 各元素由矢量 $b_j$ 和 $c_i$ 构成，其分布与系统各刚体排列的情况有关，故位形矩阵 $[b^c]$ 与关联矩阵 $[I]$ 和对角阵 $[b]$ ， $[c]$ 有关，不难证明有如下关系式

$$[b^c]=[c]-\{[E]+[I]\}[b][H] \tag{2.3}$$

式中 $[E]$ 为单位阵。

### 三、树形多刚体系动力学方程

现研究系统中任意刚体  $i$  (图 2),  $F_i$  和  $L_i$  分别是  $i$  所受外力向  $c_i$  简化的主矢和主矩,  $-X_i^h, -Y_i^h, -Z_i^h$  分别是内铰  $h_i$  处的约束力, 约束力偶矩和铰中阻尼和弹性力偶矩,  $+X_i^h, +Y_i^h, +Z_i^h$  是  $i$  上另一铰  $h_j$  中相应的量, 约定这些量在内铰处取负号, 其它铰处取正号。对各刚体分别应用质心运动定理和对质心的动量矩定理, 再对整个系统写出这两个定理的矩阵形式方程

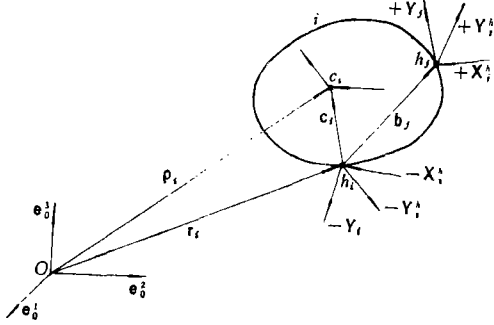


图 2

$$[m](\ddot{\mathbf{p}}) = (\mathbf{F}) + [I](\mathbf{X}^h) \quad (3.1)$$

$$(\dot{\mathbf{G}}^c) = (\mathbf{L}) + [I](\mathbf{Y}) + [I](\mathbf{Y}^h) + \{[E] + [I]\}[\mathbf{b}] - [\mathbf{c}][I] \} \times (\mathbf{X}^h) \quad (3.2)$$

考虑到 $[I][H] = [E]$ 及关系式(2.3), 上式可写成

$$(\dot{\mathbf{G}}^c) = (\mathbf{L}) + [I](\mathbf{Y}) + [I](\mathbf{Y}^h) - [\mathbf{b}^c] \times [I](\mathbf{X}^h) \quad (3.3)$$

在上面的式子中,  $[m]$ 是元素为各刚体质量的对角阵,  $(\dot{\mathbf{G}}^c)$ 是刚体对质心动量矩对时间一阶导数的列阵。由(3.1)式解得 $[I](\mathbf{X}^h)$ 代入(3.3)式得到

$$(\dot{\mathbf{G}}^c) = (\mathbf{L}) + [I](\mathbf{Y}) + [I](\mathbf{Y}^h) - [\mathbf{b}^c] \times \{[m](\ddot{\mathbf{p}}) - (\mathbf{F})\}$$

再将含有运动量的项移至等式左端

$$(\dot{\mathbf{G}}^c) + [\mathbf{b}^c][m] \times (\ddot{\mathbf{p}}) = (\mathbf{L}) + [I](\mathbf{Y}) + [I](\mathbf{Y}^h) + [\mathbf{b}^c] \times (\mathbf{F}) \quad (3.4)$$

该式左端第一项可写成

$$(\dot{\mathbf{G}}^c) = [\mathbf{J}^c] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}) + [\boldsymbol{\omega}] \times [\mathbf{J}^c] \cdot (\boldsymbol{\omega}) \quad (3.5)$$

