

关于任意边界缺口或裂纹群的一类 解法——(IV)深度缺口或裂纹 群的计算*

欧阳鬯 朱 涵

(复旦大学应用力学系, 1984年9月26日收刊)

摘 要

本文是欧阳鬯所作文[1]研究任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法的继续(亦见[2]、[3])。这里我们利用该文作出的基本方法,进一步发展了关于边界深度裂纹或缺陷群问题的计算方法。数值计算实例表明,本文所给出的方法是行之有效的。本文结果扩充了“应力强度因子手册”的工作。

一、局部坐标间的级数转换关系

如果边界缺口或裂纹群中,至少有一个缺口的竖直方向深度或至少一条裂纹的长度超过了它与相邻缺口或裂纹间的距离,那么,这样的缺口或裂纹群就称为深度边界缺口或裂纹群,对于边界深度裂纹或缺口群,文献[1]、[2]、[3]中给出的方法就不能适用,其理由可说明如下:不失一般性,只考虑图1所示的两条裂纹的情况。取 $\phi(z) = z/4 + \phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)$,

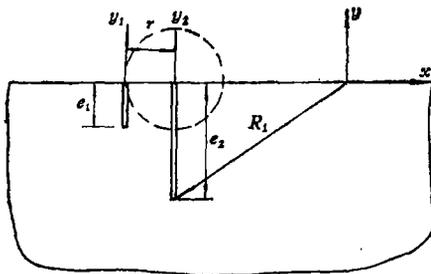


图 1

当处理第2条裂纹边界条件时,先把 $\phi_1(z_1)$ 表为 z_1 的负幂级数,利用 $z_1 = z_2 + r$,把 z_1^{-n} 变为 $r^{-n}(1+z_2/r)^{-n}$,然后再按照 z_2/r 的幂次展开。不过,当二条裂纹构成深度裂纹群时,有 $e_2/r > 1$,这里 e_2 为第二条裂纹之长。这样, $\phi_1(z_1)$ 按 z_2 幂级数展开的区域收敛范围为图1中虚线包围的部份,它不能包含虚线外部的那段裂纹。为了能够用共形映照方法处理裂纹边界条件,当然要求 $\phi_1(z_1)$ 关于 z_2 幂级数展开的收敛区域包含整个第二条裂

纹。因此,在 $e_2/r > 1$ 的情况下,作 z_2/r 幂级数展开时,这种形式的不同坐标间的转换关系就失效了。如果图1所示是二个半椭圆缺口或者是一个缺口、一条裂纹的问题,并且是深度

* 中国科学院科学基金资助的课题。

的, 情况将是同样的.

为了解决深度缺口或裂纹问题, 我们必须采用新的不同局部坐标间的级数转换关系. 这里我们采取文献[3]中, 所给出的问题解的形式. 为方便起见, 仍旧考虑图1所示的二条边界裂纹问题. 这时, $\phi_1(z_1)$ 的形式为:

$$\phi_1(z_1) = -\frac{1}{2i} \left(\sqrt{\frac{z_1 + ie_1}{z_1 - ie_1}} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,1}(z_1/e_1 + \sqrt{1 + (z_1/e_1)^2})^{-n} \quad (1.1)$$

对其展开式作如下考虑:

(a) 利用 $z_1 = z_2 + r$, 我们有:

$$\sqrt{\frac{z_1 + ie_1}{z_1 - ie_1}} = \sqrt{\frac{z_2 + r + ie_1}{z_2^2 + 2rz_2 + r^2 + e_1^2}} \quad (1.2)$$

令 $x = -r/\sqrt{r^2 + e_1^2}$, $t = z_2/\sqrt{r^2 + e_1^2}$, 代入 (1.2), 得:

$$\sqrt{\frac{z_1 + ie_1}{z_1 - ie_1}} = \left(t - x + i \sqrt{\frac{e_1}{r^2 + e_1^2}} \right) (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \quad (1.3)$$

我们知道: $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ 为勒让德多项式的母函数, 因为 $|x| = r/\sqrt{r^2 + e_1^2}$ 恒小于 1, 所以当 $|t| < 1$ 时, 有

