

预测纤维增强复合材料层压板固有频率振型及模态阻尼的有限元算法

林敦祥 倪荣根

(陕西机械学院) (航空工业部六二一所)

(钱伟长推荐, 1983年5月27日收到)

摘 要

本文提供了预测纤维增强复合材料层压板固有频率、振型及模态阻尼的理论计算方法, 此方法是综合了有限元法和阻尼单元模型, 并考虑了横向剪应变和转动惯量的影响. 本文给出了对称铺层石墨纤维及玻璃纤维增强复合材料层压板的理论计算结果, 并给出实验数据进行对比. 本文还提出一种预测复合材料层压板固有频率和阻尼的简易方法.

一、引 言

1969年 Ashton 等人^[1,2]用乘以待定系数的梁特征函数作为假设振型, 计算了层压板固有频率和振型, 取得了较好的结果. 其缺点是用于处理具有自由边界条件的板时误差太大. 随着有限元法的兴起, 不少作者用有限元法分析层合板的振动问题. 但是许多文章没有给出理论计算和实验结果的对比资料. 1978年 Cawley 和 Adams^[3]解决了任意边界条件甚至四边自由的层压板求固有频率和振型的问题, 提供了对称铺层矩形及梯形板的理论和实验的结果, 两者符合得很好. 在此工作中他们考虑了横向剪应变及转动惯量的影响, 1979年 Reddy^[4]用同样的方法给出了四边简支反对称层压板的固有频率的数值解.

六十年代末, 七十年代初, 许多复合材料科学工作者开始重视材料阻尼的预测. 但是此工作长期停留在研究梁形复合材料阻尼问题上. Hashin^[5]和 Bert^[6]等人用复数模量法, Adams 和 Bacon^[7]提出了阻尼单元模型并用能量法计算梁的阻尼. 关于板的阻尼问题 Grootenhuis 等人^[8]在1979年也用复数模量法处理了各向同性夹层结构板. 1982年底林、倪和 Adams 完成了石墨纤维和玻璃纤维增强复合材料层压板阻尼的预测^[9], 接着还解决了石墨/玻璃纤维、夹层结构混合复合材料阻尼的预测^[10].

本文就一般的纤维增强复合材料层压板动态特性的理论预测方法进行讨论. 本文给出复合材料层压板在任意的边界条件下计算固有频率和振型的能量表示式; 给出计算阻尼的阻尼单元模型及耗散能量表达式. 在讨论中考虑了横向剪应变和转动惯量的影响. 本文还给出有限单元模型、计算流程和计算结果. 最后, 本文还提供简便的图表法的实例, 以便工程技术人员能够容易地从图表中估计出所设计的角铺层层压板的固有频率和阻尼.

二、固有频率和振型

本文只讨论等厚度的各向异性薄平板, 设其厚度为 h . 直角坐标系 xyz 的原点, $z=0$, 在平板的中间层平面上(如图1所示). 由于薄板在横向振动时厚度方向上的变形非常小, 故忽略了厚度方向上的正应力和正应变. 另外, 在讨论复合材料板的固有频率时忽略了阻尼的影响.

2.1 总应变能和总动能的表示式

考虑到横向剪切变形及转动惯量的影响, 根据文献[11], 薄板的位移分量可表示为:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中 u_0, v_0 和 w_0 分别为中间层平面上的位移分量, ϕ_x 和 ϕ_y 为转动角度.

在线弹性范围内, 应变-位移方程可写为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

为了讨论层压板中每一层纤维方向的影响, 引入纤维坐标系; 纤维方向为1轴, 垂直于纤维方向的为2轴和3轴, 3轴和 z 轴重合.

对下标的意义约定如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 &= \tau_{23}, \quad \sigma_5 = \tau_{13}, \quad \sigma_6 = \tau_{12} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

应变及其他变量皆采用和(2.3)式相同的下标. 根据薄板弯曲变形的假设, σ_3 和 ε_3 皆为零.

由文献[12], 有以下的坐标转换关系式:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & -mn \\ 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2mn & 2mn & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

式中 $m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$, θ 为纤维取向角.

(2.4)式可简写为

$$\{\varepsilon_i\} = [S]\{\varepsilon\} \quad (2.5)$$

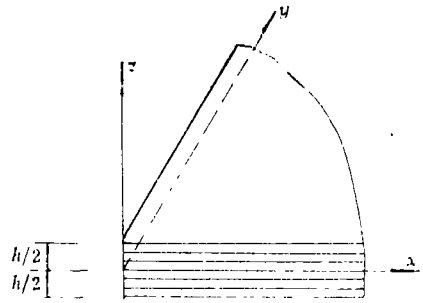


图 1

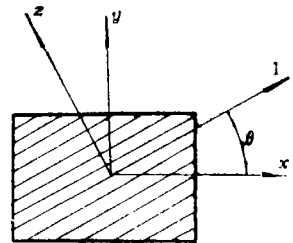


图 2

[S]为坐标变换矩阵。

在层压板中，每一层都可看成是单向纤维复合材料板，是横观各向同性板，故有如下基本方程：

$$\{\sigma_i\}=[Q]\{\varepsilon_i\} \quad (2.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1(1-\mu_{23})}{1-\mu_{23}-2p\mu_{12}^2}, & Q_{12} &= \frac{E_2\mu_{12}}{1-\mu_{23}-2p\mu_{12}^2} \\ Q_{22} &= \frac{E_2(1-p\mu_{12}^2)}{(1+\mu_{23})(1-\mu_{23}-2p\mu_{12}^2)}, & Q_{44} &= \frac{E_2}{2(1+\mu_{23})} \\ Q_{55} &= Q_{66} = G_{12}, & \text{其余为零} \\ p &= E_2/E_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

