

# 软弹簧系统在周期小扰动下 通向浑沌的道路

刘曾荣 姚伟国 朱照宣

(安徽大学) (固体物理所) (北京大学)

(1984年12月1日收到)

## 摘 要

本文用 Mel'nikov-Holmes 方法讨论了软弹簧系统在周期小扰动作用下进入浑沌的途径。发现对于这类系统, 由于所加扰动的方式不同, 系统会以不同次谱分叉序列通向浑沌, 且随着外加频率的变化这种序列会以不同的排列方式把系统导入浑沌。

## 一、引 言

单自由度软弹簧系统的方程为

$$M \frac{d^2 X}{dT^2} + D \frac{dX}{dT} + CX - NX^3 = 0 \quad (1.1)$$

其中参数  $M, D, C, N > 0$ ,  $\Omega_0 = \sqrt{M/C}$  是(1.1)的线性化系统的固有频率, 作变量变换

$$X = x\sqrt{C/N}, \quad T = \Omega_0 t \quad (1.2)$$

就能把(1.1)化为

$$\ddot{x} + x - x^3 = -\varepsilon \delta \dot{x} \quad (1.3)$$

其中阻尼系数  $\varepsilon \delta = D/\sqrt{MC}$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\delta = O(1)$ 。

我们分别考虑系统受到弱周期强迫力和弱周期参数激励作用的两种不同情况。对于受到弱周期强迫力作用情况, 方程在  $(x, t)$  坐标下成为标准的 Duffing 形式

$$\ddot{x} + x - x^3 = -\varepsilon \delta \dot{x} + \varepsilon f \cos \omega t \quad (1.4)$$

其中  $f = O(1)$ 。利用(1.2), 由(1.4)中  $f$  和  $\omega$  能够得在原变量  $(X, T)$  下强迫力的振幅和频率。对于弱参数激励情况, 得到方程为:

$$\ddot{x} + x(1 + \varepsilon f \cos \omega t) - x^3 = -\varepsilon \delta \dot{x} \quad (1.5)$$

(1.5)是一个非线性 Mathieu 方程。

我们用 Mel'nikov-Holmes<sup>[1]</sup> 方法讨论软弹簧系统在这两种小周期扰动下通向浑沌的途径。发现系统以不同的次谱分叉序列通向浑沌, 且随着频率不同序列会以不同排列方式把系统导向浑沌。

在下一节中, 我们计算了在两种扰动情况下产生横截同宿(homoclinic)点以及各次谱分

义的门槛值；在最后一节中，就计算结果进行了讨论并得出相应结论。

## 二、浑沌和次谐门槛值计算

在无阻尼和扰动时，(1.4)，(1.5)成为

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0 \quad (2.1)$$

(2.1)为一Hamilton系统，其Hamiltonian量为

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{x^4}{4} = \text{const} \quad (2.2)$$

在相平面上，当 $H=1/4$ 时，存在有一对异宿(heteroclinic)轨道组成的异宿圈(heteroclinic loop)。当 $0 < H < 1/4$ 时，在此圈内存在一族以 $H$ 为参数的周期轨道，随 $H$ 的增加，这族轨道的周期单调地由 $2\pi$ 增加到 $\infty$ 。求解后，得到

1° 两条异宿轨道为

$$x_0 = \pm \text{th}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right), \quad y_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} t\right) \quad (2.3)$$

2° 参数 $H=H_k$ 的周期轨道为

$$x_k = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+k^2}} \text{sn}\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right), \quad y_k = \frac{\sqrt{2}k}{1+k^2} \text{cn}\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right) \text{dn}\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right) \quad (2.4)$$

其中 sn, cn, dn 为 Jacobi 椭圆函数， $k$  满足关系式  $H_k = k^2/(1+k^2)^2$ ，周期  $T = T(k) = 4\sqrt{1+k^2}K(k)$ ， $K(k)$  为第一类完全椭圆积分。

现在，就两种扰动情况分别加以讨论。

1° 具有弱阻尼与周期强迫力情况<sup>[2]</sup>

此时考虑(1.4)

$$\ddot{x} + x - x^3 = -\varepsilon\delta\dot{x} + \varepsilon f \cos \omega t \quad (2.5)$$

