应用数学和力学，第7卷第2期（1986年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

双曲-抛物偏微分方程奇异摄动问题的差分解法*

沈锦仁

（南京大学，1984年12月29日收到）

摘要

本文对双曲-抛物偏微分方程奇异摄动问题构造了一个指数型拟合差分格式．我们不仅在方程中加了一个拟合因子，而且在逼近第二个初始条件时也加了拟合因子．我们利用问题的渐近解证明了差分格式关于小参数的一致收敛性．

一、引言

现考虑双曲型方程奇异摄动问题A_ε：

$$L_\varepsilon u(x,t)\equiv \varepsilon u_{tt}+u_t-u_{xx}=f(x,t),\qquad 0<x<1,\ 0<t<T \tag{1.1}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad 0<t<T \tag{1.2}$$

$$u(x,0)=s(x),\quad u_t(x,0)=w(x),\qquad 0<x<1 \tag{1.3}$$

其中函数 f, s, w 充分光滑且满足相容性条件：

$$s(0)=s(1)=w(0)=w(1)=s''(0)=s''(1)=f(0,t)=f(1,t)=0 \tag{1.4}$$

当$\varepsilon=0$时问题A_ε退化为问题A_0：

$$L_0U_0(x,t)\equiv U_{0t}-U_{0xx}=f(x,t),\quad 0<x<1,\quad 0<t<T \tag{1.5}$$

$$U_0(0,t)=U_0(1,t)=0,\qquad 0<t<T \tag{1.6}$$

$$U_0(x,0)=s(x),\qquad 0<x<1 \tag{1.7}$$

这是抛物型方程第一边值问题．(1.3)的第二个初始条件就失去了．根据渐近分析[1],[2]在 $t=0$ 附近出现边界层现象．按照Lyusternik-Vishik方法，我们对问题A_ε构造了余项为$O(\varepsilon^2)$的渐近解．

对于奇异摄动问题A．M．Il'in曾指出，如果用古典差分方法解这样的问题会产生非一致收敛或人为的振荡．他构造了一种特殊的差分格式，并证明了它的关于ε的一致收敛性[3]．按照Il'in的思想，我们对问题A_ε构造了指数型的差分格式，不仅在方程的最高阶差商项上加了拟合因子，而且在逼近第二个初始条件时也加了一个拟合因子．我们证明了这个特殊的差分格式的一致收敛性．

---

* 苏煜城推荐．

二、连续问题的稳定不等式

考虑 Sturm–Liouville 问题：

$$y_n''(x)+\lambda_n y_n(x)=0, \qquad y_n(0)=y_n(1)=0 \tag{2.1}$$

其特征函数和特征值为

$$\{y_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x\}, \qquad \{\lambda_n=n^2\pi^2\}, \qquad n=1,2,\cdots$$

设 $C^*[0,1]=\{G(x)\,|\,G(x)$充分光滑且 $G(0)=G(1)=0\}$。

引理2.1 设 $G(x)\in C^*[0,1]$。那么

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n^2=\int_0^1 G^2(x)dx \tag{2.2}$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 G_n^2=\int_0^1 (G'(x))^2dx \tag{2.3}$$

(iii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^4 G_n^2=\int_0^1 (G''(x))^2dx \tag{2.4}$$

这里G_n表示第n个Fourier系数，即

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n y_n(x), \qquad G_n=\int_0^1 G(x)y_n(x)dx$$

引进范数 $\|G(x)\|=\left[\int_0^1 G^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$

定理2.1 设 $u(x,t)$是问题A_ε的解。那么

$$\|u(x,t)\|\leqslant C\left(\int_0^t \|f(x,z)\|dz+\|s(x)\|+\varepsilon\|w(x)\|\right) \tag{2.5}$$