式中 E_1, E_2 分别为 0° 和 90° 单向层压梁的杨氏模量， μ_{12}, μ_{23} 分别为主、次泊桑系数， G_{12} 为纵向剪切模量。

第 k 层的应变能表示为

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{\varepsilon_i\}^T \{\sigma_i\} dV \quad (2.8)$$

V_k 是第 k 层的体积。把方程(2.5)及(2.6)代入(2.8)式并令：

$$[\bar{Q}] = [S]^T [Q] [S] \quad (2.9)$$

则(2.8)式可改写为

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{\varepsilon\}^T [\bar{Q}] \{\varepsilon\} dV \quad (2.10)$$

对每一层板的应变能求和，得到平板的总应变能，即

$$U = \sum_{k=1}^l U_k \quad (2.11)$$

式中 l 为平板的层数。

考虑到(2.2)式和(2.10)式，并令：

$$\{\xi\}^T = \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right] \quad (2.12)$$

则(2.11)式可改写为

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\xi\}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \{\xi\} d\Omega \quad (2.13)$$

式中 Ω 为平板面积，且

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & A_{26} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{26} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中} \quad (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \sum_{k=1}^l \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{ij}^k(1, z, z^2) dz, \quad (i, j=1, 2, 6) \\ A_{ij} &= \sum_{k=1}^l \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{ij}^k dz \quad (i, j=4, 5) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

考虑了转动惯量，总动能表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ m \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] + I \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \quad (2.16)$$

式中 m , I 分别为单位质量和转动惯量：

$$(m, I) = \sum_{k=1}^l \int_{h_{k-1}}^{h_k} (1, z^2) \rho_k dz \quad (2.17)$$

ρ_k 为第 k 层材料的平均密度。

对于简谐运动，总动能表示为：

$$T = -\frac{1}{2} \omega^2 \int_{\Omega} \{ m(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + I(\phi_x^2 + \phi_y^2) \} d\Omega \quad (2.18)$$

式中 ω 为圆频率。

2.2 对称铺层层压板的情况

能量表达式 (2.13) 和 (2.17) 适用于任意铺层的层压板。对于对称层压板，可做如下假设^[12]：

$$\{ \varepsilon \} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 z \\ k_2 z \\ k_4 (1 - 4z^2/h^2) \\ k_5 (1 - 4z^2/h^2) \\ k_6 z \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

式中 k_i 为曲率，它是 x, y 的函数。令

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{ \varepsilon \}^T [D] \{ \varepsilon \} dV \quad (2.20)$$

式中 V 是板的体积， $[D]$ 为待定的平均弯曲刚度矩阵。把 (2.19) 式分别代进 (2.11) 式和 (2.20) 式，比较两式的同类项，得

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= \frac{4}{h^3} \sum_{k=1}^l \bar{Q}_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (i, j=1, 2, 6) \\ D_{ij} &= \frac{15}{8h} \sum_{k=1}^l \bar{Q}_{ij}^k [(h_k - h_{k-1}) - \frac{8}{3h^2} (h_k^3 - h_{k-1}^3) + \frac{16}{5h^4} (h_k^5 - h_{k-1}^5)] \quad (i, j=4, 5) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

矩阵 $[D]$ 为对称正定阵。

2.3 有限元模型

本文采用了 8 个节点 40 个自由度的矩形单元网格，如图 3 所示。若单元边长分别为 $2a$ 和

2b) 则

$$x = x_c + a\xi, \quad y = y_c + b\eta$$

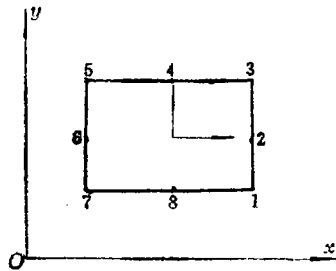


图 3

相应的插值函数为:

$$\left. \begin{aligned} \text{对于单元的四个角: } N_i &= \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i) (\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \\ \text{对于 } \xi_i = 0: \quad N_i &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta\eta_i) \\ \text{对于 } \eta_i = 0: \quad N_i &= \frac{1}{2} (1 + \xi\xi_i) (1 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

每一单元的位移和转角可表示为:

$$\left. \begin{aligned} u_0^e(x, y) &= \sum_{i=1}^8 u_{0i}^e N_i(\xi, \eta) \\ v_0^e(x, y) &= \sum_{i=1}^8 v_{0i}^e N_i(\xi, \eta) \\ w_0^e(x, y) &= \sum_{i=1}^8 w_{0i}^e N_i(\xi, \eta) \\ \phi_x^e(x, y) &= \sum_{i=1}^8 \phi_{xi}^e N_i(\xi, \eta) \\ \phi_y^e(x, y) &= \sum_{i=1}^8 \phi_{yi}^e N_i(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

对于等参单元.

