

# 静不定梁的等强度设计

唐燮黎 叶开沅

(兰州大学, 1985年1月31日收到)

## 摘 要

本文提出了用最小余能原理对静不定梁进行等强度设计的方法, 并就任意分布载荷, 集中力或集中力偶作用下的单跨或多跨梁给出了沿梁轴刚度变化的解析表达式. 对具有固定宽度可变高度的矩形截面梁和可变外层厚度的夹层梁给出了算例. 与已有结果的比较, 显示了本方法的有效性.

## 一、引 言

本文考虑在单一工况作用下的静不定单跨梁或连续梁的等强度设计. 假设相对于弯曲应变, 由剪力产生的剪应变是微小的, 可以忽略. 在这一意义下, 梁的等强度设计的任务是给出沿梁轴线的刚度分布函数  $S(x)$ , 使梁的每一截面都达到最大容许的弯曲正应力. 显然梁的等强度设计是梁优化设计中的一种准则法, 它具有直观的吸引力. 对于静定梁由于截面内力不随刚度改变而变化, 因而静定梁的等强度设计用初等材料力学方法就可以解决. 对于静不定梁由于各截面的内力是刚度函数  $S(x)$  的泛函数, 因此在任意载荷作用下的等强度设计难于进行. 最近, 叶开沅和俞焕然<sup>[1]</sup>提出了一种用分段等刚度梁来代替一条具有任意刚度变化的梁, 并用叶开沅<sup>[2]</sup>的阶梯折算法进行等强度设计的方法. 由于连续变化的刚度被用有限个刚度值离散化, 并且在每一等刚度段内仅有一个具有最大正应力的截面满足最大容许强度的要求, 因而他们提出的方法是等强度梁的一种近似设计法. 本文试图用最小余能原理<sup>[3]</sup>给出等强度梁的一种设计法, 用此法所得的刚度分布函数为连续可微或分段连续可微函数, 并且梁的每一截面均达到指定的最大容许应力. 下一节给出该方法的一般描述, 第三节中就将就矩形截面梁和夹层梁例举几个实例并与文献[1]的结果进行比较.

## 二、方法的建立

考虑一根具有两个或两个以上支座的直梁, 长  $l$ . 梁上作用有任意的分布载荷  $q(x)$ , 任意个数的集中力  $P_i$ , 力偶  $T_j$ , 如图1所示. 此外还有任意形式和个数的支座. 为使叙述确定起见, 以下的讨论相应于图1形式的支座进行.

设支座反力以  $R_0$ ,  $R_c$  和  $R_l$  表示, 左端的反力矩为  $M_0$ , 则满足平衡方程的弯矩  $M(x)$  可表达为

$$M(x) = M_0 + R_0 x + R_c (x-c) \{x-c\}^0 - \int_0^x (x-t) q(t) dt$$

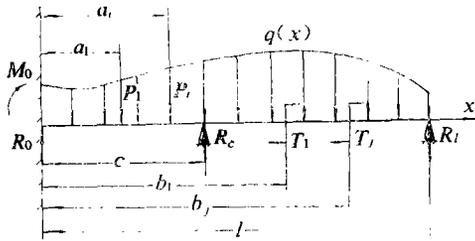


图 1

$$-\sum_i P_i \{x-a_i\}^\circ + \sum_j T_j \{x-b_j\}^\circ \quad (2.1)$$

上式中采用了形为  $\{x-a\}^\circ$  的 Heaviside 函数, 其定义为

$$\{x-a\}^\circ = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases} \quad (2.2)$$

为使  $M(x)$  为一静力容许的内力分布, 右端弯矩为零的力边界条件必须满足. 即

$$M(l) = M_0 - R_0 l + R_c(l-c) - \sum_i P_i(l-a_i) + \sum_j T_j = 0 \quad (2.3)$$

而右端剪力等于支座反力  $R_l$  (在相差一个符号的意义下) 的条件将成为求解  $R_l$  的一个表达式

$$R_l = \int_0^l q(t) dt + \sum_i P_i - R_0 - R_c \quad (2.4)$$

因此四个支座反力  $M_0$ ,  $R_0$ ,  $R_c$  和  $R_l$  中只有两个是使  $M(x)$  为静力容许内力分布的独立变数. 取  $M_0$  和  $R_0$  为独立变数, 则由 (2.3) 式可解出  $R_c$  并代入 (2.1) 式得由  $M_0$  和  $R_0$  表示的  $M(x)$  为

$$\begin{aligned} M(x) = & M_0 \left[ 1 - \frac{x-c}{l-c} \{x-c\}^\circ \right] + R_0 \left[ x + \frac{x-c}{l-c} \{x-c\}^\circ \right] \\ & - \int_0^x (x-t)q(t) dt - \sum_i P_i (x-a_i) \{x-a_i\}^\circ + \sum_j T_j \{x-b_j\}^\circ \\ & + \frac{x-c}{l-c} \sum_i P_i (l-a_i) \{x-c\}^\circ - \frac{x-c}{l-c} \sum_j T_j \{x-c\}^\circ \end{aligned} \quad (2.5)$$