在这里及以后，我们总是用C表示不依赖于x,t,ε和网络步长的常数。

证明 按相容性条件(1.4)我们对函数u,s,w和f进行 Fourier 展开并代入方程(1.1)和初始条件(1.3)，于是我们得到了$u(x,t)$的Fourier系数所满足的常微分方程初值问题：

$$\varepsilon u_n''(t)+u_n'(t)+n^2\pi^2u_n(t)=f_n(t) \tag{2.6}$$

$$u_n(0)=s_n, \quad u_n'(0)=w_n \tag{2.7}$$

设η_{1n}和η_{2n}是(2.6)的特征方程$\varepsilon\eta_n^2+\eta_n+n^2\pi^2=0$的根。

则
$$\eta_{1n}=(-1-\sqrt{1-4\varepsilon n^2\pi^2})/2\varepsilon, \quad \eta_{2n}=(-1+\sqrt{1-4\varepsilon n^2\pi^2})/2\varepsilon \tag{2.8}$$

利用参数变异法我们可以得到下面的结果。

如果 $1-4\varepsilon n^2\pi^2\neq 0$，则

$$\begin{aligned}u_n(t)=\Big\{&\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[\exp(\eta_{2n}(t-z))-\exp(\eta_{1n}(t-z))]f_n(z)dz\\&+[\eta_{2n}\exp(\eta_{2n}t)-\eta_{1n}\exp(\eta_{1n}t)]s_n\\&+[\exp(\eta_{2n}t)-\exp(\eta_{1n}t)]w_n\Big\}\Big/(\eta_{2n}-\eta_{1n})\end{aligned} \tag{2.9}$$

如果 $1-4\varepsilon n^2\pi^2=0$， 即$\eta_{1n}=\eta_{2n}=\eta_n=-1/2\varepsilon$。则

$$u_n(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \exp(\eta_n(t-z))(t-z)f_n(z)dz$$

$$+\left(1+\frac{t}{2\varepsilon}\right)\exp(\eta_n t)s_n+t\exp(\eta_n t)w_n \tag{2.10}$$

我们现在来考虑三种情况：

（1） $1-4\varepsilon n^2\pi^2>0$

因为 $\eta_{2n}-\eta_{1n}=\sqrt{1-4\varepsilon n^2\pi^2}/\varepsilon<1/\varepsilon$， $-1/\varepsilon<\eta_{1n}<-1/2\varepsilon<\eta_{2n}<0$ 容易得到

（a） 如果$1/4<1-4\varepsilon n^2\pi^2\leqslant 1$，则

$$|u_n(t)|\leqslant C\left(\left|\int_0^t f_n(z)dz\right|+|s_n|+\varepsilon|w_n|\right) \tag{2.11}$$

（b） 如果 $0<1-4\varepsilon n^2\pi^2\leqslant 1/4$，则 $\eta_{1n}<\eta_{2n}<(-1+1/2)/2\varepsilon=-1/4\varepsilon$，利用中值定理可得

$$u_n(t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \exp(\xi_1(t-z))(t-z)f_n(z)dz+(\eta_{2n}t\exp(\xi_2 t)$$

$$+\exp(\eta_{2n}t))s_n+t\exp(\xi_2 t)w_n$$

其中 $\eta_{1n}<\xi_1$， $\xi_2<\eta_{2n}<-1/4\varepsilon$

因为 $\left(\int_0^t (t-z)\exp(\xi_1(t-z))f_n(z)dz\right)^2$

$$\leqslant\left(\int_0^t (t-z)^2\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}(t-z)\right)dz\right)\left(\int_0^t f_n^2(z)dz\right)=\frac{1}{16}\varepsilon^3\left(\int_0^t f_n^2(z)dz\right)$$

所以 $$|u_n(t)|\leqslant C\left\{\left(\int_0^t f_n^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}+|s_n|+\varepsilon|w_n|\right\} \tag{2.12}$$

（2） $1-4\varepsilon n^2\pi^2=0$。此时与情况(1)的(b)相类似。

（3） $1-4\varepsilon n^2\pi^2<0$。

设$\eta_{1n}=\alpha-\beta_n i$，$\eta_{2n}=\alpha+\beta_n i$，其中 $\alpha=-1/2\varepsilon$，$\beta_n=\sqrt{4\varepsilon n^2\pi^2-1}/2\varepsilon$。将其代入(2.9)，可得

$$u_n(t)=\frac{1}{\beta_n}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \exp(\alpha(t-z))\sin\beta_n(t-z)f_n(z)dz\right.$$

$$\left.+\exp(\alpha t)\ (\beta_n\cos\beta_n t-\alpha\sin\beta_n t)s_n+\exp(\alpha t)\sin\beta_n t\ w_n\right\}$$