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

式中 $[J]$ 为雅可比矩阵. 定义子矩阵 $[B]_i$ 为:

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial y} & z \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (2.26)$$

令 $\{\delta\}^T = [u_{01}, v_{01}, w_{01}, \phi_{x1}, \phi_{y1}, \dots, u_{0t}, v_{0t}, w_{0t}, \phi_{xt}, \phi_{yt}, \dots, u_{0n}, v_{0n}, w_{0n}, \phi_{xn}, \phi_{yn}]$

当讨论一个单元时, $n=8$; 讨论整个板时, n 等于总节点数。考虑到(2.2)式(2.25)式和(2.26)式, 并由 $[B]_i$ 组成 $[B]$ 矩阵, 则

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (2.27)$$

每一单元的应变能可表示为:

$$U^e = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K^e] \{\delta\} \quad (2.28)$$

式中 $[K^e]$ 为单元刚度矩阵:

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (2.29)$$

V_e 为单元体积。

同理每一单元的动能可表示为:

$$T^e = -\frac{1}{2} \omega^2 \{\delta\}^T [M^e] \{\delta\} \quad (2.30)$$

$[M^e]$ 为单元质量矩阵。

$$[M^e] = \int_{V_e} [N]^T [\rho] [N] dV \quad (2.31)$$

在此 $[N]$ 由插值函数 N_i 组成, $[\rho]$ 由(2.17)式确定。

综合整个板的刚度和质量矩阵得:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\}, \quad T = -\frac{1}{2} \omega^2 \{\delta\}^T [M] \{\delta\} \quad (2.32)$$

在此, $\{\delta\}$ 为整个板所有节点的特征矢量, $[K]$ 和 $[M]$ 分别为总的刚度矩阵和质量矩阵。在自由振动情况下, 用(2.32)式建立拉格朗日方程, 得到标准的特征方程:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta\} = \{0\} \quad (2.33a)$$

关于特征值问题的解法, 本文采用了文献[3]所用过的计算技巧来提高其收敛速度。对于四边自由的边界条件, 总刚度矩阵 $[K]$ 是奇异的。为此对方程(2.33a)作如下变化:

$$([K] + \alpha [M]) - [M] (\omega^2 + \alpha) \{\delta\} = \{0\} \quad (2.33b)$$

α 为非零常数, 由于 $[M]$ 为非奇异矩阵, 经这样变化后新的刚度矩阵 $[K] + \alpha [M]$ 也是非奇异的。由方程(2.33a)或(2.33b)可解出各阶模态的固有频率 f_i 和振型 $\{\delta\}_i$ 。用 $\{\delta\}$ 的最大值代入(2.32)式可求得最大总应变能 U_m 。

三、模 态 阻 尼

根据定义, 比阻尼容量(SDC)(记为 ψ)表示为:

$$\psi = \frac{\Delta U}{U_m} \quad (3.1)$$

式中 ΔU 为在一个应力周期内的耗散能量, U_m 是在此周期内的最大应变能.

3.1 阻尼单元模型

Adams和Bacon^[7]在1973年提出了阻尼单元模型, 他们认为: 每一层, 每单位面积单元的耗散能量 $\delta(\Delta U)$ 可分解为与直接应变有关的三个分量, 即:

$$\delta(\Delta U) = \delta(\Delta U_x) + \delta(\Delta U_y) + \delta(\Delta U_{xy}) \quad (3.2)$$

考虑到横向剪应变的影响, 需在(3.2)式中补充两项由于横向剪应变引起的耗散能量, 即:

$$\delta(\Delta U) = \delta(\Delta U_x) + \delta(\Delta U_y) + \delta(\Delta U_{yz}) + \delta(\Delta U_{xz}) + \delta(\Delta U_{xy}) \quad (3.3)$$

在纤维坐标系中写成:

$$\delta(\Delta U) = \delta(\Delta U_1) + \delta(\Delta U_2) + \delta(\Delta U_4) + \delta(\Delta U_5) + \delta(\Delta U_6) \quad (3.4)$$

根据比阻尼容量的定义, (3.4)式中的每一项可表示为:

$$\delta(\Delta U_i) = \frac{1}{2} \psi_i \varepsilon_i \sigma_i \delta z \quad (i=1, 2, 4, 5, 6) \quad (3.5)$$

式中 ψ_1, ψ_2 分别为 0° 和 90° 单向梁弯曲时的比阻尼容量, $\psi_6 = \psi_5$, 它们是纵向剪切比阻尼容量, ψ_4 为横向剪切比阻尼容量, 严格来说, 材料的比阻尼容量是应力幅值的函数, 但对于小幅振动, 比阻尼容量受应力幅值的影响不大, 可以认为它们是常数. 这些 ψ_i 值由实验确定.