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k \quad (1.4)$$

其中 P_k 为第 k 次勒让德多项式. (1.4) 等号右边的级数收敛区域为 $|t| = |z_2|/\sqrt{r^2 + e_1^2} < 1$. 由此, 我们得到:

$$\frac{1}{2i} \left(\sqrt{\frac{z_1 + ie_1}{z_1 - ie_1}} - 1 \right) = \frac{1}{2i} \left[\left(t - x + i \sqrt{\frac{e_1}{r^2 + e_1^2}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k - 1 \right] \quad (1.5)$$

(b) 利用 $z_1 = z_2 + r$, $t = z_2/\sqrt{r^2 + e_1^2}$, $x = -r/\sqrt{r^2 + e_1^2}$, 代入 $y_n = \left(\frac{z_1}{e_1} + \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{e_1} \right)^2} \right)^{-n}$,

我们有:

$$y_n = \left(\frac{z_2 + r}{e_1} + \sqrt{1 + \left(\frac{z_2 + r}{e_1} \right)^2} \right)^{-n} = \left(\frac{r^2 + e_1^2}{e_1^2} \right)^{-n/2} \left[t - x + (1 - 2xt + t^2)^{1/2} \right]^{-n} \quad (1.6)$$

将 y_n 对 t 求导, 可得:

$$\left. \begin{aligned} dy_n/dt &= -n(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} y_n = -n \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k \right) y_n \\ y_n|_{t=0} &= \left(\frac{r}{e_1} + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{e_1} \right)^2} \right)^{-n} = d_{n,0} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

这是一个以 $d_{n,0}$ 为初值的一阶常微分方程. 我们用幂级数解法求解, 设 $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} t^k$, 代入

(1.7) 并比较 t 的各幂次系数, 可得到:

$$d_{n,k+1} = -\frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^k d_{n,l} P_{k-l}(x) \quad (k=0, 1, 2, \dots; n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

这是一个很容易由计算机来实现的递推关系。由微分方程的幂级数解理论^[4]可知：若

$$2xt + t^2)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k \text{ 在 } |t| < 1 \text{ 收敛, 则由 (1.7)、(1.8) 决定的级数解 } y_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k}t^k$$

在 $|t| < 1$ 收敛。

这样，从 (a)、(b) 讨论可知：只要把 (a)、(b) 中的关系式相乘就可把 $\phi_1(z_1)$ 转换到 z_2 的坐标上来。且对应的收敛区域为 $|t| = |z_2|/\sqrt{r^2+e_1^2} < 1$ ，这比起以往的 $|z_2|/r < 1$ 收敛区域显然有了扩展。特别当 $e_1=e_2$ ， $e_2/\sqrt{r^2+e_1^2}$ 的数值总恒小于 1，这时，不管这两条裂纹多么接近，区域 $|t| < 1$ 总是包含了整个第 2 条裂纹，所以上述方法理论上是可行的。同理，对于 $\phi_2(z_2)$ 采取上述相同步骤，以转换到局部坐标 z_1 上来，可得到类似结论。对一般 N 个边界缺陷（包括裂纹或缺口）的情况也都是如此。

二、基本线性代数方程组

对一般 N 个边界缺陷如图 2 所示问题，我们先建立整体坐标系 $z=x+iy$ ，除此之外还要引进以 O_j 为原点，平行于 x 、 y 轴的局部坐标系 $z_j=x_j+iy_j$ ($j=1, 2, \dots, N$)，这里已将缺陷从左到右进行编号。若以 r_{jk} 记线段 O_jO_k 之长，以 r_j 记线段 OO_j 之长，可有：

$$z_k = \begin{cases} z_j - r_{jk} & (j < k) \\ z_j + r_{jk} & (j > k) \end{cases} \quad (z = z_j + r_j) \quad (2.1)$$

此外，我们还对 $\phi(z)$ 进行了无量纲化，即设 $\phi(z)$ 已被 $\sigma_{x\infty}$ 除过。根据文献[3]，取问题解的应力函数 $\phi(z)$ 具有如下形式：