因为$|\sin\beta_n t|\leqslant\beta_n t$，所以

$$\left|\frac{1}{\varepsilon\beta_n}\int_0^t \exp(\alpha(t-z))\sin\beta_n(t-z)f_n(z)dz\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^t (t-z)^2\exp(2\alpha(t-z))\,dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t f_n^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t f_n^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\exp(\alpha t)\left(\cos\beta_n t-\alpha\frac{\sin\beta_n t}{\beta_n}\right)s_n\right|$$

$$\leqslant\left(\left|\exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon}\right)\cos\beta_n t\right|+\left|\frac{t}{2\varepsilon}\exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon}\right)\right|\cdot\left|\frac{\sin\beta_n t}{\beta_n t}\right|\right)|s_n|\leqslant C|s_n|$$

$$\frac{1}{\beta_n}|\exp(\alpha t)\sin\beta_n t\, w_n|=\left|\exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon}\right)\cdot\frac{t}{2\varepsilon}\right|\left|\frac{\sin\beta_n t}{\beta_n t}\right|\cdot 2\varepsilon|w_n|\leqslant C\varepsilon|w_n|$$

从而我们有

$$|u_n(t)|\leqslant C\left\{\left(\int_0^t f_n^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}+|s_n|+\varepsilon|w_n|\right\} \tag{2.13}$$

在三种情况下不等式(2.13)都成立，根据引理2.1(i)，本定理就得到证明。

三、摄动问题的解及其导数的估计

定理3.1 $\|u_{x^m}\|\leqslant C$，$\|u_{t^n}\|\leqslant C\varepsilon^{-(n-1)}$，$m=0,\cdots,4$；$n=1,\cdots,4$ (3.1)

证明 从定理2.1中立即可得$\|u(x,t)\|\leqslant C$。

从引理2.1(iii)和定理2.1，我们有

$$\|u_{xx}(x,t)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}n^4\pi^4u_n^2(t)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^4\pi^4C^2\left\{\left(\int_0^t f_n^2(z)dz\right)^{\frac{1}{2}}+|s_n|+\varepsilon|w_n|\right\}^2$$

$$\leqslant 2C^2\left\{\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}n^4\pi^4f_n^2(z)dz+\sum_{n=1}^{\infty}n^4\pi^4s_n^2+\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}n^4\pi^4w_n^2\right\}$$

$$=2C^2\left\{\int_0^t\|f_{xx}(x,z)\|^2dz+\|s''(x)\|^2+\varepsilon^2\|w''(x)\|^2\right\}\leqslant C$$

由方程(1.1)，$u_{tt}(x,0)=\{f(x,0)-u_t(x,0)+u_{xx}(x,0)\}/\varepsilon$

$=\{f(x,0)-w(x)+s''(x)\}/\varepsilon=q(x)/\varepsilon$

从(1.4)得 $q(0)=q(1)=0$，从而我们得到一个关于$u_t(x,t)$的问题A_ε：

$$\left.\begin{aligned}&L_\varepsilon u_t\equiv\varepsilon(u_t)_{tt}+(u_t)_t-(u_t)_{xx}=f_t(x,t)\\&u_t(0,t)=u_t(1,t)=0\\&u_t(x,0)=w(x),\quad (u_t)_t(x,0)=q(x)/\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

利用定理2.1我们可以得到

$$\|u_t\|\leqslant C\left\{\int_0^t\|f_z(x,z)\|dz+\|w(x)\|+\varepsilon\|q(x)/\varepsilon\|\right\}\leqslant C$$

反复运用Sturm-Liouville问题(2.1)和方程(1.1)，我们可以得到本定理的其它一些估计。

四、摄动问题的渐近解

我们利用Lyusternik-Vishik方法来构造摄动问题的渐近展开式。

第一迭代过程：

设 $U(x,t)=U_0+\varepsilon U_1$，代入问题(1.1)得

$$(U_{0t}-U_{0xx})+\varepsilon(U_{1t}-U_{1xx}+U_{0tt})+\varepsilon^2U_{1tt}=f(x,t) \tag{4.1}$$