式中 $[\mathbf{J}^c]$ 为对角阵, 其第  $i$  元素  $J_i^c$  为刚体  $i$  对质心  $c_i$  的惯量张量。

考虑到(2.2)式和(3.5)式, (3.4)式可写成如下形式

$$\begin{aligned} & [\mathbf{J}^c] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}) - [\mathbf{b}^c][m] \times \{[\mathbf{b}^c]^T \times (\dot{\boldsymbol{\omega}})\} + [\boldsymbol{\omega}] \times [\mathbf{J}^c] \cdot (\boldsymbol{\omega}) \\ & + [\mathbf{b}^c][m] \times \{[\mathbf{b}^c]^T \times [\boldsymbol{\omega}]\} \times (\boldsymbol{\omega}) + [\mathbf{b}^c](m) \times \ddot{\mathbf{r}}_i \\ & = (\mathbf{L}) + [I](\mathbf{Y}) + [I](\mathbf{Y}^h) + [\mathbf{b}^c] \times (\mathbf{F}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

下面分别推导约束系统和自由系统的动力学方程

#### (一) 约束系统的动力学方程

对于约束系统来说,  $h_i$  是系统与运动已知的零物体相连接的铰点, 故  $h_i$  的矢径  $\mathbf{r}_i$  是时间  $t$  的已知函数, (3.6)式左端不包含因子  $(\dot{\boldsymbol{\omega}})$  的后三项之和记为  $-(\mathbf{L}^c)$ , 即

$$(\mathbf{L}^c) = -[\boldsymbol{\omega}] \times [\mathbf{J}^c] \cdot (\boldsymbol{\omega}) - [\mathbf{b}^c][m] \times \{[\mathbf{b}^c]^T \times [\boldsymbol{\omega}]\} \times (\boldsymbol{\omega}) - [\mathbf{b}^c](m) \times \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (3.7)$$

(3.6)式左端第二项可写成 $[\mathbf{J}^s] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}})$ , 即

$$[\mathbf{J}^s] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}) = -[\mathbf{b}^c][m] \times \{[\mathbf{b}^c]^T \times (\dot{\boldsymbol{\omega}})\} \quad (3.8)$$

式中 $[\mathbf{J}^s]$ 称为约束系统的折算惯量张量矩阵, 其第  $i$  行  $j$  列元素为

$$J_{ij}^s = \sum_{l=1}^n m_l (\mathbf{b}_{li}^s \cdot \mathbf{b}_{lj}^s \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{b}_{li}^s \cdot \mathbf{b}_{lj}^s) \quad (3.9)$$

式中 $\dot{\mathbf{E}}$ 为二阶单位张量。因 $[\mathbf{b}^0]$ 为上三角阵，(3.9)式求和时只在 $l \geq i$ 和 $l \geq j$ 有值。由(3.9)式可看出有

$$J_{ij}^s = \{J_{ji}^s\}^T$$

再记

$$[\mathbf{J}] = [\mathbf{J}^0] + [\mathbf{J}^s] \quad (3.10)$$

$[\mathbf{J}]$ 称为约束系统总惯量张量矩阵，显然它是依赖位形矩阵 $[\mathbf{b}^0]$ 的。考虑到(3.7)式和(3.10)式，则(3.6)式经整理可得到

$$[\mathbf{J}] \cdot (\dot{\omega}) = (\mathbf{L}) + [\mathbf{I}](\mathbf{Y}) + [\mathbf{I}](\mathbf{Y}^h) + [\mathbf{b}^0] \times (\mathbf{F}) + (\mathbf{L}^0) \quad (3.11)$$

该式中尚包含了约束力偶矩 $(\mathbf{Y}^h)$ ，为了使方程不出现这一项，引入铰链矩阵 $[\mathbf{p}]$ ，其转置阵为

$$[\mathbf{p}]^T = \begin{bmatrix} \overbrace{p_1^1 \ p_1^2 \ \dots}^{k_1} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & \overbrace{p_i^1 \ \dots}^{k_i} & & \\ & 0 & & & & & \\ & & & & & & \overbrace{p_n^1 \ \dots}^{k_n} \end{bmatrix}_{n \times k} \quad (3.12)$$