其中  $0 < \varepsilon \ll 1$ ， $\delta, f > 0$ 。两条异宿轨道所对应的 Mel'nikov 函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\delta y_0(t) + f \cos \omega(t+t_0)] y_0(t) dt \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \delta \pm \sqrt{2} \pi \omega f \text{cosech}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega\right) \cos \omega t_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

显然当参数比  $f/\delta$  满足条件

$$\frac{2}{3\pi\omega} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega\right) < \frac{f}{\delta} \quad (2.7)$$

时有横截同宿点，即系统可能有浑沌反应。定义

$$R^{(1)}(\omega) = \frac{2}{3\pi\omega} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega\right) \quad (2.8)$$

为浑沌门槛值。

同样对于满足  $T = T(k) = 4\sqrt{1+k^2}K(k) = 2\pi m/\omega n$  ( $m, n$  为互质整数) 的次谐轨道的 Mel'nikov 函数

$$M^{\frac{m}{n}}(t_0) = \int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}} [-\delta y_k(t) + f \cos \omega(t+t_0)] y_k(t) dt$$

$$= -\delta J_1(m, n) + f J_2(m, n) \cos \omega t_0 \quad (2.9)$$

其中

$$J_1(m, n) = \frac{8n}{3(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} [(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)]$$

$$J_2(m, n) = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数} \\ 2\sqrt{2} \pi \omega \operatorname{cosech} \frac{\pi m K'(k)}{2K(k)}, & \text{其他情况} \end{cases}$$

$K'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$ ,  $E(k)$  为第二类完全椭圆积分. 当参数比  $f/\delta$  满足

$$\frac{J_1(m, 1)}{J_2(m, 1)} < \frac{f}{\delta} \quad (2.10)$$

时, 系统会出现  $m$  阶次谐轨道. 定义

$$R_m^{(1)}(\omega) = \frac{2\sqrt{2} [(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)]}{3\pi\omega(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sh} \frac{\pi m K'(k)}{2K(k)} \quad (2.11)$$

为  $m$  阶次谐的门槛值.

2° 具有弱阻尼与周期参数激励情况<sup>[3]</sup>

此时考虑(1.5)

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon f \cos \omega t)x - x^3 = -\varepsilon \delta \dot{x} \quad (2.12)$$

类似计算可以得到异宿轨道的 Mel'nikov 函数为

$$M(t_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \delta + \pi \omega^2 f \operatorname{cosech} \left( \sqrt{\frac{2}{2}} \pi \omega \right) \sin \omega t_0 \quad (2.13)$$

产生浑沌反应的门槛值为

$$R_{\infty}^{(2)}(\omega) = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi\omega^2} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{2}{2}} \pi \omega \right) \quad (2.14)$$

次谐轨道的 Mel'nikov 函数为

$$M_m^m(t_0) = -\delta J_1(m, n) + f J_2(m, n) \sin \omega t_0 \quad (2.15)$$

其中

$$J_1(m, n) = \frac{8n}{3(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} [(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)]$$

$$J_2(m, n) = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为奇数} \\ \frac{\pi^3 m^2}{2(1+k^2)K^2(k)} \operatorname{cosech} \frac{\pi m K'(k)}{2K(k)}, & \text{其他情况} \end{cases}$$

$m$  阶次谐的门槛值为

$$R_m^{(2)}(\omega) = \frac{16 [(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)] K^2(k)}{3\pi^3 m^2 (1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sh} \frac{\pi m K'(k)}{2K(k)} \quad (2.16)$$

### 三、讨论与结果

由上节计算结果, 可作如下分析

1° 注意到  $4\sqrt{1+k^2}K(k) = 2\pi m/\omega$ , 在两种情况下产生次谐的门槛值可化为

$$R_m^{(1)}(\omega) = \frac{2\sqrt{2} [(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)]}{3\pi\omega(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sh} (\omega \sqrt{1+k^2} K'(k)) \quad (3.1)$$

和 
$$R_m^{(2)}(\omega) = \frac{4[(k^2-1)K(k) + (k^2+1)E(k)]}{3\pi\omega^2(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} \text{sh}(\omega\sqrt{1+k^2}K'(k)) \quad (3.2)$$