在线性弹性和小位移假定下梁的余能由积分

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{S(x)} dx \quad (2.6)$$

给出. 对所讨论的静不定梁假设所有的位移边界均是固定的, 则由最小余能定理知余能  $U$  关于独立变数  $M_0$  和  $R_0$  的偏导数等于零, 即

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_0^l \frac{M}{S} \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_0} = \int_0^l \frac{M}{S} \frac{\partial M}{\partial R_0} dx = 0 \quad (2.8)$$

将 (2.5) 式代入 (2.7) 和 (2.8) 式可得到关于  $M_0$ ,  $R_0$  的两个方程. 显然这是两个用内力和反作用力表达的位移边界条件. 假设截面刚度  $S(x)$  与截面模量  $W(x)$  间的关系可用下式表示

$$S(x) = \varphi(x)W(x) \quad (2.9)$$

式中  $\varphi(x)$  是依赖于给定截面形式的函数. 若以  $\bar{\sigma}$  表示弯曲容许应力, 那末等强度设计要求为

$$W(x) = \frac{|M(x)|}{\bar{\sigma}} \quad (2.10)$$

将上式代入 (2.9) 式得

$$S(x) = \varphi(x) \frac{|M(x)|}{\bar{\sigma}} \quad (2.11)$$

又将(2.11)式代入(2.7)和(2.8)式得

$$\int_0^l \frac{M}{\varphi|M|} \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = 0 \quad (2.12)$$

$$\int_0^l \frac{M}{\varphi|M|} \frac{\partial M}{\partial R_0} dx = 0 \quad (2.13)$$

上述两方程的解给出了等强度梁的支座反力 $M_0$ 和 $R_0$ ，回代到(2.5)式和(2.11)式就得到等强度设计的弯矩分布和刚度分布。

显然上述讨论可以直接推广到具有 $n$ 个未知支座反力情形，此时有独立未知量 $(n-2)$ 个，相应地有一组形为(2.12)或(2.13)式的 $(n-2)$ 个方程组成的方程组。下节将用具体实例说明这一求解过程。

### 三、等强度设计例

例1 一端简支一端固定承受强度为 $q$ 的均布载荷梁(图2)。

梁内的弯矩为

$$M(x) = R_0 x - \frac{1}{2} q x^2 \quad (3.1)$$

其中 $R_0$ 为左端支座反力，是独立变数。考虑矩形截面梁，其宽度 $b$ 不变，高度 $h=h(x)$ 可变，我们有

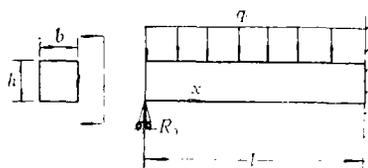


图 2

$$\varphi(x) = -\frac{E}{2} h(x) \quad (3.2)$$

由 $W = bh^2/6$ 及(2.10)和(3.1)式可得 $h(x)$ 的表达式

$$h(x) = \sqrt{\frac{6}{b\bar{\sigma}}} \sqrt{\left| R_0 x - \frac{1}{2} q x^2 \right|} \quad (3.3)$$

将(3.1)，(3.2)和(3.3)式代入(2.13)式并消去非零常数得到

$$\int_0^l \frac{Mx}{|M| \sqrt{\left| R_0 x - \frac{1}{2} q x^2 \right|}} dx = 0 \quad (3.4)$$

十分明显，对等强度梁为使上式成立，梁内除 $x=0$ 外还必须有弯矩零点。又从(3.1)式令 $M(x)=0$ 可得 $x_0=2R_0/q$ 为梁内除 $x=0$ 外的唯一弯矩零点。且由 $x_0>0$ 的要求知 $R_0>0$ 。因而在 $0 < x < x_0$ 段弯矩为正值，在 $x_0 < x < l$ 段弯矩为负值。于是(3.4)式化为

$$\int_0^{2R_0/q} \frac{x dx}{\sqrt{R_0 x - \frac{1}{2} q x^2}} - \int_{2R_0/q}^l \frac{x dx}{\sqrt{\frac{1}{2} q x^2 - R_0 x}} = 0 \quad (3.5)$$