这是一个拟对角阵。 $k_i$ 是刚体 $i$ 相对下方刚体绕内铰 $h_i$ 转动的自由度数，可以是3或2或1，称为 $i$ 的维数。 $k = \sum_{i=1}^n k_i$ 是约束系统的自由度数。 $p_j^i$  ( $j=1, 2, \dots, k_i$ )表示 $i$ 相对下方刚体绕 $h_i$ 转动中的第 $j$ 个转轴的单位矢量，且 $p_1^i, \dots, p_{k_i}^i$ 是正交的。在维数少于3的铰 $h_i$ 中，有可能出现约束力偶矩 $\mathbf{Y}_i^h$ ，且 $\mathbf{Y}_i^h$ 与 $p_j^i$ 垂直，故对整个系统有

$$[\mathbf{p}]_{k \times n} \cdot (\mathbf{Y}^h) = (0) \quad (3.13)$$

再记

$$[\mathbf{p}^H]_{k \times n} = [\mathbf{p}][\mathbf{H}] \quad (3.14)$$

(3.11)式两端点乘 $[\mathbf{p}^H]$ 可消去约束力偶矩，得到

$$[\mathbf{p}^H] \cdot [\mathbf{J}] \cdot (\dot{\omega}) = [\mathbf{p}^H] \cdot \{(\mathbf{L}) + [\mathbf{b}^0] \times (\mathbf{F}) + (\mathbf{L}^0)\} + [\mathbf{p}] \cdot (\mathbf{Y}) \quad (3.15)$$

这就是约束系统的动力学普遍方程组，共有 $k$ 个方程。这个方程组还可进一步表示为广义坐标形式，本文就不再讨论了。

### (二) 自由系统的动力学方程

自由系统与约束系统的区别是标号为1的刚体没有与任何运动已知的刚体连接。 $h_1$ 是在1刚体(基础刚体)上任选的一点，也可取在质心 $c_1$ 上。 $h_1$ 称为虚铰，显然虚铰处无约束反力、约束力偶矩和阻尼、弹簧力偶矩，即 $\mathbf{X}_1^h = 0, \mathbf{Y}_1^h = 0, \mathbf{Y}_1 = 0$ 。虚铰点 $h_1$ 的矢径 $\mathbf{r}_1$ 是未知量，因此为确定 $\mathbf{r}_1$ 还需多建立三个方程，即自由系统的自由度为 $k+3$ 个。

将每个刚体的质心运动定理的表达式相加，得到

$$(\mathbf{m})^T (\ddot{\mathbf{p}}) = \mathbf{R} \quad (3.16)$$

式中  $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$  为自由系统所受外力的主矢。将 (2.2) 式中的  $(\dot{\mathbf{p}})$  代入，并整理得到

$$M\ddot{\mathbf{r}}_1 = (m)^T [\mathbf{b}^o]^T \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}) - (m)^T \{ [\mathbf{b}^o]^T \times [\boldsymbol{\omega}] \} \times (\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{R} \quad (3.17)$$

式中  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  为系统的总质量，再将这里的  $\ddot{\mathbf{r}}_1$  代到 (3.6) 式中，经整理得到

$$\begin{aligned} & [\mathbf{J}^o] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}) - [\mathbf{b}^o] \left\{ [\mathbf{m}] - \frac{1}{M} (m)(m)^T \right\} \times \{ [\mathbf{b}^o]^T \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}) \} + [\boldsymbol{\omega}] \times [\mathbf{J}^o] \cdot (\boldsymbol{\omega}) \\ & + [\mathbf{b}^o] \left\{ [\mathbf{m}] - \frac{1}{M} (m)(m)^T \right\} \times \{ [\mathbf{b}^o]^T \times [\boldsymbol{\omega}] \} \times (\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{M} [\mathbf{b}^o] (m) \times \mathbf{R} \\ & = (\mathbf{L}) + [\mathbf{I}](\mathbf{Y}) + [\mathbf{I}](\mathbf{Y}^h) + [\mathbf{b}^o] \times (\mathbf{F}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

记 
$$[\mathbf{m}^E] = [\mathbf{m}] - \frac{1}{M} (m)(m)^T \quad (3.19)$$

$[\mathbf{m}^E]$  是对称阵。对自由系统再记

$$(\mathbf{L}^o) = -[\boldsymbol{\omega}] \times [\mathbf{J}^o] \cdot (\boldsymbol{\omega}) - [\mathbf{b}^o] [\mathbf{m}^E] \times \{ [\mathbf{b}^o]^T \times [\boldsymbol{\omega}] \} \times (\boldsymbol{\omega}) \quad (3.20)$$