对于任意固定 $\omega$ ，若 $m \rightarrow \infty$ ，即有 $k \rightarrow 1$ ，此时(3.1)和(3.2)的极限值分别为

$$R_m^{(1)}(\omega) \rightarrow \frac{2}{3\pi\omega} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right) = R_\infty^{(1)}(\omega) \quad (3.3)$$

和 
$$R_m^{(2)}(\omega) \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3\pi\omega^2} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right) = R_\infty^{(2)}(\omega) \quad (3.4)$$

另外利用 $E(k)$ 和 $K(k)$ 在 $k \rightarrow 1$ 的级数展开<sup>[4]</sup>

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \times 2}\right) k'^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \times 2} - \frac{2}{3 \times 4}\right) k'^4 + \dots$$

$$E(k) = 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{1 \times 2}\right) k'^2 + \frac{1^2 \times 3}{2^2 \times 4} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \times 2} - \frac{1}{3 \times 4}\right) k'^4 + \dots \quad (3.5)$$

可以证明对任意固定 $\omega$ ，当 $k$ 充分接近于1时，即 $m$ 充分大，成立有

$$R_m^{(1)}(\omega) < R_\infty^{(1)}(\omega), \quad R_m^{(2)}(\omega) < R_\infty^{(2)}(\omega) \quad (3.6)$$

这样我们可以判断，对于固定 $\omega$ ，参数比 $f/\delta$ 逐渐增大时，两种情况下系统都是经过无限次谐分叉而到达混沌的阈值。

2° 显然对于具有弱阻尼和周期强迫力情况，随着参数比 $f/\delta$ 增加，系统经过无限次奇阶次谐分叉而进入混沌；对于具有弱阻尼和周期参数激励情况，随着参数比 $f/\delta$ 增加，系统经过无限次偶阶次谐分叉而进入混沌。

3° 为了讨论不同 $\omega$ 随 $f/\delta$ 逐渐增大进入混沌途径，就得比较 $R_m^{(i)}(\omega)$ 和 $R_\infty^{(i)}(\omega)$  ( $i=1, 2$ ； $m$ 为对应允许取的整数)相对大小。

