应用数学和力学，第7卷第1期（1986年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

分析力学中的高阶Nielsen算子和高阶Euler算子

刘正福　金伏生　梅凤翔

（华东工学院）（长江航运科研所）（北京工业学院）

（薛大为推荐，1984年7月31日收到）

摘　要

本文提出与研究完整约束系统和高阶非完整约束系统相关的高阶 Nielsen 算子和高阶Euler 算子的定义，建立表示两类算子之间关系的若干定理，应用这些定理得到高阶约束系统的若干新型运动微分方程，最后举例说明新方程的应用。

一、引　言

由于自动调节理论、自动控制理论的发展，需要研究带二阶或更高阶非完整约束的力学系统。Mangeron, Deleanu[1] 和 Dolaptchiew[2] 得到许多重要结果。在文献[3][4]中，梅凤翔研究了一阶 Nielsen 算子和一阶 Euler 算子的定义、定理和应用。在文献[5]中，刘正福以予备公式的形式实际上已提出了完整系统的高阶 Nielsen 算子和高阶 Euler 算子之间的关系。

本文提出完整系统和高阶非完整系统的高阶 Nielsen 算子和高阶 Euler 算子的定义、定理以及若干应用。本文主要结果是式(2.3)，(2.12)，(2.27)，(3.3)，(3.5)，(3.9)，(3.10)，(3.13)，(3.15)，(3.20) 和 (3.24)。

二、定 义 和 定 理

1、 设力学系统的位置由 n 个广义坐标 q_1，q_2，…，q_n 来确定。研究某动力学函数 $f(q_s,\dot{q}_s,t)(s=1,2,\cdots,n)$。我们定义 m 阶 Nielsen 算子

$$N_s^m(\ )=\frac{\partial(\overset{(m)}{\ })}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-2\frac{\partial(\overset{(m-1)}{\ })}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}} \tag{2.1}$$

和高阶 Euler 算子

$$E_s^m(\ )=\frac{d}{dt}\frac{\partial(\overset{(m-1)}{\ })}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-\frac{\partial(\overset{(m-1)}{\ })}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}\qquad\left(\begin{matrix}m=1,2,\cdots\cdots\\ s=1,2,\cdots,\ n\end{matrix}\right) \tag{2.2}$$

其中 $(m-1)$ 和 (m) 表示对时间 t 的 $(m-1)$ 阶和 (m) 阶导数。

定理 1　对任意函数 $f(q_s,\dot{q}_s,t)$，我们有[5]

$$N_s^m(f)=E_s^m(f) \tag{2.3}$$

证明　因

$$\overset{(m)}{f}=\frac{d}{dt}\overset{(m-1)}{f}=\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(k)}{q_l}}\overset{(k+1)}{q_l} \tag{2.4}$$

故

$$\frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}=\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(k)}{q_l}}\overset{(k+1)}{q_l}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)+\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)\overset{(k+1)}{q_l} \tag{2.5}$$

由(2.1)和(2.2)，得到

$$N_s^m(f)=\frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-2\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\left(\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\right)\overset{(k+1)}{q_l}-\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}-\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}}=E_s^m(f) \tag{2.6}$$

2、 令力学系统的位置由 n 个广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 来确定。它的运动受有 g 个 m 阶理想非完整约束

$$\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}(q_s,\ \overset{(1)}{q_s},\ \overset{(2)}{q_s},\cdots,\ \overset{(m-1)}{q_s},\ \overset{(m)}{q_\sigma},\ t) \tag{2.7}$$

$$(\beta=1,2,\cdots,g;\ \varepsilon=n-g;\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\ s=1,2,\cdots,n)$$

我们定义 m 阶 Nielsen 算子

$$N_\sigma^m(\quad)=\frac{\partial(\widetilde{\overset{(m)}{\ }})}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}-2\cdot\frac{\partial(\widetilde{\overset{(m-1)}{\ }})}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}} \tag{2.8}$$

和 m 阶 Euler 算子

$$E_\sigma^m(\quad)=\frac{d}{dt}\frac{\partial(\widetilde{\overset{(m-1)}{\ }})}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}-\frac{\partial(\widetilde{\overset{(m-1)}{\ }})}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}} \tag{2.9}$$