另外，(3.18) 式左端第二项可写成  $[\mathbf{J}^s] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}})$ ，即

$$[\mathbf{J}^s] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}) = -[\mathbf{b}^o] [\mathbf{m}^E] \times \{ [\mathbf{b}^o]^T \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}) \} \quad (3.21)$$

这里的  $[\mathbf{J}^s]$  是自由系统的折算惯量张量矩阵，其第  $i$  行  $j$  列元素为

$$\bar{J}_{ij}^s = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n m_{lk}^E (\mathbf{b}_{jk}^o \cdot \mathbf{b}_{li}^o \bar{\mathbf{E}} - \mathbf{b}_{jk}^o \mathbf{b}_{li}^o)$$

上式求和时只在  $l \geq i$  和  $k \geq j$  有值，且有

$$\bar{J}_{ij}^s = \{ \bar{J}_{ji}^s \}^T$$

同样再记 
$$[\mathbf{J}] = [\mathbf{J}^o] + [\mathbf{J}^s] \quad (3.22)$$

这是自由系统的总惯量张量矩阵，同样是依赖位形矩阵  $[\mathbf{b}^o]$  的。考虑到 (3.19) 至 (3.22) 式，则 (3.18) 式可整理得到

$$[\mathbf{J}] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}) = (\mathbf{L}) + [\mathbf{I}](\mathbf{Y}) + [\mathbf{I}](\mathbf{Y}^h) + [\mathbf{b}^o] \times \left\{ (\mathbf{F}) - \frac{\mathbf{R}}{M} (m) \right\} + (\mathbf{L}^o) \quad (3.23)$$

与约束系统所讨论的一样，引入铰链矩阵  $[\mathbf{p}]$ ，消去约束力偶矩  $(\mathbf{Y}^h)$ ，可得到自由系统有关转动的  $k$  个动力学普遍方程为

$$[\mathbf{p}^H] \cdot [\mathbf{J}] \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}) = [\mathbf{p}^H] \cdot \left\{ (\mathbf{L}) + [\mathbf{b}^o] \times \left\{ (\mathbf{F}) - \frac{\mathbf{R}}{M} (m) \right\} + (\mathbf{L}^o) \right\} + [\mathbf{p}] \cdot (\mathbf{Y}) \quad (3.24)$$

另外描述虚铰  $h_1$  运动的三个动力学方程可由 (3.17) 式在惯性参考系的三个坐标轴（其单位矢量分别为  $\mathbf{e}_0^1, \mathbf{e}_0^2, \mathbf{e}_0^3$ ）上投影而得到，即用 (3.17) 式点乘基矢量行阵  $(\mathbf{e}_0)$  的转置

$$M\ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot (\mathbf{e}_0)^T = \{ (m)^T [\mathbf{b}^o]^T \times (\dot{\boldsymbol{\omega}}) - (m)^T \{ [\mathbf{b}^o]^T \times [\boldsymbol{\omega}] \} \times (\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{R} \} \cdot (\mathbf{e}_0)^T \quad (3.25)$$

(3.24) 式和 (3.25) 式就是自由系统的动力学普遍方程，共有  $k+3$  个。

从所得到的约束系统的动力学方程 (3.15) 和自由系统的动力学方程 (3.24)，(3.25) 可以看出，树形多刚体系统整体结构对方程的影响是通过两类矩阵，即关联矩阵  $[\mathbf{I}]$  和位形矩阵  $[\mathbf{b}^o]$  来刻画的，因此方程与系统整体结构的关系可以较清楚地表示出来。外力  $(\mathbf{F})$  中的任一元素  $\mathbf{F}_i$  虽然只是作用在  $i$  上，由于刚体是互相连接的， $\mathbf{F}_i$  对其它刚体的运动也会有影