3.2 耗散能量的表达式

考虑到(3.5)式, 第 k 层板的耗散能量为:

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\varepsilon_i\}^T [\psi] \{\sigma_i\} dz d\Omega \quad (3.6)$$

式中阻尼阵 $[\psi]$ 为:

$$[\psi] = \text{diag}[\psi_1, \psi_2, \psi_4, \psi_5, \psi_6] \quad (3.7)$$

令 $[R] = [S]^T [\psi] [Q] [S]$, 则(3.6)式可改写为:

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{\varepsilon\}^T [R] \{\varepsilon\} dV \quad (3.8)$$

比较(3.8)式和(2.10)式看出, 它们具有相同的形式; 只是(2.10)式中的 \tilde{Q} 在(3.8)式中用 R 代替了. 用这种方法表示耗散能量的好处是前述计算刚度矩阵的子程序, 只要稍作修改就可用于计算有阻尼时的刚度矩阵.

对于整个层合板, 总的耗散能量为:

$$\Delta U = \sum_{k=1}^l \Delta U_k \quad (3.9)$$

对于对称铺层层压板, 我们可按2.2节所描述的过程来求有阻尼时的单元刚度矩阵 $[K_k^*]$.

$$[K_k^*] = \int_V [B]^T [D^*] [B] dV \quad (3.10)$$

矩阵 $[D^*]$ 为有阻尼板的平均弯曲刚度矩阵, 其元素 D_{ij}^* 具有(2.21)式的形式, 只是把 \bar{Q}_{ij}^* 换成 R_{ij}^* 就行了. 一般 $D_{ij}^* \neq D_{ji}^*$.

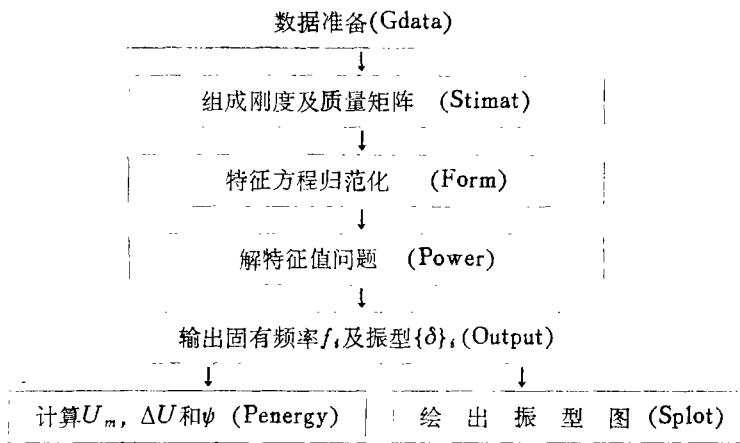
综合整个板的单元刚度矩阵可求出有阻尼系统的总刚度矩阵 $[K_a]$, $[K_a]$ 一般也不是对称矩阵. 最后, 总的耗散能量表示为:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K_a] \{\delta\} \quad (3.11)$$

把由(2.33)式求得特征矢量 $\{\delta\}_i$ 代入(3.11)式求得各阶模态的耗散能量 $(\Delta U)_i$.

四、计算程序流程

为了实现上述计算, 我们编制了Fortran有限元计算程序, 计算流程如下:



数据准备是最重要的环节, 主要是先确定 $E_1, E_2, \mu_{12}, \mu_{23}, G_{12}, \psi_1, \psi_4, \psi_6$. 根据经验, 改变 μ_{23} 和 ψ_4 的值对计算结果没有明显的影响, 故 μ_{23} 和 ψ_4 这两个试验很难确定的值可取适当的值(或取环氧树脂的对应值).

为了提供正确的材料参数, 我们一般先按纤维体积分数 $v_f = 0.5$ 的试样测定所有的材料参数, 如表 1 所示. 然后根据试样的实际纤维体积分数换算出其材料参数, 如试样是完好的:

$$v_f = \frac{\rho_s - \rho_m}{\rho_f - \rho_m} \quad (4.1)$$

式中 ρ_s 为试样密度, ρ_m 为基体密度 (对于 DX-210 环氧树脂 $\rho_m = 1210 \text{kgm}^{-3}$) ρ_f 为纤维密度 (对于玻璃纤维 $\rho_f = 2550 \text{kgm}^{-3}$, 石墨纤维 $\rho_f = 1900 \text{kgm}^{-3}$), 求出 v_f 后, E_1 可用下式计算:

$$E_1 = (E_{0.5} - E_m) \frac{v_f}{0.5} + E_m \quad (4.2)$$

式中 $E_{0.5}$ 为该材料在 $v_f = 0.5$ 时的纵向杨氏模量, E_m 为基体杨氏模量 (见表 1). 当 v_f 在 $0.35 \sim 0.65$ 之间, ψ_1 变化很小, ψ_1 取 $v_f = 0.5$ 时的值. 至于 E_2, ψ_2 和 G_{12}, ψ_6 , 它们与 v_f 的关系皆为非线性, 倪和 Adams^[14] 给出了他们的研究结果.