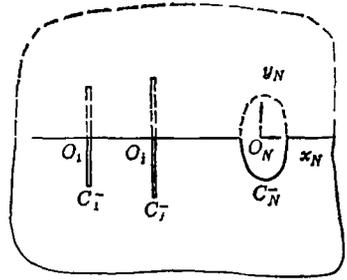


图 2 N 个边界缺陷

$$\left. \begin{aligned} \phi(z) &= z/4 + \sum_{k=1}^N \phi_k(z_k) \\ \phi_k(z_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,k} \left(R_k \frac{z_k}{e_k} + R_k \sqrt{1 + \left(\frac{z_k}{e_k}\right)^2} \right)^{-n}, \quad R_k = \left(\frac{a_k + b_k}{a_k - b_k}\right)^{1/2} \\ e_k &= \sqrt{a_k^2 - b_k^2} \quad (\text{当第 } k \text{ 个缺陷为缺口时}), \\ \phi_k(z_k) &= \frac{1}{2i} \left(\sqrt{\frac{z_k + ie_k}{z_k - ie_k}} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,k} \left(\frac{z_k}{e_k} + \sqrt{1 + \left(\frac{z_k}{e_k}\right)^2} \right)^{-n} \\ &\quad (\text{当第 } k \text{ 个缺陷为裂纹时}) \end{aligned} \right\} (2.2)$$

这里 a_k 、 b_k 分别为椭圆的长、短半轴。

在把 $\phi(z)$ 转换到 z_j 坐标上来，由第一节所给方法不难得到：

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,j} z_j^n + \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,j} \left(R_j \frac{z_j}{e_j} + R_j \sqrt{1 + \left(\frac{z_j}{e_j} \right)^2} \right)^{-n} \\ \quad \text{(当第 } j \text{ 个缺陷为缺口时)} \\ \frac{1}{2i} \left(\sqrt{\frac{z_j + ie_j}{z_j - ie_j}} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,j} \left(\frac{z_j}{e_j} + \sqrt{1 + \left(\frac{z_j}{e_j} \right)^2} \right)^{-n} \\ \quad \text{(当第 } j \text{ 个缺陷为裂纹时)} \end{cases}$$

$$G_{n,j} = \Delta_n^1 + r_j \times \Delta_n^0 + \sum_{h=1}^{j-1} G_{n,jh}^{(1)} + \sum_{h=j+1}^N G_{n,jh}^{(2)}$$

$$\Delta_n^1 = \begin{cases} 1/4, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}, \quad \Delta_n^0 = \begin{cases} 1/4, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

其中:

(a) 当第 k 个缺陷为缺口时有

$$\left. \begin{aligned} G_{n,jk}^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} d_{p,nk} F_{p,k} (r_{jk}^2 + e_k^2)^{-n/2}, \quad d_{p,nk} = -\frac{p}{n} \sum_{q=0}^{n-1} d_{p,qk} P_{n-1-q}(x_k) \\ d_{p,0k} &= \left(\frac{R_k}{e_k} r_{jk} + R_k \sqrt{1 + \left(\frac{r_{jk}}{e_k} \right)^2} \right)^{-p}, \quad x_k = -r_{jk} / \sqrt{r_{jk}^2 + e_k^2} \quad (k < j) \\ G_{n,jk}^{(2)} &= \sum_{p=0}^{\infty} d_{p,nk} F_{p,k} (r_{jk}^2 + e_k^2)^{-n/2}, \quad d_{p,nk} = -\frac{p}{n} \sum_{q=0}^{n-1} d_{p,qk} P_{n-1-q}(x_k) \\ d_{p,0k} &= (-1)^p \left(R_k \frac{r_{jk}}{e_k} + R_k \sqrt{1 + \left(\frac{r_{jk}}{e_k} \right)^2} \right)^{-p}, \quad x_k = r_{jk} / \sqrt{r_{jk}^2 + e_k^2} \quad (k > j) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

