

橡皮环大变形接触问题*

吕和祥

(大连工学院工程力学系, 1984年9月13日收到)

摘 要

本文借助于子结构技术解决了大变形橡皮环和弹性薄板具有摩擦的接触问题, 研究了摩擦系数、板厚对橡皮环变形的影响。

有限元分析橡皮构件, 至今仅限于简单的几何形状和边界条件^[1]。因为在橡皮材料的分析中存在许多困难。第一, 橡皮材料的应力应变关系(一般可借助于三个应变不变量表示)是一个非常复杂的非线性函数; 第二, 当有力作用时, 橡皮构件的变形, 一般伴随着大的位移和大的应变, 所以应变位移关系也是非线性函数; 第三, 橡皮在变形过程中, 橡皮的体积没有明显地改变, 这种材料在数学上被看作不可压缩的。对于不可压缩材料, 应力张量不能由变形唯一地确定, 当计算应力张量时, 不影响变形的静水压力必须考虑。由于几何和物理的非线性, 离散后由虚位移原理得到的是非常复杂的非线性方程。

应用 Newton-Raphson 方法, 可将非线性方程线性化, 得到具有几个零对角元素的切线单元刚度矩阵。应用惩罚函数的方法, 对角元上的零元素消失了^[2]。这方法的优点是编制程序简单, 缺点是为了确保迭代过程的收敛, 要适当地选择惩罚函数和惩罚因子。这个方法对于分析接触问题是无效的。在文献[3]中提出了超级单元方法, 由此方法, 将橡皮结构分成几个超级单元, 每一个超级单元由文献[4]中的方法处理, 最后得到类似于可压缩材料的对称带状切线刚度阵。

借助于本文提出的方法, 分析了橡皮环和线性弹性薄板具有摩擦的接触问题。有许多文章处理小变形接触问题, 它们的平衡方程是建立在未变形的构型上。大位移和大应变的平衡方程是建立在变了形的构型上得到的, 弹性体之间接触位置的改变必须考虑, 对于大变形接触问题又增加了这些新的困难, 本文给出了板环问题的详细计算步骤, 以及摩擦系数、板厚和接触区域的影响。

一、橡皮环有限单元模拟

橡皮环通常被分成有限个单元, 单元内的位移 $\{u, v\}$, 由单元节点位移 $\{D_e\}$ 描述, 橡皮环服从 Mooney-Rivlin 材料规律, 它的应变能函数是

$$\bar{U} = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3) + p(I_3 - 1) \quad (1.1)$$

*程耿东推荐。

其中 I_1, I_2, I_3 是第一、二、三应变不变量, p 是静水压力, c_{10} 和 c_{01} 是依赖于材料性质的常数. 应用虚位移原理表示一个单元的平衡方程

$$\int_{V_e} [B_e]^T \{\tau_e\} dV = \{F_e\} \quad (1.2)$$

此外, 在一个单元平均意义上满足不可压缩条件, 即

$$\int_{V_e} (I_{3e} - 1) dV = 0 \quad (1.3)$$

其中 $[B_e]$ 由方程

$$\{\delta \varepsilon_e\} = [B_e] \{\delta D_e\} \quad (1.4)$$

确定, $\{D_e\}$ 是单元节点位移, $\{\varepsilon_e\}$ 是单元应变, $\{\tau_e\}$ 是单元 Kirchhoff 应力

$$\{\tau_e\} = - \frac{\partial \bar{U}}{\partial \{\varepsilon_e\}} \quad (1.5)$$

$\{F_e\}$ 是广义节点力, V_e 是变形的单元体积. 因为问题是高度非线性的和不可逆的 (如果考虑摩擦), 我们选择联合的增量和迭代法, 迭代法, 我们选择 Newton-Raphson 方法.