利用初等积分变换将上式积分得到

$$\ln \left| \frac{2 + \sqrt{2q} t_0}{2 - \sqrt{2q} t_0} \right| = \frac{\sqrt{2q} t_0}{1 - \frac{1}{2} q t_0^2} + \pi \quad (3.6)$$

$$\text{式中 } t_0 = \sqrt{\frac{2l}{ql - 2R_0}} \quad (3.7)$$

对于给定的  $q, l$  值用迭代法容易从 (3.6) 式解得  $t_0$ , 继而用 (3.7) 式得到  $R_0$ . 将求得的  $R_0$  代入 (3.1)、(3.3) 式并应用 (3.2) 和 (2.11) 式可求得等强度梁的弯矩、梁高和刚度的解析表达式. 作为一个数值例子采用参考文献 [1] 算例 1 中所用的梁参数  $l=900\text{cm}$ ,  $q=100\text{kg/cm}$ ,  $b=24\text{cm}$ ,  $\bar{\sigma}=1600\text{kg/cm}^2$ . 通过简单运算可以得到

$$h(x) = 0.125\sqrt{|294.7028x - 0.5x^2|} \quad (3.8)$$

由此算得梁的体积为

$$V = \int_0^l bhdx = 504704.08\text{cm}^3$$

这一体积为参考文献 [1] 中将梁分成 45 段所得体积  $513393.26\text{cm}^3$  的 98.3%. 图 3 显示了用本方法所得等强度梁的半高度变化曲线 (实线表示), 并同参考文献 [1] 将梁分成 45 段所得之结果 ( $\times\times$  表示) 作了比较.

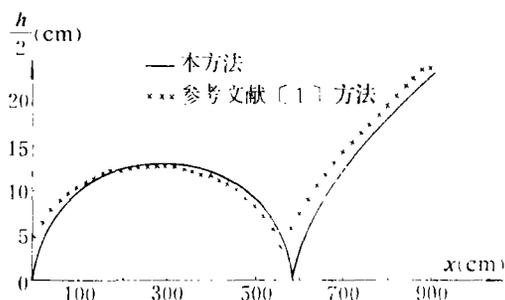


图3 例1所得梁的半高度变化

例2 两端固定承受强度为  $q$  的均布载荷梁 (图4).

由对称性知  $R_0 = R_l = ql/2$ , 且只须考虑

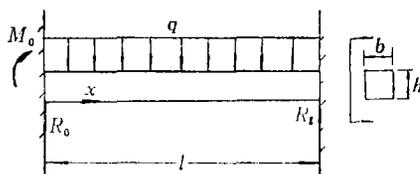


图4

$0 \leq x \leq l/2$  段. 显然独立支座反力只有  $M_0$  一个. 同例1, 研究等宽度  $b$ , 高度  $h$  可变的矩形截面梁. 我们有

$$M(x) = M_0 + \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad (3.9)$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{6}{b\bar{\sigma}}} \sqrt{\left| M_0 + \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \right|} \quad (3.10)$$

确定  $M_0$  的积分为

$$-\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qlx - M_0}} + \int_{x_0}^{l/2} \frac{dx}{\sqrt{-\frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}qlx + M_0}} = 0 \quad (3.11)$$

式中  $x_0 = l/2 - \sqrt{(l/2)^2 + 2M_0/q}$  是弯矩  $M(x)$  的零点. 上式积分后得到

$$\ln \left[ \frac{\sqrt{-M_0} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{ql}}{\sqrt{\frac{1}{8}ql^2 + M_0}} \right] = -\frac{\pi}{2} \quad (3.12)$$

若采用参考文献 [1] 算例 2 的同样数据:  $l=900\text{cm}$ ,  $q=100\text{kg/cm}$ ,  $b=21\text{cm}$ ,  $\bar{\sigma}=1600\text{kg/cm}^2$ , 则从 (3.12) 式解得  $M_0 = -8516830\text{kg}\cdot\text{cm}$ . 代入 (3.10) 式得

$$h(x) = 0.1336306\sqrt{|85168.3 - 450x + 0.5x^2|} \quad (3.13)$$

并算得等强度梁的体积  $V=368533.28\text{cm}^3$ , 为参考文献[1]将梁分成45段所得体积  $389076.70\text{cm}^3$  的 94.7%。图5是本文所算得的半高度曲线(实线表示)与参考文献[1]结果( $\times\times$ 表示)的比较。