这里 P_n 为 n 次勒让德多项式。

(b) 当第 k 个缺陷为裂纹时, 有

$$\left. \begin{aligned} G_{n,jk}^{(1)} &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{e_k}{r_{jk}^2 + e_k^2}} + i(1+x_k) \right] (r_{jk}^2 + e_k^2)^{-n/2} d_{p,nk} F_{p,k} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{e_k}{r_{jk}^2 + e_k^2}} P_{n-m}(x_k) + i(x_k P_{n-m}(x_k) - P_{n-m-1}(x_k)) \right] (r_{jk}^2 \\ &\quad + e_k^2)^{-n/2} d_{p,mk} F_{p,k} \\ d_{p,mk} &= -\frac{p}{m} \sum_{q=0}^{m-1} d_{p,qk} P_{m-1-q}(x_k), \quad d_{p,0k} = \left(\frac{r_{jk}}{e_k} + \sqrt{1 + \left(\frac{r_{jk}}{e_k} \right)^2} \right)^{-p} \\ x_k &= -r_{jk} / \sqrt{r_{jk}^2 + e_k^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 G_{n,jl}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\sqrt{r_{jk}^2 + e_k^2} + i(x_k - 1) \right] (r_{jk}^2 + e_k^2)^{-n/2} d_{p,nk} F_{p,k} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\sqrt{r_{jk}^2 + e_k^2} P_{n-m}(x_k) + i(x_k P_{n-m}(x_k) - P_{n-m-1}(x_k)) \right] (r_{jk}^2 \\
 &\quad + e_k^2)^{-n/2} d_{p,mk} F_{p,k} \\
 d_{p,mk} &= -\frac{p}{m} \sum_{q=0}^{m-1} d_{p,qk} P_{m-1-q}(x_k), \quad d_{p,0k} = (-1)^p \left(\frac{r_{jk}}{e_k} + \sqrt{1 + \left(\frac{r_{jk}}{e_k} \right)^2} \right)^{-p} \\
 x_k &= r_{jk} / \sqrt{r_{jk}^2 + e_k^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

这里 P_n 为 n 次勒让德多项式。 $G_{n,jk}^{(1)}$ 与 $G_{n,jk}^{(2)}$ 的表达式不同的原因是由于 (2.2) 中函数的多值性引起的。

为了处理第 j 个边界缺陷上的边界条件，需要把 $\phi(z)$ 转移到参数平面上去。设映照函数为 $z_j = \frac{e_j}{2} \left(R_j \xi - \frac{1}{R_j \xi} \right)$ ，这时 $\phi(z)$ 在参数平面上就为：

(a) 当第 j 个缺陷为缺口时

$$\phi(z) = \phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n,j}^{(1)} + iF_{n,j}^{(2)}) \xi^{-n} + \frac{r_j}{4} + \frac{e_j}{8} \left(R_j \xi - \frac{1}{R_j \xi} \right) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\alpha_{m,j} + i\beta_{m,j}) \xi^m \quad (2.7)$$

(b) 当第 j 个缺陷为裂纹时

$$\begin{aligned}
 \phi(z) = \phi(\xi) &= \frac{1}{\xi - i} \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n,j}^{(1)} + iF_{n,j}^{(2)}) \xi^{-n} + \frac{r_j}{4} + \frac{e_j}{8} \left(R_j \xi - \frac{1}{R_j \xi} \right) \\
 &\quad + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\alpha_{m,j} + i\beta_{m,j}) \xi^m \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

其中： $\alpha_{-m,j} = (-1)^m \alpha_{m,j}$, $\beta_{-m,j} = (-1)^m \beta_{m,j}$ ($m=1, 2, 3, \dots$)

$$\alpha_{2m,j} + i\beta_{2m,j} = R_j^{2m} \sum_{p=m}^{\infty} (-1)^{p-m} \binom{2p}{p-m} \left(\frac{e_j}{2} \right)^{2p} G_{2p,j} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$\alpha_{2m+1,j} + i\beta_{2m+1,j} = R_j^{2m+1} \sum_{p=m}^{\infty} (-1)^{p-m} \binom{2p+1}{p-m} \left(\frac{e_j}{2} \right)^{2p+1} G_{2p+1,j} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (2.9)$$

我们利用参数 ξ 平面上的边界条件，可求出如下一组关系式（这里为了避免重复，不再加推导，具体方法可查阅文献[2]、[3]）：

$$\left. \begin{aligned}
 A_{2n+1,j} - f_{2n+1,j}^{(1)} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} (B_{2k+2n,j} - f_{2k+2n,j}) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\
 A_{2n,j} - f_{2n,j}^{(1)} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (B_{2k+2n+1,j} - f_{2k+2n+1,j}^{(2)}) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

其中:

(a) 当第 j 个缺陷为缺口时

$$A_{n,j} = [\alpha_{-n,j} - (n+1)\alpha_{n,j} + (n+2)\alpha_{n+2,j}] + R_j^{-2} [\alpha_{-n+2,j} + (n+1)\alpha_{n+2,j} - n\alpha_{n,j}]$$

$$+ \begin{cases} F_{n,j}^{(1)} + R_j^{-2} F_{n-2,j}^{(1)} + e_j (R_j + R_j^{-1}) R_j^{-2} \delta_{-3n}/4 & (n = -3, -4, -5, \dots) \\ F_{2,j}^{(1)} & (n = -2) \\ 2F_{1,j}^{(1)} + e_j (R_j + R_j^{-1}) (1 - R_j^{-2})/4 & (n = -1) \\ (2 + R_j^{-2}) F_{2,j}^{(1)} & (n = 0) \\ [(n+2) + R_j^{-2}(n+1)] F_{n+2,j}^{(1)} - [(n+1) + R_j^{-2}n] F_{n,j}^{(1)} - e_j (R_j + R_j^{-1}) \delta_{1n}/4 & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$$B_{n,j} = [-\beta_{-n,j} - (n-1)\beta_{n,j} + (n+2)\beta_{n+2,j}] + R_j^{-2} [-\beta_{-n+2,j} + (n+3)\beta_{n+2,j} - n\beta_{n,j}]$$

$$+ \begin{cases} -(F_{n,j}^{(2)} + R_j^{-2} F_{n-2,j}^{(2)}) & (n = -3, -4, -5, \dots) \\ -F_{2,j}^{(2)} & (n = -2) \\ 2R_j^{-2} F_{1,j}^{(2)} & (n = -1) \\ (2 + 3R_j^{-2}) F_{2,j}^{(2)} & (n = 0) \\ [(n+2) + R_j^{-2}(n+3)] F_{n+2,j}^{(2)} - [(n-1) + nR_j^{-2}] F_{n,j}^{(2)} & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (f_{n,j}^{(1)} + i f_{n,j}^{(2)}) \xi^n = \begin{cases} (1 + R_j^{-2} \xi^{-2}) f_j(\xi) & (\xi = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ (1 + R_j^{-2} \xi^{-2}) f_j(\xi) & (\xi = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0) \end{cases} \quad (2.11)$$

(b) 当第 j 个缺陷为裂纹时

$$A_{n,j} = [-\alpha_{-n-2,j} + \alpha_{-n+2,j} - (2n-3)\alpha_{n-2,j} + 4n\alpha_{n,j} - (2n+3)\alpha_{n+2,j} - 2\beta_{-n-1,j} \\ + 2\beta_{-n+1,j} - (4n-6)\beta_{n-1,j} + (4n+6)\beta_{n+1,j}] - e_j (\delta_{-3n} + \delta_{3n})/4$$

$$+ \begin{cases} -(F_{n+1,j}^{(1)} + F_{n-1,j}^{(1)} + F_{n,j}^{(2)} + F_{n-2,j}^{(2)}) & (n = 2, 3, 4, \dots) \\ -(F_{2,j}^{(1)} + F_{1,j}^{(2)}) + e_j/4 & (n = 1) \\ 2(F_{1,j}^{(1)} + F_{0,j}^{(2)}) & (n = 0) \\ 5(F_{2,j}^{(1)} + F_{1,j}^{(2)}) + e_j/4 & (n = -1) \\ (2n+3)F_{n+1,j}^{(1)} - (2n-3)F_{n-1,j}^{(1)} + (2n-3)F_{n,j}^{(2)} - (2n-3)F_{n-2,j}^{(2)} & (n = -2, -3, -4, \dots) \end{cases}$$

$$B_{n,j} = [\beta_{-n-2,j} - \beta_{-n+2,j} - (2n-5)\beta_{n-2,j} + 4n\beta_{n,j} - (2n+5)\beta_{n+2,j} - 2\alpha_{-n-1,j} \\ - 2\alpha_{-n+1,j} + (4n-2)\alpha_{n-1,j} - (4n+2)\alpha_{n+1,j}] + e_j (\delta_{2n} - \delta_{-2n})/2$$

$$\begin{cases}
 -F_{n,j}^{(1)} - F_{n-2,j}^{(1)} + F_{n+1,j}^{(2)} + F_{n-1,j}^{(2)} & (n=2,3,4, \dots) \\
 -F_{1,j}^{(1)} + 4F_{0,j}^{(2)} + F_{2,j}^{(2)} & (n=1) \\
 2F_{0,j}^{(1)} + 6F_{1,j}^{(2)} & (n=0) \\
 F_{1,j}^{(1)} - 4F_{0,j}^{(2)} + 7F_{2,j}^{(2)} & (n=-1) \\
 (2n-5)F_{n-2,j}^{(1)} - (2n-3)F_{n,j}^{(1)} - (2n+3)F_{n-1,j}^{(2)} + (2n+5)F_{n+1,j}^{(2)} & (n=-2, -3, -4, \dots)
 \end{cases}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (f_{n,j}^{(1)} + if_{n,j}^{(2)}) \xi^n = \begin{cases} (1+\xi^{-2})(\xi-i)^2 f_j(\xi) & (\xi=e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ (1+\xi^{-2})(\xi-i)^2 f_j(\xi) & (\xi=e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0) \end{cases} \quad (2.12)$$