对于第 n 步载荷, 单元 e 的虚功原理是

$$\int_{V_e} [B_e]^T \{\tau_e\}_n dV = \{F_e\}_n = \{F_e\}_{n-1} + \{\Delta F_e\}_n \quad (1.6)$$

平衡方程 (1.6) 的载荷余量 $\{R_e\}_m$ 是

$$\{R_e\}_m = \int_{V_e} [B_e]^T \{\tau_e\}_{nm} dV - \{F_e\}_n \quad (1.7)$$

这里 m 表示迭代次数. 由 Newton-Raphson 过程, 我们可由 $\{\Delta R_e\}_m$ 必须满足的方程

$$\{\Delta R_e\}_m = -\{R_e\}_m \quad (1.8)$$

来确定 $\{\Delta D_e\}_m, (\Delta P_e)_m$

不可压缩条件 (1.3) 也必须迭代地考虑, 余量 $(r_e)_m$

$$(r_e)_m = \int_{V_e} (I_{3e})_m dV - V_e \quad (1.9)$$

和余量增量 $(\Delta r_e)_m$ 可表示为

$$(\Delta r_e)_m = \int_{V_e} (\Delta I_{3e})_m dV \quad (1.10)$$

那么我们有单元切线刚度矩阵

$$\begin{bmatrix} [S_e]_m & \{K_e\}_m \\ \{K_e\}_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta D_e\}_m \\ (\Delta P_e)_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{R_e\}_m \\ -(r_e)_m \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

组装所有单元矩阵, 我们得到结构切线刚度矩阵.

$$\begin{bmatrix} [S] & [K] \\ [K]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta D\} \\ \{\Delta p\} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{R^i\} \\ \{R^i\}_m \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

右端上标的 i 和 i 分别指的是载荷余量 $\{R^i\}$ 和不可压缩余量 $\{R^i\}_m$.

由适当的边界条件, 方程 (1.12) 可迭代地求解,

$$\begin{cases} \{D\}_{m+1} = \{D\}_m + \{\Delta D\}_m \\ \{p\}_{m+1} = \{p\}_m + \{\Delta p\}_m \end{cases} \quad (1.13)$$

直到余量 $\{R^i\}$ 和 $\{R^i\}_m$ 足够小.

如果方程 (1.12) 的系数矩阵是奇异的, 我们就不能解方程 (1.12). 辨别奇性的某些条件

由下面两个定理给出:

定理 1 方程(1.12)的系数矩阵是奇异的, 如果 $I > N$, 即, 如果不可压缩约束的数目 I (即单元的个数) 大于自由度数 N ;

定理 2 仅有内部自由度的方程(1.12), 其系数矩阵是奇异的.

两个定理的证明见文献[4].

二、板和环间的接触问题

本节的目的是分析位于刚性光滑基础和弹性圆薄板间的橡皮环的接触问题, 弹性薄板受均布载荷 q , 如图 1

橡皮环的分析由第一节给出, 板的分析可由通常的有限单元法给出. 由于未知的接触条件, 接触问题不得不迭代地求解. 一般过程是这样: 首先假定某些接触条件, 分析板和橡皮环, 然后校核假定的接触条件. 在迭代过程中, 接触条件被重新修改, 直到相继两次分析的结果足够接近. 收敛性还没有证明, 但外载荷处理成增量的; 我们可预期收敛, 由下面处理的例子可看出.

为了更具体, 让我们分析一个典型的可能接触点 A , 如图 1 和图 2 可示. 对于橡皮和板间的接触点, 存在三个可能性, 径向可动, 径向不可动和分离.

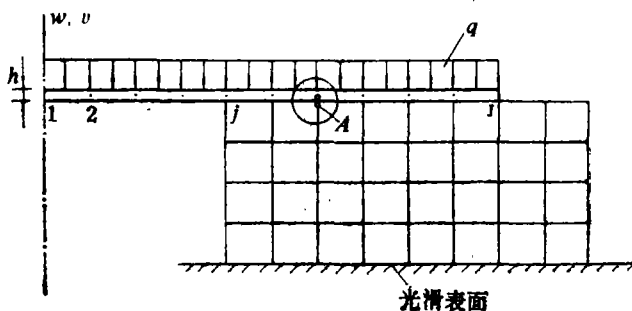


图 1 板和橡皮接触问题

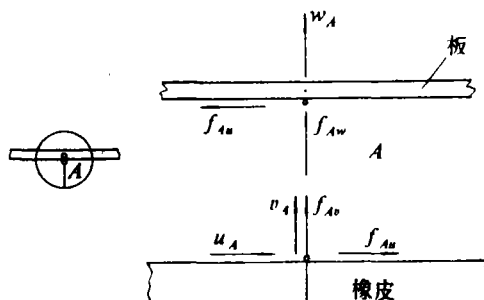


图 2 板和橡皮模型的接触点

1、接触点条件

(1) 接触非滑动

这种情况发生在当接触法向力是压力, 接触剪力小于法向压力和摩擦系数 μ 的乘积, 即 (如图 2)

