

# 几种非线性隔离系统受随机激励时的响应分析\*

庄表中 陈乃立 傅博 高瞻

(浙江大学) (浙江大学) (航空工业部623所) (浙江大学)

(卢文达推荐, 1984年3月24日收到)

## 摘要

非线性隔离系统在现代隔振技术中是常用的。本文用 Fokker-Planck 方程、统计线性化等方法研究了在随机激励下, 硬非线性刚度类减振器的最佳阻尼选择; 非反对称非线性刚度的单自由度隔离系统的响应特征; 两自由度非线性隔离系统的响应分析。并通过计算实例, 讨论了非线性隔离系统的一些参数选择。

### 一、具有反对称三次方硬非线性刚度的单自由度系统受白噪声激励的响应

这种系统的随机微分方程为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k_1y^3 = x(t) \quad (1.1)$$

用 Fokker-Planck 法<sup>[1]</sup>、统计线性化法<sup>[2]</sup>和摄动法分别算得的响应均方值  $E[y^2]$  列于表 1, 并将非线性项的影响系数  $h_i$  画成曲线示于图 1。表 1 中的  $\mu_1 = 2\pi s_0 k_1 / ck^2$ , 其中  $s_0$  表示激励的白噪声谱密度,  $\sqrt{k/m}$  和  $\pi s_0 / ck$  分别表示系统无非线性项时的固有频率和响应均方值。

计算方法	均方值	响应的均方值
		$E[y^2] = h_i \frac{\pi s_0}{ck} \quad (i=1,2,3)$
1. Fokker-Planck法	$h_1 =$	$1 - \frac{15}{8} \mu_1 + \frac{945}{128} \mu_1^2$ $1 - \frac{3}{8} \mu_1 + \frac{105}{128} \mu_1^2$
2. 统计线性化方法	$h_2 =$	$\frac{1}{3\mu_1} (-1 + \sqrt{1 + 6\mu_1})$
3. 摄动法	$h_3 =$	$1 - \frac{3}{2} \mu_1$

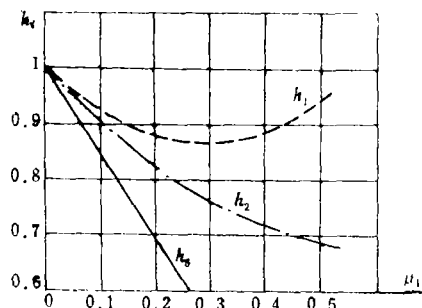


图1  $h_i$  曲线的比较

\* 本文曾在1984年10月上海举办的中日联合振动会议上宣读。1984 China-Japan Vibration Joint Conference, Shanghai, October, 23—26.

将上述三种计算方法所得的结果<sup>[4]</sup>进行比较, 可得下列结论:

(1)  $h_1, h_2, h_3$  都小于 1, 说明硬非线性项的存在使  $E[y^2]$  值减少了。

(2) Fokker-Planck 法应该还是比较精确的, 因为它不受非线性程度必需弱的限制。从图 1 可见, 影响系数  $h_1$  有极小值, 从  $dh_1/d\mu_1=0$ , 得  $\mu_1=0.1155$ 。说明用均方值作为减振评价指标时,  $\mu_1$  取此值时减振效果为最好。从而求得最佳阻尼值

$$c=2\pi s_0 k_1/\mu_1 k^2 \quad (1.2)$$

## 二、具有非反对称非线性刚度的单自由度系统的响应特征

工程中常见的某些减振系统, 其弹性恢复力是非反对称的, 如图 2 (a)(b) 所示。具有这类刚度的单自由度系统的随机微分方程为

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+F(y)=x(t) \quad (2.1)$$

式中  $F(y)$  为非对称弹性恢复力, 假设  $x(t)$  为平稳高斯白噪声随机过程的一个样本, 其自相关函数为

$$\phi_{xx}(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]=2\pi s_0\delta(\tau) \quad (2.2)$$

因为白噪声  $x(t)$  的均方值不可积分, 须把方程 (2.1) 变为伊藤 (Itô) 随机微分方程, 其响应是一个二维 Markov 过程, 并满足 Fokker-Planck 方程, 经整理后得

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[ \frac{F(y)}{m} p + \frac{\pi s_0}{cm} \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \left( \frac{c}{m} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \dot{y} p + \frac{\pi s_0}{cm} \frac{\partial p}{\partial \dot{y}} \right] = 0 \quad (2.3)$$