(2.10)~(2.12) 中的 $f_j(\xi)$ 为作用在第 j 个缺陷上的自平衡外边界力载荷, δ_{mn} 为 Kronecker 记号. 在实际计算中只要把 $F_{n,j}$ 截为有限 $2M$ 项, 此时 (2.10) 取相应的形式如下:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{2n+1,j} - f_{2n+1,j}^{(1)} &= \left(-\frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=-M+n}^{M-n-1} \frac{1}{2k-1} (B_{2k+2n,j} - f_{2k+2n,j}^{(2)}) \\
 & \quad (n=-M, -M+1, \dots, M-1) \\
 A_{2n,j} - f_{2n,j}^{(1)} &= \left(-\frac{2}{\pi}\right) \sum_{k=-M+n}^{M-n-1} \frac{1}{2k+1} (B_{2k+2n+1,j} - f_{2k+2n+1,j}^{(2)}) \\
 & \quad (n=-M, -M+1, \dots, M-1)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

我们以 $F_{n,j}^{(1)}$ 、 $F_{n,j}^{(2)}$ 为未知数, $\alpha_{m,j}$ 、 $\beta_{m,j}$ 、 $G_{n,j}$ 为中间变量, 计有 N 条边界缺陷, 共可得 $4MN$ 个未知数的 $4MN$ 个线性代数方程组, 故方程组可用标准程序在计算机上求解. 如果外边界力载荷不是自平衡的, 则须按文献[3]方法处理, 这是不再赘述.

三、超深度边界裂纹或缺口群的处理

从第一节中可知, 上述方法还是有一定的局限的. 仍以图1所示问题为例, 当 $e_2/\sqrt{e_1^2+r^2} > 1$ 时, 对 (1.1)~(1.7) 决定的 $\phi_1(z_1)$ 其以 z_2 坐标展开的级数收敛区域还是不能包含整个第二条裂纹, 因此, 一、二节给出的方法和公式就失效了. 我们也称这样的裂纹群为超深度裂纹群. 为了能处理这类问题, 可对一节给出的公式进行加工修正:

(a) 设 $z_1 = z + R$, 令 R 满足如下公式:

$$R^2 + e_1^2 > (R-r)^2 + e_2^2, \text{ 或 } R > (e_1^2 + r^2 - e_2^2)/2r \quad (3.1)$$

以代替 (1.2) 中的公式: $z_1 = z_2 + r$, 余下仍照一节给出的方法做, 我们可得:

$$\phi_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,2} z^n \quad (3.2)$$

这个级数在区域 D : $|z| < \sqrt{R^2 + e_1^2}$ 内收敛, 由 (3.1) 可知, 区域 D 必定包含整个裂纹 2, 这就满足了坐标之间转换的要求.

(b) 为了能够使用映照方法处理边界条件, 还要再用 $z = z_2 - (R-r)$ 代回 (3.2), 这样做自然会产生疑问, 当用 $z = z_2 - (R-r)$ 回代到 (3.2) 后所得到的关于 z_2 的幂级数收敛

区域不是要改变了吗?为此让我们来看这样做对现在讨论的问题和给出的方法会有哪些可能结果.在实际计算中,是要把 $\phi_1(z_1)$ 截为有限项的(这里形式上取到 N 项),这时可有两种形式选择:

$$(i) \quad \phi_N(z_1) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{n=k}^{\infty} G_{n,2} \binom{n}{k} (r-R)^{n-k} \right) z_2^k \quad (3.3)$$

$$(ii) \quad \phi_N(z_1) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{n=k}^N G_{n,2} \binom{n}{k} (r-R)^{n-k} \right) z_2^k \quad (3.4)$$