表 1 材 料 参 数

材 料	E_1	E_2	G_{12}	ψ_1	ψ_2	ψ_6	μ_{12}	ν_f
	Gpa	Gpa	Gpa	%	%	%		
HMS/DX-210	172.7	7.20	3.76	0.45	4.22	7.05	0.3	0.50
Glass/DX-210	37.78	10.9	4.91	0.87	5.05	6.91	0.3	0.50
DX-210	3.21	3.21	1.20	6.54	6.54	6.68	0.34	0

五、计算实例及讨论

为了验证理论计算的正确性，我们制作了四种不同铺层的玻璃纤维和石墨纤维复合材料层压板试样，其基本参数列于表1，板的数据列于表2。表3至表10列出这些板的理论计算结果，括号内的数据是根据文献[15]的试验方法测定的。由于试件在制作过程中，纤维的平直性很难保持，又加上试件的其它缺陷等原因，使得试件和理论模型之间存在差异，造成有些结果不能非常一致。但总的来说，不论其固有频率、振型或阻尼值，其相对误差都很小，结果还是令人满意的。

需要指出的是，在计算之前确定正确的 ν_f 值是重要的。如表11所示，错误的 ν_f 值会造成更大的误差。

图4、5给出了固有频率，阻尼值和体积因子 β ($\beta=h/L^2$, h : 板厚, L^2 : 方板的面积) 的关系。固有频率 f_n 和 β 成正比，而比阻尼容量和 β 无关，换句话说，阻尼值和板的尺寸无关。







图6是全 0° 石墨/环氧板固有频率，阻尼随体积分数 ν_f 的变化情况($\beta=0.032m^{-1}$)，一般使用的纤维增强复合材料层压板的体积分数是在40~60%变化。 ν_f 越大其等效弯曲模量越高，固有频率提高了。反之，由于纤维的阻尼比基体小得多，因此 ν_f 的提高导致阻尼的减少。它们和 ν_f 的关系比较复杂，目前还不能表示出其函数形式。

还需指出，纤维增强复合材料层压板的阻尼值是随着振型的变化而变化。一般说，振动时翘曲越多的振型阻尼越大。另外，若应变能主要是贮存在纤维里而不在基体里时，其阻尼就小。阻尼值在前六阶模态里的变化范围又和板的各向异性程度有关。例如，全 0° 石墨/环氧板，由于 E_1 远大于 E_2 ，其阻尼值的差别可达14.38倍。而 $(0^\circ/-60^\circ/60^\circ/0^\circ/-60^\circ/60^\circ)$ 对称石墨/环氧板的阻尼值的差别只有2.28倍。玻璃/环氧板的各向异性度比石墨/环氧板小，

表 2 板 的 数 据







试件号	材 料	层 数	密 度	板 厚	边 宽	ν_f	角 铺 层
			kgm^{-1}	mm	mm		
762	CFRP	8	1566	1.58	178	0.516	All 0°
764	CFRP	8	1446.2	2.12	234.5	0.342	$(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$,
770	CFRP	8	1551.4	1.62	215	0.494	$(0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, -45^\circ)$,
772	CFRP	12	1636.4	2.02	215.6	0.618	$(0^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 0^\circ, -60^\circ, 60^\circ)$,
761	GFRP	8	1924.7	2.28	249	0.53	All 0°
734	GFRP	8	1813.9	2.05	227	0.451	$(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$,
769	GFRP	8	2041.7	1.37	224.2	0.621	$(0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, -45^\circ)$,
771	GFRP	12	2003.5	2.11	204.6	0.592	$(0^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 0^\circ, -60^\circ, 60^\circ)$,

表 3 板762的结果

№.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 ψ (%)
1	83.57 (81.5)		6.76 (7.0)
2	118.42 (107.4)		4.28 (4.9)
3	207.79 (196.6)		5.89 (5.4)
4	329.41 (295.5)		4.13 (4.7)
5	419.83 (382.5)		5.11 (4.8)
6	546.93 (531)		0.47 (-)







纤维方向→

表 4 板764的结果

№.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 ψ (%)
1	58.10 (68.9)		7.80 (6.7)
2	213.31 (218.9)		0.91 (1.05)
3	243.47 (251.2)		2.50 (2.6)
4	302.51 (305.4)		0.60 (0.92)
5	324.16 (323.5)		1.51 (1.7)
6	441.62 (452.5)		2.74 (3.0)

外层纤维方向→

表 5 板770的结果

№.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 ψ (%)	№.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 ψ (%)
1	165.17 (156.6)		1.44 (1.4)	4	432.57 (407.8)		1.23 (1.26)
2	279.14 (272.0)		0.93 (0.88)	5	511.43 (486.1)		0.98 (0.99)
3	387.8 (372.3)		0.63 (0.65)	6	800.37 (799.0)		0.92 (-)