式中,  $p$  就是状态分量的联合概率密度函数  $p(y, \dot{y})$ 。从 (2.3) 式求解  $p(y, \dot{y})$  是很困难的, 但如果可以假设  $y$  与  $\dot{y}$  为统计不相关, 则有

$$p(y, \dot{y}) = p(y) \cdot p(\dot{y}) \quad (2.4)$$

可求得

$$p(\dot{y}) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{cm}{2s_0}} \exp \left[ -\frac{cm}{2\pi s_0} \dot{y}^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{y}}} \exp \left[ -\frac{\dot{y}^2}{2\sigma_{\dot{y}}^2} \right] \quad (2.5)$$

其中速度响应的方差  $\sigma_{\dot{y}}^2$  等于其均方值

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = E[\dot{y}^2] = \pi s_0 / cm \quad (2.6)$$

位移响应概率密度函数, 均值, 均方值, 方差分别为

$$p(y) = c_1 \exp \left\{ -\frac{c}{\pi s_0} \int_0^y F(\xi) d\xi \right\} \quad (2.7)$$

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} y p(y) dy \quad (2.8)$$

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y) dy \quad (2.9)$$

$$\sigma_y^2 = E[y^2] - (E[y])^2 \quad (2.10)$$

上面各式中的  $c_1$  可由具体问题的概率归一化条件求得,

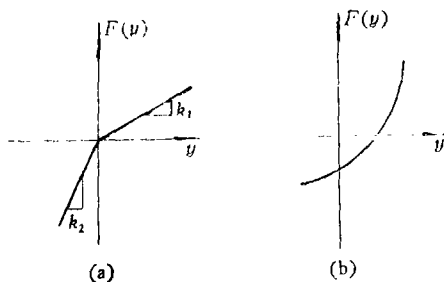


图2  $F(y)$  曲线

$$c_1 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{c}{\pi s_0} \int_0^y F(\xi) d\xi \right\} dy \right]^{-1} \quad (2.11)$$

本文计算了两种有代表性的情况:

(1) 分段线性系统 (如图 2 (a)), 恢复力用分段函数表示

$$F(y) = \begin{cases} k_1 y, & y < 0 \\ k_2 y = \mu_2 k_1 y, & y > 0 \end{cases} \quad (k_2 > k_1) \quad (2.12)$$

式中  $\mu_2 = k_2/k_1$ , 将(2.12)式代入(2.7)~(2.11)式后, 得

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sigma_1(1 + \sqrt{\mu_2})} \quad (2.13)$$

其中  $\sigma_1 = \sqrt{\pi s_0 / ck_1}$ , 相当于刚度为  $k_1$  的线性系统位移响应的标准偏差.

$$p(y) = \begin{cases} c_1 \exp\{-\mu_2 y^2 / 2\sigma_1^2\}, & y < 0 \\ c_1 \exp\{-y^2 / 2\sigma_1^2\}, & y \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$E[y] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_1 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \right) \quad (2.15)$$

$$E[y^2] = \frac{\pi s_0}{c} \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{\sqrt{k_1 k_2}} \right) = \sigma_1^2 h \quad (2.16)$$

其中  $h = (1 + 1/\mu_2 - 1/\sqrt{\mu_2})$ , 为非线性项的影响系数. 方差为

$$\sigma_y^2 = \sigma_1^2 \left[ h - \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

取  $\sigma_1^2 = 1$ ,  $f_1 = (1/2\pi)\sqrt{k_1/m} = 1$ , 对不同的  $\mu_2$  值, 在计算机上算出  $E[y^2]$  的结果列于表 2

$\mu_2$	$E[y]$	$E[y^2]$	$\sigma_y^2$	备注
0.10	1.725	7.838	4.862	$\sigma_1^2 = \frac{\pi s_0}{ck_1} = 1$
0.25	0.798	3.000	2.368	
0.50	0.330	1.586	1.476	$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 1$
1.00*	0*	1.0*	1.0*	
2.00	-0.234	0.793	0.738	
4.00	-0.399	0.750	0.592	
10.00	-0.546	0.784	0.482	

表 2.

从表 2 可见, 当  $\mu_2 < 1$  (即  $k_2 < k_1$ ) 时, 非线性项具有“软”特性,  $E[y^2]$  大于线性情况, 当  $\mu_2 > 1$  (即  $k_2 > k_1$ ) 时, 非线性项具有“硬”特性,  $E[y^2]$  在  $\mu_2 = 4$  附近有极小值, 这一点很有实际意义.