第二迭代过程：

设 $\tau=t/\varepsilon$，那么相应于(1.1)的第二次分解的齐次方程为

$$\frac{1}{\varepsilon}V_{\tau\tau}+\frac{1}{\varepsilon}V_{\tau}-V_{xx}=0 \tag{4.2}$$

设 $V=\varepsilon V_0+\varepsilon^2 V_1$。代入(4.2)式中，得到

$$(V_{0\tau\tau}+V_{0\tau})+\varepsilon(V_{1\tau\tau}+V_{1\tau}-V_{0xx})-\varepsilon^2 V_{1xx}=0 \tag{4.3}$$

我们利用双重迭代过程：

① 在(4.1)中ε^0的项为

$$U_{0t}-U_{0xx}=f(x,t);\ U_0(0,t)=U_0(1,t)=0,\ U_0(x,0)=s(x) \tag{4.4}$$

从中可以解出$U_0(x,t)$。

② 在(4.3)中ε^0的项为

$$V_{0\tau\tau}+V_{0\tau}=0;\ \lim_{\tau\to\infty}V_0(x,\tau)=0,\ V_{0\tau}|_{\tau=0}=w(x)-U_{0t}|_{t=0} \tag{4.5}$$

从中可解得$V_0(x,t)=g_0(x)\exp(-\tau)$，其中$g_0(x)=U_{0t}(x,0)-w(x)$。

③ 在(4.1)中的ε^1的项为

$$\begin{cases}U_{1t}-U_{1xx}=-U_{0tt}\\ U_1(0,t)=U_1(1,t)=0,\ U_1(x,0)=-g_0(x)=w(x)-U_{0t}(x,0)\end{cases} \tag{4.6}$$

从中可以解出$U_1(x,t)$。

④ 在(4.3)中ε^1的项为

$$\begin{cases}V_{1\tau\tau}+V_{1\tau}=V_{0xx}=g_0''(x)\exp(-\tau)\\ \lim\limits_{\tau\to\infty}V_1(x,\tau)=0,\ V_{1\tau}|_{\tau=0}=-U_{1t}|_{t=0}\end{cases} \tag{4.7}$$

从中解得 $V_1(x,t)=g_1(x)\exp(-\tau)-g_0''(x)\tau\exp(-\tau)$

其中 $g_1(x)=U_{1t}(x,0)-g_0''(x)$

定理4.1 设$\bar{u}(x,t)=U_0+\varepsilon U_1+\varepsilon V_0+\varepsilon^2 V_1$。则有

$$\|u(x,t)-\bar{u}(x,t)\|=O(\varepsilon^2) \tag{4.8}$$

证明 利用(4.1)～(4.7)，我们有

$$L_\varepsilon(u-\bar{u})=-\varepsilon^2 U_{1tt}+\varepsilon^2\left[g_1(x)\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)-g_0''(x)\frac{t}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]=O(\varepsilon^2)$$

$$(u-\bar{u})|_{x=0}=(u-\bar{u})|_{x=1}=0$$

$$(u-\bar{u})|_{t=0}=-\varepsilon^2 g_1(x)=O(\varepsilon^2),\ \text{且}g_1(0)=g_1(1)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u-\bar{u})|_{t=0}=0$$

对$(u-\bar{u})$利用定理2.1，即可以得到本定理。

五、差分格式和离散稳定不等式

现建立网络 $\{(x_i,t_j)|x_i=ih,t_j=jk;\ Mk=T,Nh=1,i=0,\cdots,N,\ j=0,\cdots,M\}$，并构造差分格式如下：

$$L^{(k,h)}u_{ij}\equiv\varepsilon\sigma_1\Delta_{t\bar{t}}u_{ij}+\Delta_{\bar{t}}u_{ij}-\Delta_{x\bar{x}}E_t u_{ij}=f(x_i,t_j),$$
$$i=1,\ \cdots,\ N-1;\ j=1,\ \cdots,\ M-1 \tag{5.1}$$

$$u_{0,j}=u_{N,j}=0,\qquad j=1,\ \cdots,\ M-1 \tag{5.2}$$

$$u_{i,0}=s(x_i)\qquad i=1,\ \cdots,\ N-1 \tag{5.3}$$

$$\Delta_t u_{i,0}=U_{0t}(x_i,0)-\sigma_2(U_{0t}(x_i,0)-w(x_i)),\qquad i=1,\ \cdots,\ N-1 \tag{5.4}$$