其中～表示考虑到约束(2.7)而变换了的量。

对动力学函数 $f(q_s,\dot{q}_s,t)$ 相对时间 t 求 $(m-1)$ 次导数和 m 次导数：$\overset{(m-1)}{f}$，$\overset{(m)}{f}$，并在其

中借助约束（2.7）消去 $\overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}$，$\overset{(m+1)}{q}_{\epsilon+\beta}$，所得表达式记作 $\widetilde{\overset{(m-1)}{f}}$，$\overset{(\tilde{m})}{f}$，亦即

$$\widetilde{\overset{(m-1)}{f}}(q_s, \overset{(1)}{q}_s, \overset{(2)}{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_s, t)$$
$$= \overset{(m-1)}{f}[q_s, \overset{(1)}{q}_s, \overset{(2)}{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_\sigma, \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}(q_s, \overset{(1)}{q}_s, \overset{(2)}{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_\sigma, t), t] \tag{2.10}$$

$$\overset{(\tilde{m})}{f}(q_s, \overset{(1)}{q}_s, \overset{(2)}{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_\sigma, \overset{(m+1)}{q}_\sigma, t)$$
$$= \overset{(m)}{f}[q_s, \overset{(1)}{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_\sigma, \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}(q_s, \overset{(1)}{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_\sigma, t), \overset{(m+1)}{q}_\sigma,$$
$$\overset{(m+1)}{q}_{\epsilon+\beta}(q_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_\sigma, \overset{(m+1)}{q}_\sigma, t), t] \tag{2.11}$$

定理 2. 对任意函数 f，我们有

$$N_\sigma^m(f) = E_\sigma^m(f) + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \widetilde{\overset{(m-1)}{f}}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\beta}} \frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \tag{2.12}$$

证明 由（2.10）有

$$\frac{\partial \widetilde{\overset{(m-1)}{f}}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} = \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} \frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \widetilde{\overset{(m-1)}{f}}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{d}{dt} \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} \cdot \frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \tag{2.13}$$

由（2.11）有

$$\frac{\partial \overset{(\tilde{m})}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}} = \frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} \frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m+1)}{q}_{\epsilon+\beta}} \frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_{\epsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

由定理 1，有

$$\frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}$$

$$\frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} + \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\beta}}$$

因此，

$$\frac{\partial \overset{(\tilde{m})}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}} \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\epsilon+\beta}} \right) \frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{g} \frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m+1)}{q}_{\epsilon+\beta}} \frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_{\epsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\overset{(m-1)}{f}}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}=\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}} \tag{2.15}$$

容易证明[5]

$$\frac{\partial \overset{(m)}{f}}{\partial \overset{(m+1)}{q}_{s+\beta}}=\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}} \tag{2.16}$$

比较 (2.13) 和 (2.14)，并注意到 (2.15) 和 (2.16)，我们得到

$$N_\sigma^m(f)=E_\sigma^m(f)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{s+\beta}}\cdot\frac{\partial \widetilde{\overset{(m-1)}{f}}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{s+\beta}}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{f}}{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}\left\{\frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}-\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{s+\gamma}}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\gamma}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}\right\} \tag{2.17}$$

容易证明等式

$$\frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}}+\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\sigma}}+\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\beta}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{s+\gamma}}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{s+\gamma}}{\partial \overset{(m)}{q_\sigma}} \tag{2.18}$$

将 (2.18) 代入 (2.17)，便得 (2.12)。

3、 令力学系统的位置由 n 个广义坐标，$q_1,q_2,\cdots,q_n$ 来确定。它的运动受有 g 个m阶非完整约束

$$f_\beta(q_s,\overset{(1)}{q_s},\overset{(2)}{q_s},\cdots,\overset{(m)}{q_s},t)=0 \tag{2.19}$$

引进准坐标 π_s，其对时间的 m 阶导数为

$$\left.\begin{aligned}\overset{(m)}{\pi_\sigma}&=\overset{(m)}{\pi_\sigma}(q_s,\overset{(1)}{q_s},\overset{(2)}{q_s},\cdots,\overset{(m)}{q_s},t)\\ \overset{(m)}{\pi}_{s+\beta}&=f_\beta(q_s,\overset{(1)}{q_s},\overset{(2)}{q_s},\cdots,\overset{(m)}{q_s},t)\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