外层纤维方向→

表 6 板772的结果

№.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 $\psi(\%)$
1	86.33 (77.8)		3.11 (4.1)
2	224.49 (202.7)		0.80 (0.92)
3	280.42 (258.0)		1.70 (1.7)
4	298.81 (298.7)		0.58 (0.77)
5	348.36 (322.0)		1.19 (1.2)
6	512.24 (496.7)		1.81 (2.1)

外层纤维方向→

表 7 板761的结果

№.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 $\psi(\%)$
1	62.49 (57.16)		7.23 (7.21)
2	97.42 (90.3)		5.44 (5.3)
3	160.53 (148.7)		6.52 (5.8)
4	180.15 (181.6)		1.06 (1.4)
5	215.85 (211.15)		3.22 (3.0)
6	278.83 (270.5)		5.35 (4.8)

外层纤维方向→

表 8

板734的结果

№.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 $\psi(\%)$	№.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 $\psi(\%)$
1	66.42 (62.2)		7.16 (6.7)	4	189.79 (180.5)		4.87 (4.9)
2	131.62 (131.4)		2.47 (2.8)	5	208.86 (200.1)		3.73 (3.2)
3	164.46 (159.2)		1.62 (1.9)	6	347.16 (326.7)		5.09 (5.8)

外层纤维方向→

表 9 板769的结果

No.	固有频率 (Hz)	震 型	比阻尼容量 ψ (%)
1	55.45 (58.2)		4.97 (5.4)
2	99.01 (91.6)		2.24 (3.1)
3	122.98 (125.5)		1.71 (2.5)
4	151.27 (150.4)		3.81 (4.3)
5	163.00 (166.8)		3.13 (3.5)
6	279.36 (277.3)		3.92 (3.8)

外层纤维方向→

表10 板771的结果

No.	固有频率 (Hz)	振 型	比阻尼容量 ψ (%)
1	108.17 (90.4)		3.74 (4.4)
2	168.64 (144.7)		2.81 (3.5)
3	218.64 (222.3)		1.90 (2.6)
4	280.15 (264.1)		3.40 (3.4)
5	301.00 (281.1)		2.84 (3.0)
6	505.5 (492.6)		2.76 (2.7)

外层纤维方向→

表11 ν_f 值对计算结果的影响(板734)

结 果		1	2	3	4	5	6	备 注
测量值	f_n (Hz)	62.2	131.4	159.2	180.5	200.1	326.7	$\nu_f=0.451$
	ψ (%)	6.7	2.8	1.9	4.9	3.2	5.8	
计算值	f_n (Hz)	66.42	131.62	164.46	189.79	208.86	347.16	计算时用
	ψ (%)	7.16	2.47	1.62	4.87	3.73	5.09	$\nu_f=0.451$
	f_n (Hz)	70.58	134.90	174.39	196.35	220.83	363.28	计算时用
	ψ (%)	6.50	2.47	1.45	4.61	3.46	4.74	$\nu_f=0.50$