其中
$$\Delta_{t\bar{t}}u_{i,j}=(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})/k^2$$
$$\Delta_{x\bar{x}}u_{i,j}=(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})/h^2$$
$$\Delta_{\mathring{t}}u_{i,j}=(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})/2k$$
$$\Delta_t u_{i,j}=(u_{i,j+1}-u_{i,j})/k,\quad E_t u_{i,j}=(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})/2$$

σ_1，σ_2是指数型拟合因子：$\sigma_1=(\rho/2)\mathrm{cth}(\rho/2)$，$\sigma_2=[1-\exp(-\rho)]/\rho$，$\rho=k/\varepsilon$，$U_0(x,t)$是退化问题(4.1)的解。

引进离散范数$\|u_{i,j}\|_h=\left(h\sum\limits_{i=1}^{N-1}u_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$显然有 $C_1\|\cdot\|\leqslant\|\cdot\|_h\leqslant C_2\|\cdot\|$，$C_1$，$C_2$与$\varepsilon,h,k,u$都无关。

定理5.1 设$u_{i,j}$是问题(5.1)～(5.4)的解，则有

$$\|u_{i,j}\|_h\leqslant C\left\{k\sum_{m=1}^{j-1}\|L^{(h,k)}u_{i,m}\|_h+(\varepsilon+k)\|\Delta_t u_{i,0}\|_h+\|u_{i,0}\|_h\right\} \tag{5.5}$$

证明 利用齐次边界条件(5.2)，我们可设

$$u_{i,j}=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{l=1}^{N-1}v_{l,j}\sin\frac{li\pi}{N} \tag{5.6}$$

显然有
$$v_{l,j}=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{i=1}^{N-1}u_{i,j}\sin\frac{li\pi}{N} \tag{5.7}$$

$$\|u_{i,j}\|_h^2=\|v_{l,j}\|_h^2 \tag{5.8}$$

将(5.6)代入(5.1)，我们得到三点差分格式

$$\alpha_l v_{l,j+1}+\beta_l v_{l,j}+\gamma_l v_{l,j-1}=kL_l^h v_{l,j} \tag{5.9}$$

其中
$$\left.\begin{aligned}&\alpha_l=\frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}\frac{\rho}{2}+1+\frac{4k}{h^2}\sin^2\frac{l\pi}{2N}\right),\quad \beta_l=-\mathrm{cth}\frac{\rho}{2}\\&\gamma_l=\frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}\frac{\rho}{2}-1+\frac{4k}{h^2}\sin^2\frac{l\pi}{2N}\right),\quad L^{(h,k)}u_{i,j}\equiv\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{l=1}^{N-1}L_l^h v_{lj}\sin\frac{li\pi}{N}\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

设$\lambda_{l1},\lambda_{l2}$是特征方程$\alpha_l\lambda_l^2+\beta_l\lambda_l+\gamma_l=0$的两个根。

（1） 如果 $\beta_l^2-4\alpha_l\gamma_l=0$，即$\lambda_{l1}=\lambda_{l2}=\lambda_l$，则

$$v_{lj}=\frac{1}{\alpha_l}\left\{\sum_{m=1}^{j-1}(j-m)\lambda_l^{j-m-1}kL_l^h v_{l,m}+\alpha_l jk\lambda_l^{j-1}\Delta_t v_{l,0}\right.$$
$$\left.+\alpha_l\lambda_l^{j-1}[j(1-\lambda_l)+\lambda_l]v_{l,0}\right\} \tag{5.11}$$

（2） 若 $\beta_l^2-4\alpha_l\gamma_l\neq0$，即 $\lambda_{l1}\neq\lambda_{l2}$，则

$$v_{lj}=\frac{1}{\alpha_l(\lambda_{l1}-\lambda_{l2})}\left\{\sum_{m=1}^{j-1}(\lambda_{l1}^{j-m}-\lambda_{l2}^{j-m})kL_l^h v_{l,m}+\alpha_l k(\lambda_{l1}^j-\lambda_{l2}^j)\Delta_t v_{l,0}\right.$$
$$\left.+\alpha_l[\lambda_{l1}^j(1-\lambda_{l2})-\lambda_{l2}^j(1-\lambda_{l1})]v_{l,0}\right\} \tag{5.12}$$