其中 $\overset{(m)}{\pi_\sigma}$ 是彼此独立的，$\overset{(m)}{\pi}_{s+\beta}$ 按约束方程 (2.19) 而取为零。由 (2.20) 解出$\overset{(m)}{q_s}$

$$\overset{(m)}{q_s}=\overset{(m)}{q_s}(q_l,\overset{(1)}{q_l},\overset{(2)}{q_l},\cdots,\overset{(m-1)}{q_l},\overset{(m)}{\pi_\sigma},t) \tag{2.21}$$

$$(l=1,2,\cdots,n)$$

研究某动力学函数 $f(q_s,\dot{q}_s,t)$，将其对时间求 $(m-1)$ 次导数和 m 次导数：$\overset{(m-1)}{f}$，$\overset{(m)}{f}$，并令

$$\overset{(m-1)*}{f}(q_s,\overset{(1)}{q_s},\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{\pi_\sigma},t)=\overset{(m-1)}{f}[q_s,\overset{(1)}{q_s},\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_s}(q_l,\overset{(1)}{q_l},\cdots,\overset{(m-1)}{q_l},\overset{(m)}{\pi_\sigma},t),t] \tag{2.22}$$

$$\overset{(m)*}{f}(q_s,\overset{(1)}{q_s},\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{\pi_\sigma},\overset{(m+1)}{\pi_\sigma},t)=\overset{(m)}{f}[q_s,\overset{(1)}{q_s},\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_s}(q_l,\overset{(1)}{q_l},\cdots,\overset{(m-1)}{q_l},\overset{(m)}{\pi_\sigma},t),$$

$$\overset{(m+1)}{q}_s\ (q_l,\ \overset{(1)}{q}_l,\cdots,\ \overset{(m-1)}{q}_l\ ,\ \overset{(m)}{\pi}_\sigma,\ \ \overset{(m+1)}{\pi}_\sigma\ ,t),t] \tag{2.23}$$

我们定义 m 阶 Nielsen 算子和 m 阶 Euler 算子

$$N_\sigma^{m*}(\ \ )=\frac{\partial\overset{(m)*}{(\ \ )}}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial\overset{(m-1)*}{(\ \ )}}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma} \tag{2.24}$$

$$E_\sigma^{m*}(\ \ )=\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m-1)*}{(\ \ )}}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\overset{(m-1)*}{(\ \ )}}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma} \tag{2.25}$$

其中

$$\frac{\partial\overset{(m-1)*}{(\ \ )}}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)*}{(\ \ )}}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma} \tag{2.26}$$

定理 3 对任意函数 f，我们有

$$N_\sigma^{m*}(f)=E_\sigma^{m*}(f) \tag{2.27}$$

证明 由 (2.22) 和 (2.26)，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overset{(m-1)*}{f}}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)*}{f}}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}\\&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\end{aligned} \tag{2.28}$$

由(2.22)，有

$$\frac{\partial\overset{(m-1)*}{f}}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m-1)*}{f}}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}=\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\cdot\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma} \tag{2.29}$$

由定理 1、(2.16)和(2.23)，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overset{(m)*}{f}}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{f}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m)}{f}}{\partial\overset{(m+1)}{q}_s}\frac{\partial\overset{(m+1)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}\\&=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}+\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}\right)\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\frac{\partial\overset{(m+1)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}\end{aligned}$$

注意到 (2.28) 和(2.29)，我们有

$$N_\sigma^{m*}(f)=E_\sigma^{m*}(f)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{f}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\left(\frac{\partial\overset{(m+1)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right) \tag{2.30}$$

容易证明等式

$$\frac{\partial\overset{(m+1)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}+\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma} \tag{2.31}$$