$$v_A = w_A \tag{2.1}$$

$$-f_{Av} = f_{Aw} > 0 \tag{2.2}$$

$$u_A = 0 \text{ 当 } |f_{Au}/f_{Av}| \leq \mu \tag{2.3}$$

(2) 接触滑动

这个条件满足方程

$$f_{Au} = \pm \mu f_{Av} \tag{2.4}$$

其方向与 $u_A \neq 0$ 相反

(3) 分离点 A

条件是

$$w_A > v_A \tag{2.5}$$

在 A 点的边界力等于零, 即

$$f_{Aw} = f_{Av} = f_{Au} = 0 \quad (2.6)$$

2、接触问题的矩阵描述

将橡皮模型的未知位移 $\{D\}$, 分成对应于可能接触点的轴向位移 $\{\Delta D\}_c$ 和其余的位移 $\{\Delta D\}_r$ 我们把方程(1.12)重写为

$$\begin{bmatrix} [S]_{oc} & [S]_{or} & [K]_c \\ [S]_{rc}^T & [S]_{rr} & [K]_r \\ [K]_c^T & [K]_r^T & [0] \end{bmatrix}_m \begin{Bmatrix} \{\Delta D\}_c \\ \{\Delta D\}_r \\ \{\Delta p\} \end{Bmatrix}_m = - \begin{Bmatrix} \{R^i\}_c \\ \{R^i\}_r \\ \{R^i\} \end{Bmatrix}_m \quad (2.7)$$

应指出, 可能接触点的径向位移增量包括在 $\{\Delta D\}_r$ 中, 而不是在 $\{\Delta D\}_c$ 中, 在接触点处的增量轴向位移, 板和橡皮是一样的. 对于板模型, 由有限元法, 我们有线性关系

$$[S]_{oc}^* \{\Delta D\}_c = \{\Delta F\}_c \quad (2.8)$$

其中 $\{\Delta F\}_c$ 是对应于 $\{\Delta D\}_c$ 的增量载荷, 最后假定所有 $\{D\}_c$ 中的自由度处于接触, 得到耦和方程

$$\begin{bmatrix} [S]_{oc}^* + [S]_{oc} & [S]_{or} & [K]_c \\ [S]_{rc}^T & [S]_{rr} & [K]_r \\ [K]_c^T & [K]_r^T & [0] \end{bmatrix}_m \begin{Bmatrix} \{\Delta D\}_c \\ \{\Delta D\}_r \\ \{\Delta p\} \end{Bmatrix}_m = - \begin{Bmatrix} \{R^i\}_c - \{F\}_c^* \\ \{R^i\}_r - \{F\}_r^* \\ \{R^i\} \end{Bmatrix}_m \quad (2.9)$$

三、接触问题的子结构方法

1、板超级单元 我们考虑的板是轴对称圆板. 由有限元法, 我们得平衡方程

$$[S]\{D\} = \{F\} \quad (3.1)$$

假定, 如图 1, 接触唯一可能在节点序号 j 以后的点. 将平板位移 $\{D\}$ 的整个向量分成可能接触的向量 $\{D\}_c$ 和其余自由度向量 $\{D\}_r$. 定义如下,

$$\{D\}_c^T = \{w_j, w_{j+1}, \dots, w_J\} \quad (3.2)$$

$$\{D\}_r^T = \{w, \theta_1, \dots, w_{j-1}, \theta_{j-1}, \theta_j, \theta_{j+1}, \dots, \theta_J\} \quad (3.3)$$