因为$\alpha_l>1$，$\beta_l<-1$，$\gamma_l>0$，$0<\gamma_l/\alpha_l<1$，$|\beta_l|<\alpha_l+\gamma_l$，所以 $0<\lambda_{l_1}<1$，$0<\lambda_{l_2}<1$。类似于定理2.1的证明，我们可以分四种情况对(5.11)和(5.12)进行估计：

① $\Delta=\beta_l^2-4\alpha_l\gamma_l\geqslant\frac{1}{4}$，② $0<\Delta<\frac{1}{4}$，③ $\Delta=0$，④ $\Delta<0$。在这四种情况下，我们都可以得到

$$|v_{lj}|\leqslant C\left\{k\sum_{m=1}^{j-1}|L_l^h v_{l,m}|+(k+\varepsilon)|\Delta_t v_{l,0}|+|v_{l,0}|\right\} \tag{5.13}$$

利用 (5.9) 就可以获得本定理。

六、一致性估计

引理6.1 (i) $|\sigma_1-1|\leqslant C\rho$ (6.1)

(ii) $|\sigma_1-1|\leqslant C\rho^2$ (6.2)

(iii) $|\sigma_2-1|\leqslant\rho/2$ (6.3)

其中σ_1,σ_2是拟合因子(看(5.1),(5.4))，$\rho=k/\varepsilon$。

定理6.1 $\|u(x_i,t_j)-u_{i,j}\|_h=O\left(\frac{k^2}{\varepsilon^2}+k+h^2\right)$ (6.4)

证明 设 $R_{i,j}=u(x_i,t_j)-u_{i,j}$。用定理3.1，引理6.1和带积分余项的Taylor展式，我们有

$$\|L^{(h,k)}R_{i,j}\|_h=O(\|L^{(h,k)}R_{i,j}\|)=O\left(\frac{k^2}{\varepsilon^2}+k+h^2\right)$$

$$R_{i,0}=R_{0,j}=R_{N,j}=0,\ \|\Delta_t R_{i,0}\|_h=O(\|\Delta_t R_{i,j}\|)=O\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$$

利用定理5.1，得到

$$\|R_{i,j}\|_h\leqslant C\left\{k\sum_{m=1}^{j-1}\left(\frac{k^2}{\varepsilon^2}+k+h^2\right)+(k+\varepsilon)\frac{k}{\varepsilon}\right\}=O\left(\frac{k^2}{\varepsilon^2}+k+h^2\right)$$

定理6.2 $\|\bar{u}(x_i,t_j)-u_{i,j}\|_h=O(\varepsilon^2+k+h^2)$ (6.5)

证明 设 $r_{i,j}=\bar{u}(x_i,t_j)-u_{i,j}$，则

$$L^{(h,k)}r_{i,j}=L^{(h,k)}\bar{u}(x_i,t_j)-f(x_i,t_j)=\sum_{n=1}^{6}F_n$$

其中：

$$F_1=\Delta_{\bar{t}}U_0-\Delta_{x\bar{x}}E_tU_0-f=O(h^2+k^2)$$
$$F_2=\varepsilon(\sigma_1\Delta_{t\bar{t}}U_0+\Delta_{\bar{t}}U_1-\Delta_{x\bar{x}}E_tU_1)=O(\varepsilon h^2+\varepsilon k^2+k)$$
$$F_3=\varepsilon^2\sigma_1\Delta_{t\bar{t}}U_1=O(\varepsilon^2+k^2)$$
$$F_4=(\varepsilon g_0+\varepsilon^2 g_1)(\varepsilon\sigma_1\Delta_{t\bar{t}}+\Delta_{\bar{t}})\exp(-t_j/\varepsilon)=0$$
$$F_5=-\varepsilon^2 g_0''(\varepsilon\sigma_1\Delta_{t\bar{t}}+\Delta_{\bar{t}})\left(\frac{t_j}{\varepsilon}\exp(-t_j/\varepsilon)\right)$$
$$-\varepsilon^2\Delta_{x\bar{x}}E_t[g_0(x_i)\exp(-t_j/\varepsilon)]=O(\varepsilon k^2+\varepsilon h^2)$$

$$F_6=-\varepsilon^2\Delta_{x\bar{x}}E_t\left[g_0(x_i)\frac{t_j}{\varepsilon}\exp(-t_j/\varepsilon)+g_1\exp(-t_j/\varepsilon)\right]=O(\varepsilon^2)$$