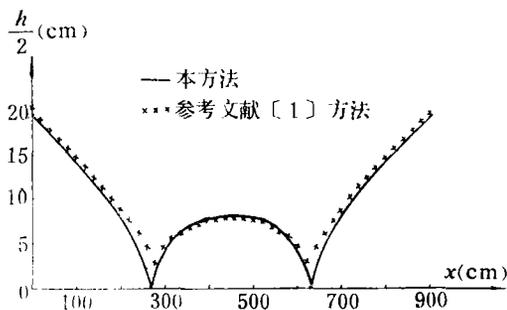


图5 例2所得梁的半高度变化

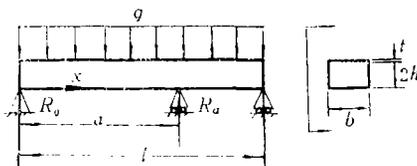


图6

例3 承受强度为  $q$  的均布载荷的连续梁(图6)。

以  $R_0$  为独立支座反力可得

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + R_0x + \frac{l}{l-a}\left(\frac{1}{2}ql - R_0\right)(x-a)\{x-a\}^\circ \quad (3.14)$$

确定  $R_0$  的方程为

$$\int_0^l \frac{M}{\varphi|M|} \left[ x - \frac{l}{l-a}(x-a)\{x-a\}^\circ \right] dx = 0 \quad (3.15)$$

考虑由两种材料组成的夹层梁, 中间层具有高  $2h$  宽  $b$  的等矩形截面。上下为由同一材料组成的同样形式的表面层, 其宽度  $b$  固定, 厚度  $t(x)$  沿梁轴可变。设  $t \ll h$ , 且截面的弯矩均有表面层承受, 则截面的刚度可表为

$$S(x) = 2Ebh^2t(x) \quad (3.16)$$

式中  $E$  为弹性模量。截面模量

$$W(x) = 2Ebht(x) \quad (3.17)$$

于是  $\varphi(x) = h$  为常量。由结构的支座形式和等强度梁的要求(3.15)式不难判断弯矩在  $0 < x < a$  和  $a < x < l$  两跨中各有一个零点, 这样(3.15)式可写为(消去非零常数  $h$ )

$$\int_0^{x_0} x dx - \int_{x_0}^{x_1} \left[ x - \frac{l}{l-a}(x-a)\{x-a\}^\circ \right] dx + \int_{x_1}^l \left[ x - \frac{l}{l-a}(x-a) \right] dx = 0 \quad (3.18)$$

式中  $x_0 = \frac{2R_0}{q}$ ,  $x_1 = \frac{a}{l-a} \left( l - \frac{2R_0}{q} \right)$  (3.19)

是弯矩零点的坐标。将(3.18)式中积分求出可得

$$A\bar{x}^2 + B\bar{x} + C = 0 \quad (3.20)$$

其中  $\bar{x} = x_1/l$  (3.21)

为  $a < x < l$  跨中弯矩零点的无量纲坐标, 系数

$$A = 1 - 3\eta + 3\eta^2, \quad B = -2\eta + 4\eta^2 - 4\eta^3, \quad C = \eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{1}{2}\eta^4$$

而  $\eta = a/l$  是中间支座位置的无量纲坐标。方程(3.20)的判别式为

$$\Delta = B^2 - 4AC = 2\eta^3(1-\eta)(-5\eta^2 + 5\eta - 1)$$

由于  $0 < \eta < 1$ , 为此方程(3.20)有解必须有

$$-5\eta^2 + 5\eta - 1 \geq 0$$

满足上式的  $\eta$  为

$$0.2763932 < \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 = 0.7236068 \quad (3.22)$$

即对具有一个中间铰支座的夹层连续梁, 在均布载荷作用下, 只有当中间支座的位置满足(3.22)式时才能实现等强度设计. 有趣的是若允许有“退化”情形即让  $a=0$  ( $\eta=0$ ) 或  $a=l$  ( $\eta=1$ ) 使中间支座事实上消失, 则因  $\Delta=0$ , 等强度梁仍存在. 显然由于“退化”情形是一静定结构可容易得到等强度梁的厚度分布  $t(x)$ .