将 (2.31) 代入 (2.30) 便得 (2.27)。

定理 1、定理 2 和定理 3 是文献[4]中的定理 1、定理 2 和定理 3 的推广。当$m=1$时，本文的三个定理蜕化为文献 [4] 中的三个定理。

三、定理的应用

应用定理 1、2、3，可将高阶约束系统的已知运动微分方程转化为新型的运动微分方程。

1、 理想完整力学系统的 Mangeron 方程[1][2]为

$$\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}-(m+1)\frac{\partial T}{\partial q_s}\right\}=Q_s \quad \begin{pmatrix} m=1,2,\cdots; \\ s=1,2,\cdots,n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

其中 Q_s 为广义力。在方程 (3.1) 中以 $m-1$ 代替 m，便得

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{1}{m}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}-\frac{m-1}{m}Q_s \tag{3.2}$$

将 (3.2) 代入 (3.1)，得到[5]

$$m\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}}-(m+1)\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}}=Q_s \tag{3.3}$$

利用定理 1，有

$$N_s^m(T)=E_s^m(T) \tag{3.4}$$

将 (3.4) 代入 (3.3)，得到[5]

$$m\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial \overset{(m+1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}}=Q_s \tag{3.5}$$

2、 设系统受有形如 (2.19) 的约束，且虚位移满足关系

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\delta \overset{(m)}{q}_s=0 \tag{3.6}$$

我们有带乘子的方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_s} \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.7}$$

容易证明

$$\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \tag{3.8a}$$

和

$$\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}-(m-1)\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s} \tag{3.8b}$$

将（3.8a）和（3.8b）代入（3.7)，得到

$$m\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}-\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\beta} \tag{3.9}$$

将（3.4）代入（3.9)，我们得到

$$m\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}-(m+1)\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_s} \tag{3.10}$$

方程（3.10）可称为 m 阶非完整系统带乘子的广义 Nielsen 方程。

3、 对具有 m 阶理想非完整约束（2.7）的力学系统，如果虚位移满足条件

$$\delta\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}\delta\overset{(m)}{q}_\sigma \tag{3.11}$$

那么有广义坐标下的 Чаплыгин 型方程[6]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{\widetilde{(m-1)}}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}=\tilde{Q}_\sigma\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.12}$$

其中

$$\tilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

将(3.8b)，(2.13)，(2.15)代入(3.12)，得到更加对称的形式

$$m\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{\widetilde{(m-1)}}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \overset{\widetilde{(m-1)}}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(m\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}\right)=\tilde{Q}_\sigma \tag{3.13}$$

定理 2 给出

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{\widetilde{(m-1)}}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}=\frac{\partial \overset{\widetilde{(m)}}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-\frac{\partial \overset{\widetilde{(m-1)}}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{\widetilde{(m-1)}}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma} \tag{3.14}$$

现将（3.14）及（2.18）代入方程(3.13)，我们得到

$$m\frac{\partial \overset{\widetilde{(m)}}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}}-(m+1)\frac{\partial \overset{\widetilde{(m-1)}}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}-(m+1)\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\left(m\frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}-(m+1)\frac{\partial \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\sigma}\right)=\tilde{Q}_\sigma$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.15}$$

方程（3.15）可称为 m 阶非完整约束系统广义坐标下的广义 Nielsen 方程。

当 $m=1$ 时，方程（3.15）成为

$$\frac{\partial\dot{\tilde{T}}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\tilde{T}}{\partial q_\sigma}-2\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial q_{s+\beta}}\frac{\partial\dot{q}_{s+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{s+\beta}}\left(\frac{\partial\ddot{q}_{s+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}-2\frac{\partial\dot{q}_{s+\beta}}{\partial q_\sigma}\right)=\tilde{Q}_\sigma \tag{3.16}$$

这就是文献[3]中给出的广义 Nielsen 方程。

当 $m=2$ 时，方程（3.15）给出

$$2\frac{\partial\dot{\tilde{T}}}{\partial\ddot{q}_\sigma}-3\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{q}_\sigma}-3\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_{s+\beta}}\frac{\partial\ddot{q}_{s+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\dot{T}}{\partial\ddot{q}_{s+\beta}}\left(2\frac{\partial\dddot{q}_{s+\beta}}{\partial\ddot{q}_\sigma}-3\frac{\partial\ddot{q}_{s+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)=\tilde{Q}_\sigma \tag{3.17}$$