(2) 非对称非线性系统 (如图 2 (b)), 恢复力可分解为奇函数  $O(y)$  和偶函数  $E(y)$  两部分

$$F(y) = O(y) + E(y) \quad (2.18)$$

式中  $E[y]$  反映了非对称因素. 为了不失一般性, 取三项

$$F(y) = k_1(y + \mu_3 y^2 + \mu_4 y^3) \quad (2.19)$$

其中  $\mu_3 = k_2/k_1$ ,  $\mu_4 = k_3/k_1$ , 只要满足  $\mu_3^2 < 3\mu_4$ , 则 (2.19) 式就是过原点的单值递增函数.

将(2.19)代入(2.11), 再代入(2.8)和(2.9), 得

$$E[y] = \frac{N}{M} \quad (2.20)$$

$$E[y^2] = \sigma_1^2 P/M \quad (2.21)$$

式中 
$$N = \mu_3 \left( -\sigma_1^2 + \frac{105}{12} \sigma_1^4 \mu_4 - \frac{10395}{96} \sigma_1^6 \mu_4^2 \right)$$

$$M = 1 - \frac{3}{4} \sigma_1^2 \mu_4 + \frac{105}{32} \sigma_1^4 \mu_4^2 + \frac{15}{18} \sigma_1^2 \mu_3^2 - \frac{945}{72} \sigma_1^4 \mu_3^2 \mu_4 + \frac{135135}{576} \sigma_1^6 \mu_3^2 \mu_4^2$$

$$P = 1 - \frac{15}{4} \sigma_1^2 \mu_4 + \frac{945}{32} \sigma_1^4 \mu_4^2 + \frac{105}{18} \sigma_1^2 \mu_3^2 - \frac{10395}{72} \sigma_1^4 \mu_3^2 \mu_4 + \frac{2027025}{576} \sigma_1^6 \mu_3^2 \mu_4^2$$

$$\sigma_1^2 = \pi s_0 / ck_1$$

取  $\sigma_1^2 = \pi s_0 / ck_1 = 1$ ,  $f_1 = (1/2\pi) \sqrt{k_1/m} = 1$ , 对几种不同的  $\mu_3$ ,  $\mu_4$  值, 在计算机上进行计算, 均方值随  $\mu_3$  和  $\mu_4$  变化的情况如图 3 所示。

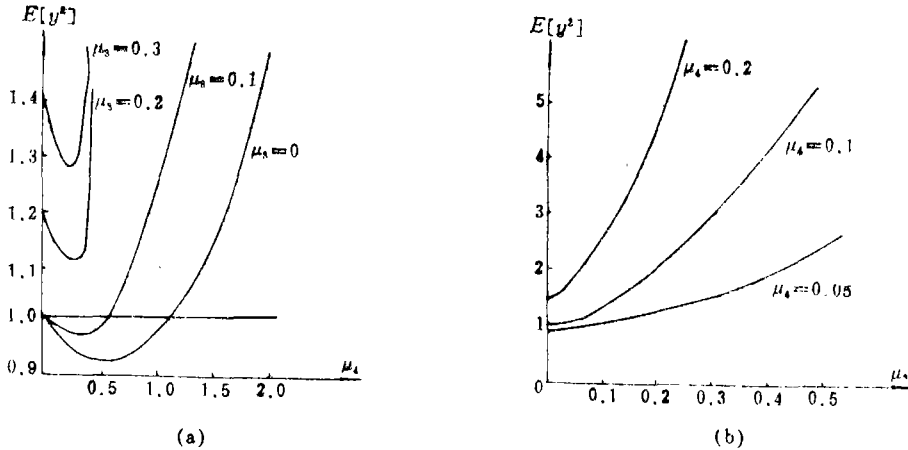


图3 位移响应均方值曲线

从图 3 可见,  $E[y^2]$  具有极小值, 且只有在  $\mu_3$  和  $\mu_4$  都较小 (即弱非线性) 时,  $E[y^2]$  才小于 1。