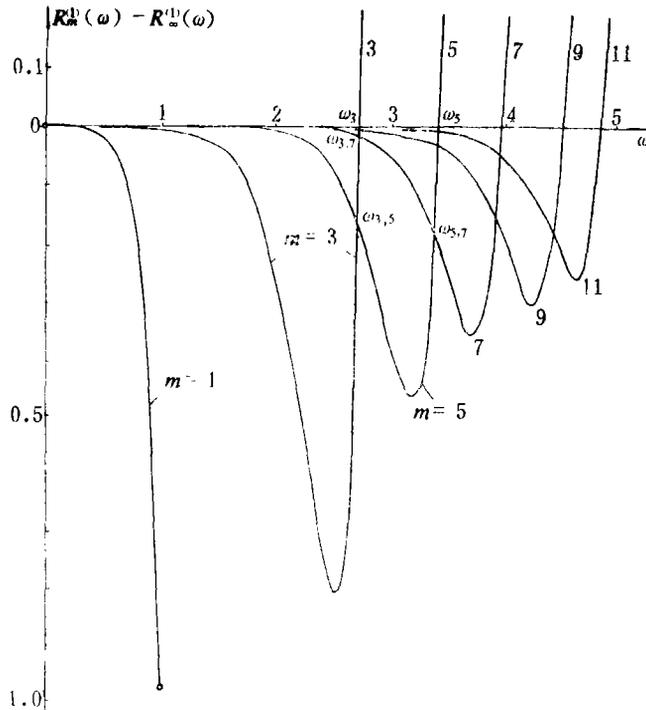


图 1  $R_m^{(1)} - R_\infty^{(1)}$ 与 $\omega$ 的关系

通过计算作出  $R_m^{(1)}(\omega) - R_m^{(1)}(\omega)$  与  $\omega$  的关系图(见图1)。

由图1可知  $R_1^{(1)}(\omega) - R_3^{(1)}(\omega)$  曲线终止于  $\omega=1$ 。  $R_m^{(1)}(\omega)$  ( $m=3, 5, \dots$ ) 在  $\omega \rightarrow m$  时趋于  $+\infty$ (利用(3.5)也可分析出此结论), 而  $R_\infty^{(1)}(\omega)$  为有限。设  $R_3^{(1)}$ ,  $R_5^{(1)}$ ,  $\dots$  与  $R_3^{(1)}$  交点的  $\omega$  值为  $\omega_3, \omega_5, \dots$ , 又设  $R_3^{(1)}$  与  $R_5^{(1)}$  相交于  $\omega_{3,5}$ ,  $R_3^{(1)}$  与  $R_7^{(1)}$  相交于  $\omega_{3,7}$ ,  $R_5^{(1)}$  与  $R_7^{(1)}$  相交于  $\omega_{5,7}$  等等; 于是推测到当  $f/\delta$  逐渐增大时, 系统(1.4)进入浑沌途径如下, (1, 3, 5,  $\dots$  代表主谐波及  $1/3, 1/5, \dots$  次谐波振动;  $\infty$  代表浑沌)

$$\begin{aligned} & 0 < \omega < 1, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & 1 < \omega < \omega_{3,5} (\approx 2.682), 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \omega_{3,5} < \omega < \omega_{3,7}, 5 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \omega_{3,7} < \omega < \omega_{3,9}, 5 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \dots & \dots \\ & \omega_3 (\approx 2.698) < \omega < \omega_{5,7}, 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \omega_{5,7} < \omega < \omega_{5,9}, 7 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \dots & \dots \\ & \omega_5 (\approx 3.4) < \omega < \omega_{7,9}, 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \text{ 等等} \end{aligned}$$

类似可设  $R_4^{(2)}$ ,  $R_6^{(2)}$ ,  $\dots$  与  $R_6^{(2)}$  交点的  $\omega$  值为  $\omega_4, \omega_6, \dots$ ; 又设  $R_4^{(2)}$  与  $R_6^{(2)}$  相交于  $\omega_{4,6}$ ;  $R_4^{(2)}$  与  $R_8^{(2)}$  相交于  $\omega_{4,8}$ ,  $R_6^{(2)}$  与  $R_8^{(2)}$  相交于  $\omega_{6,8}$  等等。于是推测到当  $f/\delta$  逐渐增大时系统(1.5)进入浑沌途径如下(2, 4, 6,  $\dots$  代表  $1/2, 1/4, 1/6, \dots$  次谐波振动;  $\infty$  代表浑沌)。

$$\begin{aligned} & 0 < \omega < 2, 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & 2 < \omega < \omega_{4,6}, 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \omega_{4,6} < \omega < \omega_{4,8}, 6 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \dots & \dots \\ & \omega_4 < \omega < \omega_{6,8}, 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \omega_{6,8} < \omega < \omega_{6,10}, 8 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \\ & \dots & \dots \\ & \omega_6 < \omega < \omega_{8,10}, 8 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow \dots \rightarrow \infty \text{ 等等} \end{aligned}$$

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).
- [ 2 ] Morozov, A. D., On the complete qualitative investigation of the equation of duffing, *Differentsialniye Uravneniya*, 12 (1976), 241—255.
- [ 3 ] Hsieh, D. Y., On Mathieu equation with damping, *J. Math. Phys.*, 21 (1980), 722—725.
- [ 4 ] Gradshteyn, I. S. and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, § 8.11 (1980).

## Road to Chaos for a Soft Spring System under Weak Periodic Disturbance

Liu Zheng-rong

*(Anhui University, Anhui)*

Yao Wei-guo

*(Institute of Solid Physics, Beijing)*

Zhu Zhao-xuan

*(Peking University, Beijing)*

### Abstract

The Mel'nikov-Holmes method is used to discuss the road to chaos for an elastic system with soft spring constant and under weak periodic disturbance. It is found that according to how the disturbance is applied, forced vibration or parametric excitation, the response may pass to chaos through different sequences of subharmonic bifurcations, and that the orders in the sequences may be different for different disturbance frequencies.