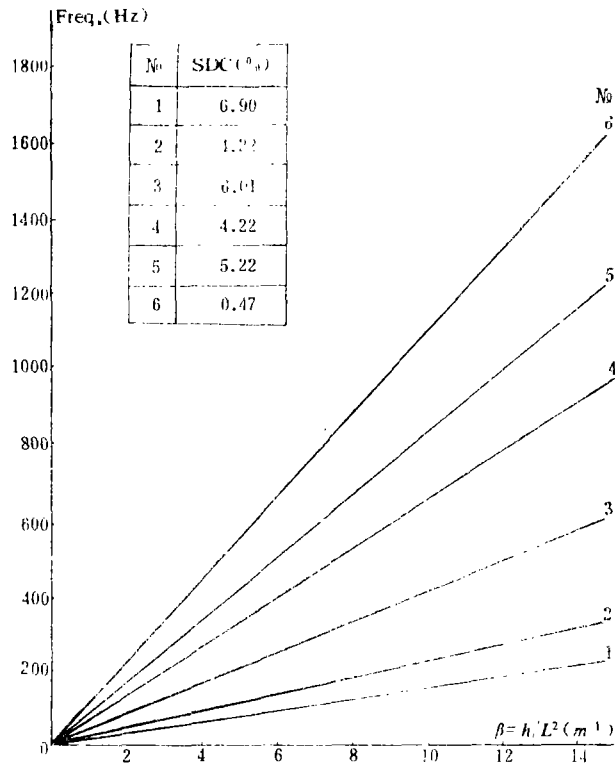


图 4 全0°单向石墨/环氧板的固有频率和阻尼随 β 值的变化

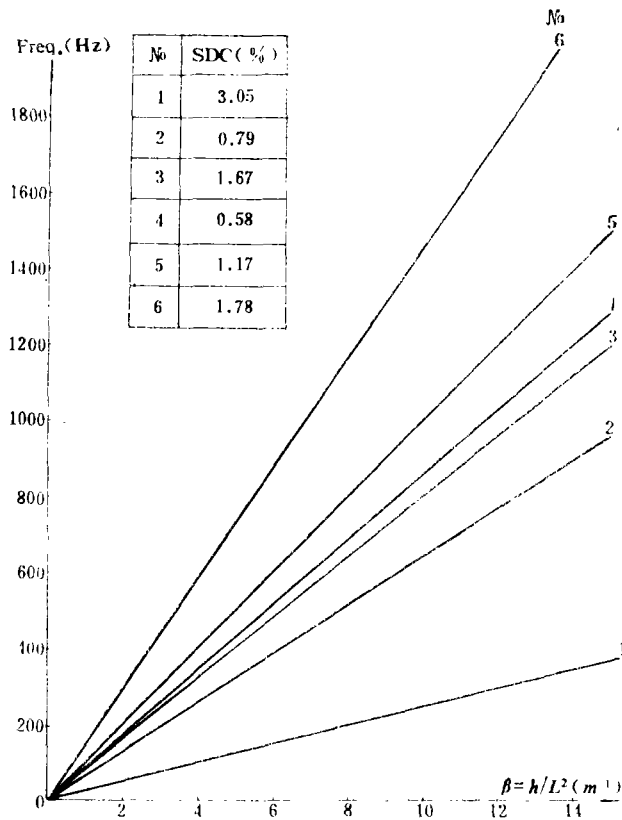


图 5 (0°, 90°, 45°, -45°)对称石墨/环氧板的固有频率及阻尼随 β 值的变化

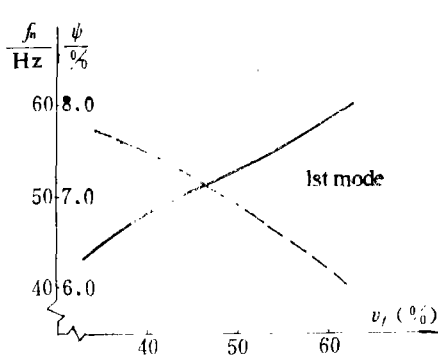


图 6 (a)

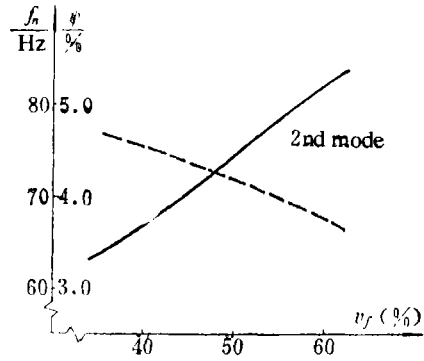


图 6 (b)

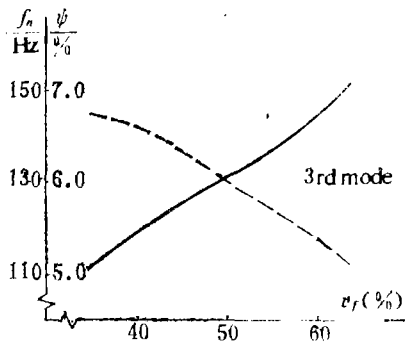


图 6 (c)

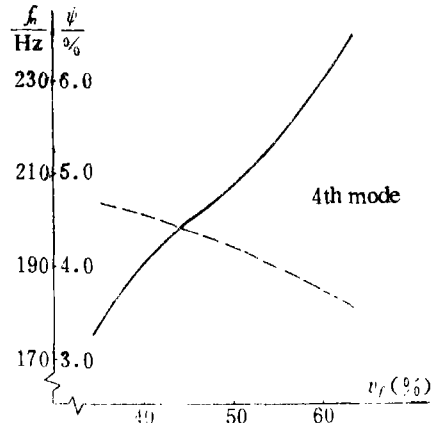


图 6 (d)

因而其差别也只有6.45倍和2.05倍。这种性质是各向同性材料所没有的，对于各向同性材料板，其各阶模态的阻尼值没有明显的差别。认识这一点，对于从事复合材料的工程技术人员是非常重要的。

六、预测固有频率及阻尼值的简易图解法

根据图 6 可以预估同材料和角铺层排列的层压板的固有频率和阻尼。例如我们要预测具有如下参数的全 0° 石墨/环氧板的前四阶模态的固有频率和阻尼：板厚 $h=1.58\text{mm}$ ，边长 $L=178\text{mm}$ ， $\rho_s=1566\text{kgm}^{-3}$ 。根据公式(4.1)得 $v_f=0.516$ ，又根据 β 的定义得 $\beta=0.0499\text{m}^{-1}$ 。从图6(a~d)查得，对于 $\beta'=0.032\text{m}^{-1}$ ：

$$f'_{n(1)}=53.5\text{Hz}, \quad f'_{n(2)}=75.5\text{Hz}, \quad f'_{n(3)}=133.0\text{Hz}, \quad f'_{n(4)}=210.0\text{Hz}$$

$$\psi_{(1)}=6.8\%, \quad \psi_{(2)}=4.2\%, \quad \psi_{(3)}=5.9\%, \quad \psi_{(4)}=4.2\%$$