这二者差别在于(3.3)是在(3.2)中先用 z_2 代替 z ,然后再截 $\phi_1(z_1)$ 为有限项的,而(3.4)是先把 $\phi_1(z_1)$ 截为有限项然后再用 z_2 代替 z 的.根据复变函数的幂级数理论可知,若在 $\phi_1(z_1)$ 中先用 z_2 代替 z ,一般讲来会改变(3.2)中 $\phi_1(z_1)$ 的收敛区域,所以(3.3)中的 $\phi_N(z_1)$ 当 $N \rightarrow \infty$ 时收敛区域不再是 D 了,故不可用.若先把(3.2)中的 $\phi_1(z_1)$ 截为有限项,再用 z_2 代替 z ,这时是有限项的运算,不会改变收敛区域.其实,根据(3.2),我们知道 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N G_{n,2} z^n$ 在 D 中内闭一致收敛于 $\phi_1(z_1)$,但是 $\sum_{n=0}^N G_{n,2} z^n \equiv \sum_{k=0}^N \left(\sum_{n=k}^N G_{n,2} \binom{n}{k} (r-R)^{n-k} \right) z_2^k$,所以 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \left(\sum_{n=k}^N G_{n,2} \binom{n}{k} (r-R)^{n-k} \right) z_2^k$ 也在 D 中内闭一致收敛于 $\phi_1(z_1)$,显然,其收敛区域没有改变.故实际计算中我们采用(3.4)形式.

我们可用上述(a)、(b)中的修正方法来处理超深度2条裂纹的问题,这些结论对一般 N 条裂纹或缺口群也是适用的.在具体计算时,若第 j 个缺陷对其相邻的缺陷而言是超深度的,则只要把 $\phi(z)$ 关于第 j 个局部坐标 z_j 展开的关系式(2.3)中的 $G_{n,jj-1}^{(1)}$ 用 $\sum_{k=n}^{2M-1} G_{k,jj-1}^{(1)}$ · $s_{j-}^{n-k} \binom{k}{n}$ 、 $G_{n,jj+1}^{(2)}$ 用 $\sum_{k=n}^{2M-1} G_{k,jj+1}^{(2)}$ · $s_{j-}^{n-k} \binom{k}{n}$ 代替即可.这里 $s_{j-} = -\lambda_{j-}(e_j^2 - e_{j-1}^2 - r_{jj-1}^2)/2r_{jj-1}$, $s_{j+} = \lambda_{j+}(e_j^2 - e_{j+1}^2 - r_{jj+1}^2)/2r_{jj+1}$, λ_{j-} 、 λ_{j+} 均为大于1的实数,可根据具体情况选取.如果第 j 个缺陷不但对其相邻的第 $j-1$ 或第 $j+1$ 个缺陷为超深度的而且对第 $j-2$ 或 $j+2$ 个缺陷也是超深度的,则我们只要对(2.3)中的 $G_{n,jj-2}^{(1)}$ 或 $G_{n,jj+2}^{(2)}$ 做上述给出的类似处理即可,其余类推之.

四、数值计算实例

图3在文献[3]上也有.所不同的是在文献[3]中曲线是从 $r/e=2$ 开始的,且计算公式由文献[3]提供,而这是提供的计算公式虽与文献[3]给出的计算公式不一样,但对 $r/e \geq 2$ 给出完全相同的计算结果.除此之外,还给出了直到 $r/e=0.85$ 的计算结果,而文献[3]给出的公式在此时早已不收敛了.

当图3中裂纹条数 $n=6$ 时,从左到右方向的裂纹应力强度因子数值变化曲线即由图4给出(由于对称性,只给出左面一半).根据力学直观,最外面一条裂纹因为受到邻近裂纹的松弛影响最小而应力强度因子数值最大.越到中间,所受松弛影响越大而应力强度因子数值