这是二阶非完整约束系统广义坐标下的广义 Nielsen 方程。

4、 对于具有 m 阶理想非完整约束（2.19）的力学系统，且虚位移满足条件

$$\delta\overset{(m)}{q}_s=\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}\delta\overset{(m)}{\pi}_\sigma \tag{3.18}$$

我们有准坐标下的 Чаплыгин 型方程[6]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m-1)*}{T}}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}=P^*_\sigma$$

$$(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon) \tag{3.19}$$

其中

$$P^*_\sigma=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}$$

将(3.8b)、(2.28)、(2.29)代入(3.19)，并注意到(2.26)，得到

$$m\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m-1)*}{T}}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\overset{(m-1)*}{T}}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\overset{(m-1)}{T}}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\left(m\frac{d}{dt}\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m)}{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\overset{(m)}{q}_s}{\partial\overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right)=P^*_\sigma \tag{3.20}$$

如果 $m=1$，则方程（3.20）给出

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial T^*}{\partial\pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\pi_\sigma}\right)=P^*_\sigma \tag{3.21}$$

这是一阶非完整约束系统准坐标下的广义 Чаплыгин 方程[7]。

如果 $m=2$，则方程（3.20）给出

$$2\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{T}^*}{\partial\ddot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\dot{T}^*}{\partial\dot{\pi}_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\dot{T}}{\partial\ddot{q}_s}\left(2\frac{d}{dt}\frac{\partial\ddot{q}_s}{\partial\ddot{\pi}_\sigma}-\frac{\partial\ddot{q}_s}{\partial\dot{\pi}_\sigma}\right)=P^*_\sigma \tag{3.22}$$

现利用定理 3，将方程（3.20）过渡到 Nielsen 形式。由定理 3 知

$$N_\sigma^{m*}(T)=E_\sigma^{m*}(T),\quad N_\sigma^{m*}(\dot{q}_s)=E_\sigma^{m*}(\dot{q}_s) \tag{3.23}$$

将(3.23)，(2.16)代入方程(3.20)，我们得到

$$m\frac{\partial \overset{(m)}{T}{}^*}{\partial \overset{(m)}{\pi}_\sigma}-(m+1)\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}{}^*}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\left[m\frac{\partial \overset{(m+1)}{q}_s}{\partial \overset{(m)}{\pi}_\sigma}-(m+1)\frac{\partial \overset{(m)}{q}_s}{\partial \overset{(m-1)}{\pi}_\sigma}\right]=P_\sigma^*\quad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{3.24}$$

方程（3.24）可称为m阶非完整系统准坐标下的广义 Nielsen 方程。

如果 $m=1$，则方程（3.24）成为

$$\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-2\frac{\partial T^*}{\partial \pi_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_s}-2\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \pi_\sigma}\right)=P_\sigma^* \tag{3.25}$$

$$(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon)$$

这是一阶非完整约束系统准坐标下的广义 Nielsen 方程。

如果 $m=2$，则方程（3.24）给出二阶非完整约束系统准坐标下的广义Nielsen方程[3][8]

$$2\frac{\partial \ddot{T}^*}{\partial \ddot{\pi}_\sigma}-3\frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \dot{\pi}_\sigma}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{q}_s}\left(2\frac{\partial \dddot{q}_s}{\partial \ddot{\pi}_\sigma}-3\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \dot{\pi}_\sigma}\right)=P_\sigma^* \tag{3.26}$$

$$(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon)$$

四、例　　子

一质点质量为 m，主动力为 Q_1，Q_2，Q_3，它的运动受有二阶非线性非完整约束[9]

$$\ddot{q}_3=\ddot{q}_1\ddot{q}_2 \tag{4.1}$$

现应用（3.17）来建立质点运动微分方程。点的动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$$

因此

$$\dot{T}=m(\dot{q}_1\ddot{q}_1+\dot{q}_2\ddot{q}_2+\dot{q}_3\ddot{q}_3)$$

$$\ddot{T}=m(\ddot{q}_1^2+\ddot{q}_2^2+\ddot{q}_3^2+\dot{q}_1\dddot{q}_1+\dot{q}_2\dddot{q}_2+\dot{q}_3\dddot{q}_3)$$

$$\tilde{\dot{T}}=m(\dot{q}_1\ddot{q}_1+\dot{q}_2\ddot{q}_2+\dot{q}_3\ddot{q}_1\ddot{q}_2)$$

$$\tilde{\ddot{T}}=m[\ddot{q}_1^2+\ddot{q}_2^2+\ddot{q}_1^2\ddot{q}_2^2+\dot{q}_1\dddot{q}_1+\dot{q}_2\dddot{q}_2+\dot{q}_3(\ddot{q}_1\dddot{q}_2+\dddot{q}_1\ddot{q}_2)]$$