### 三、两自由度非线性隔离系统受随机激励时的响应

这里仅讨论图 4 所示的简化模型。该系统中包括线性弹簧  $k_2$  和非线性弹簧  $k = k_1[1 + \beta(z_1 - x_0)^2]$ , 其中  $\beta \ll 1$ 。假设仅考虑垂直振动, 基础上作用着谱密度为  $s_0$  的高斯型白噪声随机加速度激励  $\ddot{x}_0$ 。若选相对坐标  $y_1 = z_1 - x_0$ ,  $y_2 = z_2 - z_1$ , 取状态变量  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = \dot{y}_1$ ,  $x_3 = y_2$ ,  $x_4 = \dot{y}_2$ 。则该系统在 Itô 意义下的随机微分方程为

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt \\ dx_2 &= (2\alpha \xi_2 \omega_2 x_4 + \alpha \omega_1^2 x_3 - 2\xi_1 \omega_1 x_2 - \omega_1^2 x_1 - \beta \omega_1^2 x_1^2) dt - dW(t) \\ dx_3 &= x_4 dt \\ dx_4 &= [-2(1+\alpha)\xi_2 \omega_2 x_4 - (1+\alpha)\omega_2^2 x_3 + 2\xi_1 \omega_1 x_2 + \omega_1^2 x_1 + \beta \omega_1^2 x_1^2] dt \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中,  $\alpha = m_2/m_1$ ,  $\omega_i^2 = k_i/m_i$ ,  $\xi_i = c_i/2\omega_i m_i$  ( $i=1,2$ ),  $W(t)$  为 Wiener 随机过程。根据 Markov 过程理论<sup>(1)</sup>, 设 (3.1) 式的解为

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_4(t)]^T$$

则响应的转移概率密度函数  $p(\mathbf{X}, t | \mathbf{X}_0, t_0)$  满足 Fokker-Planck 方程, 对于图 4 所示的系统, 可导出下列方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} [x_2 p] + \frac{\partial}{\partial x_2} [(2\alpha \xi_2 \omega_2 x_4 + \alpha \omega_1^2 x_3 - 2\xi_1 \omega_1 x_2 - \omega_1^2 x_1 - \beta \omega_1^2 x_1^2) p]$$

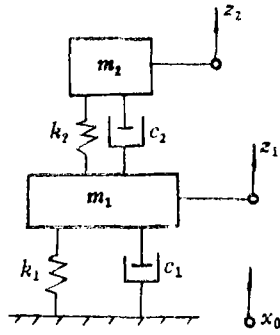
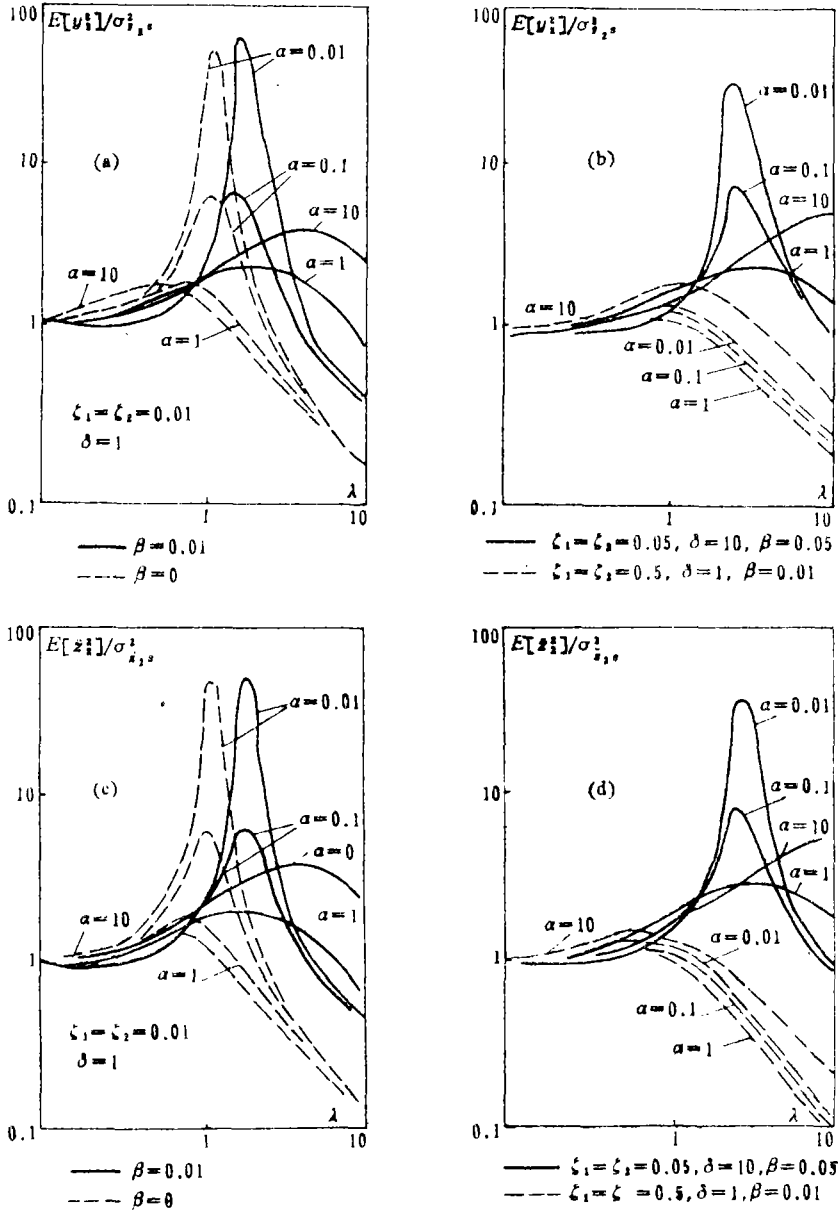