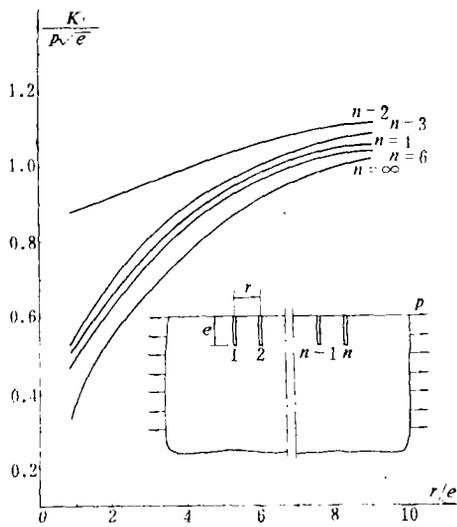


图 3

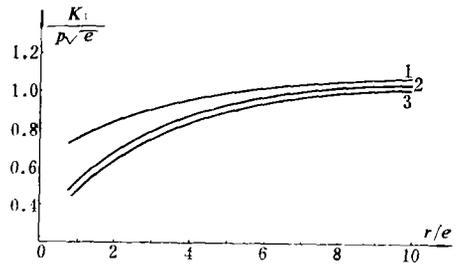


图 4

就越小。图 4 给出的结果与力学直观完全一致。

我们又计算了两条超深度裂纹的问题（图 5）。取定两条裂纹之间的距离为 5，一条裂纹长度为 1。令人感兴趣的结果是：当第 2 条裂纹不断伸长，达到 7 时，第 1 条裂纹的应力强度因子 K_{I1} 就几乎消失了。若第 2 条裂纹长度再增加到 10 时（图五中未显示），计算结果

表明 K_{I1} 、 K_{I2} 都为零。这时相当于裂纹 2 对裂纹 1 起了一种屏蔽作用，二条裂纹的效果等价于一条裂纹。从实际值结果得出，对图 5 所示问题， λ 取在 2~3 之间收敛性最好。

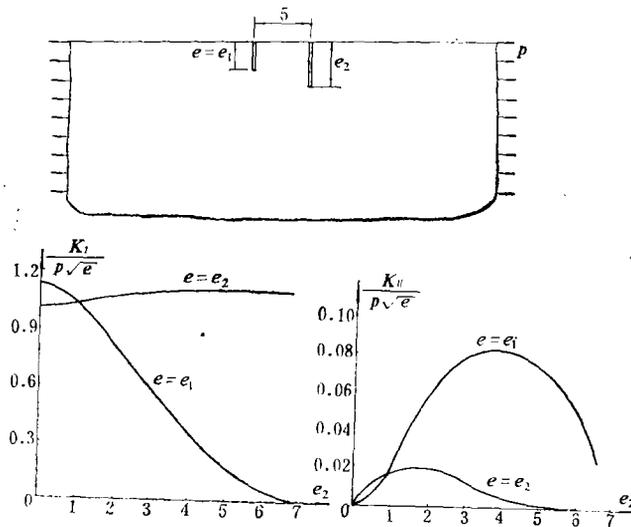


图 5

以上应力强度因子的数值由 (2.2) 按如下公式计算：

$$K_{I,j} = \left\{ \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n [(4n+1) F_{2n,j}^{(1)} - (4n+3) F_{2n+1,j}^{(2)}] \right\} / 2\sqrt{e_j}$$

$$K_{II,j} = \left\{ \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n [(4n+3) F_{2n+1,j}^{(1)} - (4n+1) F_{2n,j}^{(2)}] \right\} / 2\sqrt{e_j}$$

$$(j=1, 2, 3, \dots, N) \quad (4.1)$$

其中 e_j 表示第 j 条裂纹的长度。

最后还想强调一点的是：在以上计算中，所得结果相对精度最差的也达到 1%。每个 $\phi_j(z_j)$ 都最多截为 20 项，即 $M=10$ 。最终的计算都归结到一个 $40 \times N$ 阶的线性代数方程组。就一般问题的计算而言，这对现在的计算机内存并不成问题，这样就说明本文提供的方法具有广泛的实用性。

参 考 文 献

- [1] 欧阳邕, 应用数学和力学, 1, 2(1980), 156
- [2] 欧阳邕、朱涵, 应用数学和力学, 5, 2, (1984), 153
- [3] 欧阳邕、朱涵, 应用数学和力学, 6, 8(1985), 671—680.
- [4] 斯米尔诺夫, 《高等数学教程》, Vol. 3, №2.

On a Class of Method for Solving Problems with Random Boundary Notches and / or Cracks—(IV) Computa- tions for Deep Boundary Notches and / or Cracks

Ou Yang-chang Zhu Han

(Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

This paper continues the discussions to a class method for solving problems with random boundary notches and / or cracks in references by C. Ouyang in [1] (see also [2] and [3]). Using the basic method given in this reference as well as some further developments, we develop here a new effective computational method for solving random deep boundary notches and / or cracks. The actual numerical computations given in this paper show that the present method is quite workable and the results obtained have enlarged the contents of "Handbook of Stress Intensity Factors" given by G. C. Sih.