响, 这种影响显然是与系统的结构有关. 动力学方程中的  $[\mathbf{b}^o] \times (\mathbf{F})$  这一项就反映了外力  $(\mathbf{F})$  对系统综合的作用. 另外, 任一刚体的运动都受到其它刚体的牵制. 这种牵制也是与系统的结构有关, 方程中包含有  $[\mathbf{b}^o][m] \times \{[\mathbf{b}^o]^T \times (\dot{\omega})\}$  和  $[\mathbf{b}^o][m] \{[\mathbf{b}^o]^T \times [\omega]\} \times (\omega)$  的项就反映了系统各刚体运动量之间的综合影响. 当一个具体的系统给定以后, 其关联矩阵和位形矩阵很容易由其结构直接表出. 因而系统的动力学方程可以比较容易建立, 不再需要去计算那些增广体的质量, 增广体质心至各铰点的矢径等中间变量, 简化了建立方程的程序.

### 四、动力学等效分解

周起钊的文章提出对系统进行动力学等效分解, 把整个多刚体系当成多个单刚体来处理 (先将每个刚体改造成为增广体). 这对系统动力学方程的建立, 对系统动力学方程的各项类比单刚体那样来解释其力学意义是有积极意义的. 本文不用增广体作为动力学等效体的模型, 而是在原刚体的基础上对系统进行动力学等效分解.

将位形矩阵  $[\mathbf{b}^o]$  拆开, 分成各含有  $\mathbf{c}_i$  和  $\mathbf{b}_j$  的矩阵  $[\mathbf{c}]$  和  $[\mathbf{b}]$ ,  $[\mathbf{c}]$  是对角阵,  $[\mathbf{b}]$  是严格上三角阵. 再注意到  $(\dot{\mathbf{p}}) = (\dot{\mathbf{r}}) + (\dot{\mathbf{c}})$ . 则系统的各刚体对质心的动量矩方程 (3.4) 式的左端第二项可以改写为

$$[\mathbf{b}^o] \times [m] (\dot{\mathbf{p}}) = [\mathbf{c}] \times [m] (\dot{\mathbf{c}}) + [\mathbf{c}] \times [m] (\dot{\mathbf{r}}) + [\mathbf{b}] \times [m] (\dot{\mathbf{p}})$$

这样 (3.4) 式可以写成

$$(\dot{\mathbf{G}}^o) + [\mathbf{c}] \times [m] (\dot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{L}) + [I](\mathbf{Y}) + [I](\mathbf{Y}^h) + [\mathbf{c}] \times \{(\mathbf{F}) - [m](\dot{\mathbf{r}})\} + [\mathbf{b}] \times \{(\mathbf{F}) - [m](\dot{\mathbf{p}})\} \quad (4.1)$$

该式左端就是刚体对内铰点  $h_i$  的动量矩对时间的导数的列阵, 记为  $(\dot{\mathbf{G}}^h)$ ;  $-[m](\dot{\mathbf{p}})$  可记为  $(\mathbf{Q})$ , 其元素  $\mathbf{Q}_i = -m_i \dot{\mathbf{p}}_i$  是  $i$  刚体惯性力的主矢;  $-[m](\dot{\mathbf{r}})$  可记为  $(\mathbf{Q}_e)$ , 其元素  $\mathbf{Q}_{ei} = -m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  是  $i$  的质量  $m_i$  与内铰点  $h_i$  的加速度  $\dot{\mathbf{r}}_i$  的乘积取负值, 称为  $i$  的牵连惯性力. 这样 (4.1) 式可写成

$$(\dot{\mathbf{G}}^h) = (\mathbf{L}) + [I](\mathbf{Y}) + [I](\mathbf{Y}^h) + [\mathbf{c}] \times \{(\mathbf{F}) + (\mathbf{Q}_e)\} + [\mathbf{b}] \times \{(\mathbf{F}) + (\mathbf{Q})\} \quad (4.2)$$

这就是系统对内铰点的动量矩方程组, 是  $n$  个联立矢量方程. 系统中  $i$  刚体所对应的第  $i$  个方程可作出动力学等效的直观解释.  $i$  对内铰点  $h_i$  的动量矩方程所对应的受力图如图 3 所示:

①  $\mathbf{F}_i$  和牵连惯性力  $\mathbf{Q}_{ei}$  作用在  $i$  的质心  $c_i$  上;