图4 二自由度系统简化模型



$\lambda = \omega_2/\omega_1$ ,  $\delta = s_0/\omega_1^2$ ,  $\alpha = m_2/m_1$ ,  $\xi_i = c_i/2\omega_i m_i$  ( $i=1,2$ ),  $\sigma_{v_2}^2 = \pi s_0/c_2 k_2$ ,  $\sigma_{z_2}^2 = \pi s_0 \omega_2 (1+4\xi_2^2)/2\xi_2$

图5 相对位移和绝对加速度响应均方值曲线

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial x_3} [x_4 p] + \frac{\partial}{\partial x_4} \{[-2(1+\alpha)\zeta_2 \omega_2 x_4 - (1+\alpha)\omega_2^2 x_3 + 2\zeta_1 \omega_1 x_2 \\
& + \omega_1^2 x_1 + \beta \omega_1^2 x_1^3] p\} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [\pi s_0 p] = 0
\end{aligned} \quad (3.2)$$

我们感兴趣的是质量 $m_2$ 的隔振效果。为此设几组数据进行数值积分。用准矩截断法<sup>[3]</sup>求质量 $m_2$ 的响应均方值，并绘制成响应曲线，如图5所示。从图5可见：

(1) 当系统参数取得适当时，双层非线性隔振系统与单层隔振系统的响应均方值之比  $E[\ddot{z}_2^2]/\sigma_{z_2}^2$ ， $E[y_2^2]/\sigma_{y_2}^2$ ，可以小于1，且相对位移和绝对加速度的变化趋势是一致的。因而应用双层隔振系统是有利的。

(2) 若参数选择不当，则双层隔振系统的隔振效果还没有单层好，非线性隔振系统的隔振效果还没有线性的好。

### 参 考 文 献

- [1] Светлицкий В. А., *Случайные Колебания Механических Систем*, Москва «МАШИНОСТРОЕНИЕ» (1975).
- [2] Iwan, W. D., A generalization of the method of equivalent linearization, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 8 (1973), 279—287.
- [3] Bover, D. C. C., Moment equation methods for nonlinear stochastic systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 65 (1978), 306—320.
- [4] 庄表中、陈乃立、秦瑞芬，非线性减振器的鉴别及其受白噪声激励时的响应分析，*振动与冲击*, 2 (1984).

## The Response Analysis of Several Nonlinear Isolation Systems Subjected to Random Excitation

Zhuang Biao-zhong    Chen Nai-li  
(Zhejiang University, Hangzhou)

Fu Bo  
(Institute 623, Beijing)

Gao Zhan  
(Zhejiang University, Hangzhou)

### Abstract

The nonlinear isolation system is popular in modern isolation mounting. By using Fokker-Planck equation and the statistical linearization method and under the condition of random excitation, we discuss in this article the best damping selection of the dashpots of the stiffening nonlinear stiffness, the response characteristics of the single-degree-of-freedom isolation system of non-antisymmetrical and nonlinear stiffness, and the response analysis of two-degree-of-freedom nonlinear isolation systems. The selection of some parameters of the nonlinear isolation system is also dealt with by virtue of calculation examples.