故有， $L^{(h,k)}r_{i,j}=O(\varepsilon^2+k+h^2)$ (6.6)

而 $r_{i,0}=\varepsilon^2 g_1(x_i)=O(\varepsilon^2),\quad \Delta_t r_{i,0}=\sum_{n=1}^{6}Q_n$ (6.7)

其中

$$Q_1=\Delta_t U_0(x_i,0)-U_{0t}(x_i,0)=O(k)$$
$$Q_2=\varepsilon\Delta_t U_1(x_i,0)=O(\varepsilon)$$
$$Q_3=-\varepsilon g_0(1-\exp(-\rho))/k+\sigma_2(U_{0t}(x_i,0)-w(x_i))=0$$
$$Q_4=-\varepsilon g_1(1-\exp(-\rho))/k=O(k+\varepsilon)$$
$$Q_5=-\varepsilon g_0''\exp(-\rho)=O(\varepsilon)$$

故有 $\Delta_t r_{i,0}=O(\varepsilon+k)$ (6.8)

由(6.6)～(6.8)，运用定理5.1，得到

$$\|r_{i,j}\|_h\leqslant C\left\{k\sum_{m=1}^{j-1}(\varepsilon^2+k+h^2)+(\varepsilon+k)\ (\varepsilon+k)+\varepsilon^2\right\}=O(\varepsilon^2+k+h^2)$$

定理6.3 $\|u(x_i,t_j)-u_{i,j}\|_h=O(k+h^2)$ (6.9)

证明 如果 $\varepsilon^2\geqslant k$，用定理6.1，得

$$\|u(x_i,t_j)-u_{i,j}\|_h=O\left(\frac{k}{\varepsilon^2}\cdot k+k+h^2\right)=O(k+h^2)$$

如果 $\varepsilon^2\leqslant k$，用定理4.1和6.2，得到

$$\|u(x_i,t_j)-u_{i,j}\|_h\leqslant\|u(x_i,t_j)-\bar{u}(x_i,t_j)\|_h+\|\bar{u}(x_i,t_j)-u_{i,j}\|_h$$
$$\leqslant C_2\|u(x_i,t_j)-\bar{u}(x_i,t_j)\|+\|\bar{u}(x_i,t_j)-u_{i,j}\|_h=O(\varepsilon^2)+O(\varepsilon^2+k+h^2)=O(k+h^2)$$

本文结果可推广到方程

$\varepsilon\alpha(t)u_{tt}+\beta(t)u_t-a(x)u_{xx}=f(x,t)$ (6.10)

其中 $\alpha(t)$，$\beta(t)$，$a(x)\geqslant a_0>0$

这篇文章是在我的老师苏煜城和吴启光指导下完成的，在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Вишик М. И. и Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УМН*, 12, 5 (77) (1957), 3—122.

[2] 苏煜城，《奇异摄动问题中的边界层校正法》，科技出版社，上海 (1983).

[3] Ильин А. М., Разностная смеха для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной, *Матем. Заметки*, 6,2 (1969),237—248.

[4] Зламал М.(M. Zlamâl), О смешанной задача для одного гиперболического уравнения с малым параметром, *Чехол. Мат. Ж.*,9 (84) (1959),218—242.

[5] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[6] 苏煜城、吴启光，《微偏分方程数值解法》，南京大学数学系计算数学专业编，科学出版社 (1979).

A Difference Method for Singular Perturbation Problem of Hyperbolic-Parabolic Partial Differential Equation

Sheng Jin-reng

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper we constructed an exponentially fitted difference scheme for singular perturbation problem of hyperbolic-parabolic partial differential equation. We not only take a fitting factor in the equation, but also put one in the approximation of second initial condition. By means of the asymptotic solution of singular perturbation problem we proved the uniform convergence of this scheme with respect to the small parameter.