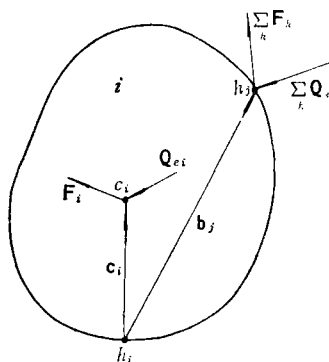


图 3

② 通过  $i$  上的铰  $h_j$  (不包括内铰  $h_i$ ) 直接和间接连接的各个刚体的标号记为  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 显然有  $(k_1, k_2, \dots, k_m) > i$ . 分别作用在上述刚体上外力的矢量和为  $\sum_k \mathbf{F}_k$  (这里  $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ , 和式表示对所有  $k$  上的力求和), 这些刚体上惯性力的矢量和为  $\sum_k \mathbf{Q}_k$ , 这两组矢量都作用在铰点  $h_j$  上;

③ 外力偶矩  $\mathbf{L}_i$  及  $i$  上所有铰 (包括内铰) 中的约束力偶矩和阻尼、弹簧力偶矩  $-\mathbf{Y}_i^h, +\mathbf{Y}_i^h, -\mathbf{Y}_j, +\mathbf{Y}_j$  等, 这些力偶矩作用在刚体  $i$  上 (图上没有画出). 图 3 所表示的就是动力等效刚体模型, 利用这种模型就可能将多刚体系统

进行动力学等效分解。这种等效分解是在原刚体上进行的，因此比较简单。

## 五、例 子

(1) 写出两种特殊类型的树形多刚体系的关联矩阵和位形矩阵

① 花瓣状系统 (图4(a))

$$[I] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ 0 & & & & -1 \end{bmatrix}, [b^c] = \begin{bmatrix} c_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & c_3 & 0 & 0 \\ & & & c_4 & 0 \\ 0 & & & & c_5 \end{bmatrix}$$

② 链状系统 (图4(b))

$$[I] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & -1 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 1 \\ 0 & & & & -1 \end{bmatrix}, [b^c] = \begin{bmatrix} c_1 & b_2 & b_2 & b_2 & b_2 \\ & c_2 & b_3 & b_3 & b_3 \\ & & c_3 & b_4 & b_4 \\ & & & c_4 & b_5 \\ 0 & & & & c_5 \end{bmatrix}$$

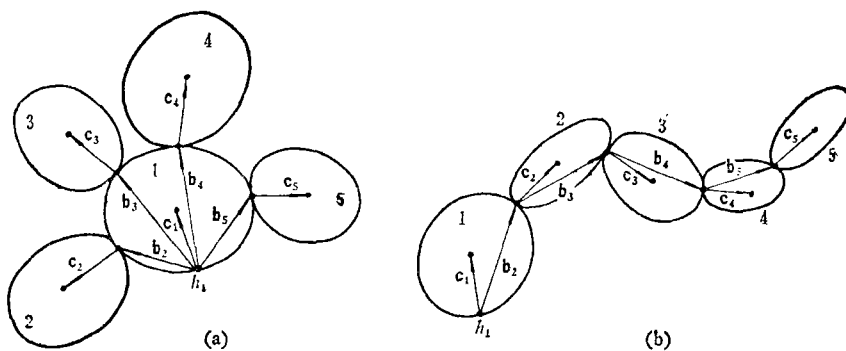


图 4

(2) 双复摆 (图5) 的  $OA$  杆和  $AB$  杆长为  $2l$ ，质量为  $m$  (匀质)， $O$  和  $A$  处为光滑柱形铰链，在重力作用下，系统在铅垂平面内运动。现建立其动力学方程。