由于固有频率和 β 值成正比，即

$$f_{n(i)} = f'_{n(i)} \frac{\beta}{\beta'}$$

i 为模态号。求得：

$$f_{n(1)}=83.43\text{Hz}, \quad f_{n(2)}=117.73\text{Hz}, \quad f_{n(3)}=207.40\text{Hz}, \quad f_{n(4)}=327.47\text{Hz}$$

阻尼值不需再换算,对比以上结果和表3中相应的值,它们几乎完全相同。

这样,可以用计算机一次计算出一定的 β 值所感兴趣的各种角铺层层压板的固有频率和阻尼值并绘出所有图表。工程技术人员只要测量所用板的厚度和边长,称其重量并计算 β 值和 ν_f 值,就能用这些图表很快地估计出此板的固有频率和阻尼值。

七、结 论

本文提供了预测复合材料层压板动态特性的方法。此方法是综合了有限元法和阻尼单元模型,考虑了横向剪应变的影响。尽管只用了 6×6 单元网格,但计算结果已足够精确。

本工作编制的有限元计算程序适用于各种不规则形状的板及薄壳结构,此程序同样适用于由不同材料组成的层压板结构。

最后,本文提供用图表法预测复合材料层压板的固有频率和阻尼的例子,为复合材料设计师提供了一种简易的方法。

我们认为,有限元法和阻尼单元模型的综合,用于分析各种层压板的动态特性,是很有前途的方法。

参 考 文 献

- [1] Ashton, J. E. and M. E. Waddoups, Analysis of anisotropic plates, *J. Composite Materials*, 3 (Jan. 1969), 148.
- [2] Ashton, J. E. and J. D. Anderson, The natural modes of vibration of boron-epoxy plates, *Shock and Vibration Bulletin*, 39 (1969), 81.
- [3] Cawley P. and R. D. Adams, The predicted and experimental natural modes of free-free CFRP plates, *J. Composite Materials*, 12 (Oct. 1978), 336.
- [4] Reddy, J. N., Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by finite element method, *J. Sound and Vibration*, 66, 4 (1979), 565.
- [5] Hashin, Z., Complex moduli of viscoelastic composite—2. Fibre reinforced materials, *Int. J. of Solids and Structures*, 6 (1970), 797.
- [6] Bert, C. M., Vibration of composite structures, *Recent Advances in Structural Dynamics*, Int. Conf. Univ. of Southampton (July 1980), 7—11.
- [7] Adams, R. D. and D. G. C. Bacon, Effect of orientation and laminated geometry on the dynamic properties of CFRP, *J. Composite Materials*, 7 (Oct. 1973), 402.
- [8] Ioannides, E. and P. Grootenhuis, Finite element analysis of the harmonic response of damped three-layer plates, *J. Sound and Vibration*, 67, 2 (1979), 203.
- [9] Lin Dun-xiang (林敦祥), Ni Rong-gen (倪荣根) and R. D. Adams, Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastics plates, *J. Composite Materials*, 18 (March 1984), 132.
- [10] Ni Rong-gen (倪荣根), Lin Dun-xiang (林敦祥) and R. D. Adams, The dynamic properties of carbon-glass fibre sandwich hybrid laminated composites: Theoretical, experimental and economic consideration, *Composites*, 15, 4 (Oct. 1984), 297.
- [11] Yang, P. C., C. H. Norris and Y. Stavsky, Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *Int. J. Solids and Structure*, 2 (1966), 665.

- [12] Ashton, J. E. and J. M. Whitney, *Theory of Laminated Plates*, Technomic Publishing Co., Inc. (1970).
- [13] Cawley, P. and R. D. Adams, The location of defects in structures from measurements of natural frequencies, *J. Strain Analysis*, **14**, 2 (1979), 49.
- [14] Ni Rong-gen (倪荣根) and R. D. Adams, A rational method for obtaining the dynamic properties of laminae for predicting the stiffness and damping of laminated plates and beams, *Composites*, **15**, 3 (July 1984), 193.
- [15] Lin Dun-xiang (林敦祥) and R. D. Adams, Determination of damping characteristics of structures by transient testing using Zoom-FFT, *J. of Physics*, E, **18**, 2 (1985), 161.

The Finite Element Technique for Predicting the Natural Frequencies, Mode Shapes and Damping Values of Filamentary Composite Plates

Lin Dun-xiang

(*Shanxi Institute of Mechanical Engineering, Xi'an*)

Ni Rong-gen

(*Beijing Institute of Aeronautical Materials, Beijing*)

Abstract

This article presents the numerical method for predicting the natural frequencies, mode shapes and damping values of filamentary composite plates. This method is based on finite element technique, using damped element and allowing transverse shear deformation. For the example of this technique, the theoretical results comparing with experimental values of carbon fibre and glass fibre reinforced plastics plates (mid-plane symmetric) are provided. The dynamic properties of these laminates are discussed. Finally, a simple graphic technique to estimate the natural frequencies and damping values is suggested.