在中间支座坐标满足(3.22)式条件下, 由方程(3.20)可解得  $\bar{x}$ , 将(3.21)代入(3.19)的第二式可得等强度梁的  $R_0$  值, 最后由(3.17)、(2.10)和(3.14)式可得到  $t(x)$ .

以上三例是通过事先判断弯矩  $M(x)$  的零点来计算等强度梁的支座反力, 进而得到整个问题的解. 但在载荷或支承情况比较复杂的情形是不易事先作出判断的, 在这种情况下可用迭代修正法来求得相应于等强度设计的正确支座反力. 我们以下面的简单例子来说明这一方法.

例4 一端简支一端固定梁承受一集中力和一力偶(图7).

设  $l=10^3\text{cm}$ ,  $a=l/4$ ,  $P=2 \times 10^4\text{kg}$ ,  $T=5 \times 10\text{kg-cm}$

$$\text{则} \quad M(x) = R_0 x - P \left(x - \frac{l}{4}\right) \left\{x - \frac{l}{4}\right\}^+ + T \left\{x - \frac{3}{4}l\right\}^+ \quad (3.23)$$

其中  $R_0$  为左端支座反力. 梁截面仍用例3的夹层形式, 等强度梁的支座反力  $R_0$  须满足

$$L = \int_0^l \frac{M}{|M|} x dx = 0 \quad (3.24)$$

由于不能事先确定等强度梁的弯矩零点分布形式, 我们采用给定  $R_0$  的一个初始估计值  $R_0^1$ , 计算积分(3.24)的值. 由于  $R_0^1$  给出, 由(3.23)式的弯矩公式可以容易确定弯矩零点的位置, 因而(3.24)式中的积分可以进行. 若

$$L^1 = L(R_0^1) = \left| \int_0^l \frac{M(x, R_0^1)}{|M(x, R_0^1)|} x dx \right| \leq \varepsilon$$

( $\varepsilon$  为事先给定的容差), 则认为已求出正确的  $R_0$ , 令  $R_0 = R_0^1$ . 否则再给一  $R_0^2$  值, 重复进行上述过程, 直到

$$L^n = L(R_0^n) = \left| \int_0^l \frac{M(x, R_0^n)}{|M(x, R_0^n)|} x dx \right| \leq \varepsilon$$

满足, 迭代结束. 并令  $R_0 = R_0^n$ . 序列  $R_0^1, R_0^2, \dots$  的产生可以采用任一种有效的求函数零点的方法如弦截法, 优选法, 拟牛顿法<sup>[4]</sup>等. 这里用弦截法求得  $R_0 = 9.1535 \times 10^{-3}\text{kg}$ , 相应的积分值  $L = 4.304 \times 10^{-6}$ .

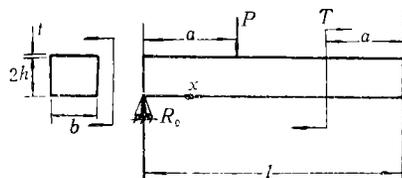


图 7

## 四、结 语

本文基于最小余能原理提出了静不定梁等强度设计的一个一般方法. 它可适用于各种受载条件和支座方式. 例证表明对于简单形式的载荷和支座, 由于存在有限形式的积分, 可以很容易得到等强度设计解. 对于较为复杂的情形, 需要用迭代法计算等强度设计的支座反力. 最后我们指出, 当确定支座反力的方程组内被积函数形式复杂不易求得有限形式的积分时, 可以用数值积分方法求出积分值. 因此总可以用数值积分与迭代修正相结合的方法求任

—静不定梁的等强度设计。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 叶开沅、俞焕然, 超静定等强度梁, 兰州大学学报, 力学专号 (1983).
- [ 2 ] 叶开沅, 非均匀变厚度弹性体力学的若干问题的一般解, *IV*, 兰州大学学报, 力学专号, 1 (1979).
- [ 3 ] Washizu, Kyuichiro, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, third edition (1982).
- [ 4 ] 刘德贵等, 《FORTRAN 算法汇编》, 第一分册, 国防工业出版社 (1980).

## Equi-Strength Design for Statically Indeterminate Beams

X. Tang      Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

### Abstract

In this paper a method for equi-strength design of statically indeterminate beams is presented, based on the principle of minimum complementary energy. And an analytical expression is derived for the stiffness variation of single or multi-span beams under the application of arbitrarily distributed loads, concentrated forces and couples.

Illustrated examples concerning beams with fixed width and variable height or sandwich beams with variable thickness of outer sheets are also given. The comparison with reported results shows the effectiveness of the proposed method.