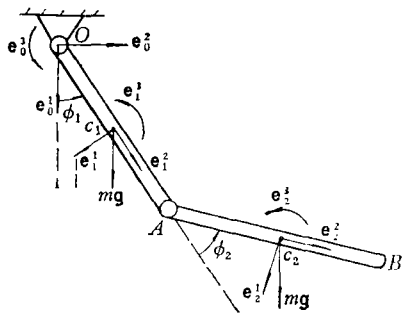


图 5



给OA杆编号为1, AB杆为2, 惯性系的基矢量为  $e_0^1, e_0^2, e_0^3$ , 固连在刚体上的基矢量分别为  $e_1^1, e_1^2, e_1^3$  和  $e_2^1, e_2^2, e_2^3$ . 取  $\phi_1$  和  $\phi_2$  为广义坐标. 按题意系统的已知参数为

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, (F) = mg e_0^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (L) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ [I] &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, [H] = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [b^0] = I \begin{bmatrix} e_1^2 & 2e_1^2 \\ 0 & e_2^2 \end{bmatrix} \\ [m] &= m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (\omega) = e_0^3 \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 \end{pmatrix}, (\dot{\omega}) = e_0^3 \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} \\ [p] &= e_0^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [p^g] = -e_0^3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [J^0] &= \frac{1}{3} ml^2 \begin{bmatrix} e_1^1 e_1^1 + e_1^2 e_1^2 & 0 \\ 0 & e_2^1 e_2^1 + e_2^2 e_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由 (3.9) 式算得

$$[J^g] = ml^2 \begin{bmatrix} 5(\ddot{E} - e_1^2 e_1^2) & 2(\cos \phi_2 \ddot{E} - e_2^2 e_1^2) \\ 2(\cos \phi_2 \ddot{E} - e_1^2 e_2^2) & \ddot{E} - e_2^2 e_2^2 \end{bmatrix}$$

由 (3.7) 式算得

$$(L^0) = -2ml^2 \sin \phi_2 e_0^3 \begin{pmatrix} -(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 \\ \dot{\phi}_1^2 \end{pmatrix}$$

再将有关的量代入 (3.15) 式中, 经整理得到

$$\begin{cases} \left( \frac{20}{3} + 4\cos \phi_2 \right) \ddot{\phi}_1 + \left( \frac{4}{3} + 2\cos \phi_2 \right) \ddot{\phi}_2 - (4\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + 2\dot{\phi}_2^2) \sin \phi_2 \\ \qquad \qquad \qquad = -\frac{g}{l} [\sin \phi_1 + \sin(\phi_1 + \phi_2)] \\ \left( \frac{4}{3} + 2\cos \phi_2 \right) \ddot{\phi}_1 + \frac{4}{3} \ddot{\phi}_2 + 2\dot{\phi}_1^2 \sin \phi_2 = -\frac{g}{l} \sin(\phi_1 + \phi_2) \end{cases}$$

这就是双复摆的运动微分方程, 这个结果与用其它方法建立的动力学方程完全相同. 这个例子比较简单, 对于一般情况, 则需将已知参量代入到广义坐标形式的动力学方程中去, 然后在计算机上对方程组进行数值计算.

### 参 考 文 献

- [1] Roberson, R. E. and J. Wittenburg, A dynamical formalism of an arbitrary number to the interconnected rigid bodies, with reference to the problem of satellite attitude control, 3rd IFAC Conger (1966), Proc., London (1968).
- [2] Wittenburg, J., Dynamics of Systems of Rigid Bodies, Teubner Stuttgart (1977). (有中译本, 北京航空学院谢传锋译).
- [3] Wittenburg, J., Dynamics of multibody system, Proceedings of the XVth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (1980).
- [4] 周起钊, 树形多刚体系统的动力学普遍方程, 力学学报, 3 (1983).
- [5] 张光枢, 多刚体系统的运动 (待发表).

## Dynamical Equations for Treeshaped Multi-Rigid-Body Systems

Wang En-song

*(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing)*

### Abstract

In this paper, the "Configuration Graph" for a treeshaped system is brought, which presents the position and the arrangement of an arbitrary number of interconnected rigid bodies. By means of "Configuration Matrix" this paper analyses the motion of treeshaped multi-rigid body systems and derives their dynamical equations while it is not necessary to bring out such ideas as "Augmented-body" and "Subsystem". In such dynamical equations, dynamical parameters of a treeshaped multi-rigid-body is closely associated with its configuration matrix.