我们有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{\ddot{T}}}{\partial \ddot{q}_1}=m(2\ddot{q}_1+2\ddot{q}_1\ddot{q}_2^2+\dot{q}_3\dddot{q}_2)\\
&\frac{\partial \tilde{\ddot{T}}}{\partial \ddot{q}_2}=m(2\ddot{q}_2+2\ddot{q}_2\ddot{q}_1^2+\dot{q}_3\dddot{q}_1)\\
&\frac{\partial \tilde{\ddot{T}}}{\partial \dot{q}_1}=m\dddot{q}_1,\quad \frac{\partial \tilde{\ddot{T}}}{\partial \dot{q}_2}=m\dddot{q}_2,\quad \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_3}=m\ddot{q}_3=m\ddot{q}_1\ddot{q}_2\\
&\frac{\partial \ddot{q}_3}{\partial \ddot{q}_1}=\ddot{q}_2,\quad \frac{\partial \ddot{q}_3}{\partial \ddot{q}_2}=\ddot{q}_1,\quad \frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{q}_3}=m\dot{q}_3
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

又

$$\dddot{q}_3=\dddot{q}_1\ddot{q}_2+\ddot{q}_1\dddot{q}_2$$

故

$$\frac{\partial\dddot{q}_3}{\partial\ddot{q}_1}=\dddot{q}_2,\quad \frac{\partial\dddot{q}_3}{\partial\dddot{q}_2}=\dddot{q}_1,\quad \frac{\partial\ddot{q}_3}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial\ddot{q}_3}{\partial\dot{q}_2}=0 \tag{4.3}$$

将(4.2)，(4.3)代入方程 (3.17) 并化简，得到

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{q}_1(1+\ddot{q}_2^2)=Q_1+Q_3\ddot{q}_2 \\ m\ddot{q}_2(1+\ddot{q}_1^2)=Q_2+Q_3\ddot{q}_1 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

这与文献[9]的结果一致。

参考文献

[1] Mangeron, D. and S. Deleanu, *C. R. Acak. Bulg. Sc.*, 15 (1962).

[2] Dolaptchiew, B., *C. R. Acad. Sc. Paris.*, t262, N11 (1966).

[3] Mei Feng-xiang, Nouvelles equations du mouvement des systemes mecaniques non holonomes. Thèse d'Etat, Nantes, France, Mai (1982).

[4] Mei Feng-xiang, Symposium on modern Developments in analytical mechanics. Proceedings of the IUTAM-ISIMM, Turin, June (1982), 7-11, Attidella Accademia delle Scienze di Torino, Supptemento al, Vol 117 (1983).

[5] 刘正福，华东工程学院建校廾周年学术报告会论文，N21870 (1980).

[6] 梅凤翔，北京工业学院学报，2(1981).

[7] Новосело в В. С., *Уч. Зап. ЛГУ*, №217(1957).

[8] 梅凤翔，力学与实践，2, 3(1980).

[9] Hanel, G., *Theoretishe Mechanik*, s-v, (1949).

Nielsen's and Euler's Operators of Higher Order in Analytical Mechanics

Liu Zheng-fu

(East-China Engineering Institute, Nanjing)

Jin Fu-sheng

(Chang Jiang River Shipping Science Research Institute, Wuhan)

Mei Feng-xiang

(Beijing Institute of Technology, Beijing)

Abstract

In this paper, the definitions of Nielsen's and Euler's operators of higher order are presented. These operators are concerned in analysis for systems with holonomic constraints and non-holonomic constraints of hihger order. Some theorems indicating relation between the two operators are established. Moreover, Using the theorems, the new equations of mechanical systems with constraints of higher order are derived. Finally, an example is given.