我们重新写板平衡方程(3.1)为

$$\begin{bmatrix} [S]_{oc} & [S]_{or} \\ [S]_{rc}^T & [S]_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_c \\ \{D\}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_c + \{F\}_{cr} \\ \{F\}_r \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$\{F\}_{cr}$ 是橡皮作用于板的载荷向量, 解方程(3.4)的第二个方程, 有

$$\{D\}_r = [S]_{rr}^{-1} (\{F\}_r - [S]_{rc}^T \{D\}_c) \quad (3.5)$$

$$[\tilde{S}]_{cc}^* \{D\}_c = \{\tilde{F}\}_c^* \quad (3.6)$$

其中

$$[\tilde{S}]_{cc}^* = [S]_{oc} - [S]_{or} [S]_{rr}^{-1} [S]_{rc}^T \quad (3.7)$$

$$\{\tilde{F}\}_c^* = \{F\}_c + \{F\}_{or} - [S]_{or} [S]_{rr}^{-1} \{F\}_r \quad (3.8)$$

当接触位移 $\{D\}_c$ 已知时, 依据方程(3.8), (3.6)橡皮作用于板的内部接触力由下式确定

$$\{F\}_{or} = [\tilde{S}]_{cc}^* \{D\}_c - \{F\}_c - [S]_{or} [S]_{rr}^{-1} \{F\}_r \quad (3.9)$$

2、橡皮超级单元

仿上述方法, 将方程(1.12)分成下面方程,

$$[S]_{oc}\{\Delta D\}_c + [S]_{or}\{\Delta D\}_r + [K]_o\{\Delta p\} = -\{R^i\}_c + \{F\}_{or} \quad (3.10)$$

$$[S]_{rc}^T\{\Delta D\}_c + [S]_{rr}\{\Delta D\}_r + [K]_r\{\Delta p\} = -\{R^i\}_r + \{F\}_{rr} \quad (3.11)$$

$$[K]_o^T\{\Delta D\}_c + [K]_r^T\{\Delta D\}_r = -\{R^i\} \quad (3.12)$$

板作用于橡皮的力 $\{F\}_{or}$ 和 $\{F\}_{rr}$ 是轴向和径向载荷。

解方程(3.10), (3.11), (3.12)得

$$\{\Delta D\}_r = -[S]_{rr}^{-1}(\{R^i\}_r - \{F\}_{rr}) + [S]_{or}^T\{\Delta D\}_c + [K]_r\{\Delta p\} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta p\} = & [\tilde{K}]^{-1}(\{R^i\} - [K]_r^T[S]_{rr}^{-1}(\{R^i\}_r - \{F\}_{rr})) \\ & + ([K]_o^T - [K]_r^T[S]_{rr}^{-1}[S]_{or}^T)\{\Delta D\}_c \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中

$$[\tilde{K}]^{-1} = [K]_r^T[S]_{rr}^{-1}[K]_r \quad (3.15)$$

最后得超级单元关系

$$[\tilde{S}]_{oc}^T\{\Delta D\}_c = -\{\tilde{R}^i\}_c \quad (3.16)$$

其中

$$\begin{aligned} [\tilde{S}]_{oc}^T = & [S]_{oc} - [S]_{or}[S]_{rr}^{-1}[S]_{or}^T \\ & + ([K]_o - [S]_{or}[S]_{rr}^{-1}[K]_r)[\tilde{K}]^{-1}([K]_o^T - [K]_r^T[S]_{rr}^{-1}[S]_{or}^T) \end{aligned} \quad (3.17)$$

和

$$\begin{aligned} \{\tilde{R}^i\}_c = & (\{R^i\}_c - \{F\}_{or}) - [S]_{or}[S]_{rr}^{-1}(\{R^i\}_r - \{F\}_{rr}) + [K]_o \\ & - [S]_{or}[S]_{rr}^{-1}[K]_r[\tilde{K}]^{-1}(\{R^i\} - [K]_r^T[S]_{rr}^{-1}(\{R^i\}_r - \{F\}_{rr})) \end{aligned} \quad (3.18)$$

如果橡皮模型被分成许多单元,那么子结构方法可以减少 $[\tilde{K}]$ 的阶数。如果这样作,必须考虑定理1,2所给出条件。

3、超级单元系统

在这节描述中,令仅有两个超级单元,板和橡皮超级单元,那么把方程(3.6)和(3.16)联合起来,我们有

$$([\tilde{S}]_{oc}^T + [\tilde{S}]_{cc}^T)\{\Delta D\}_c = -\{\tilde{R}^i\}_c \quad (3.19)$$

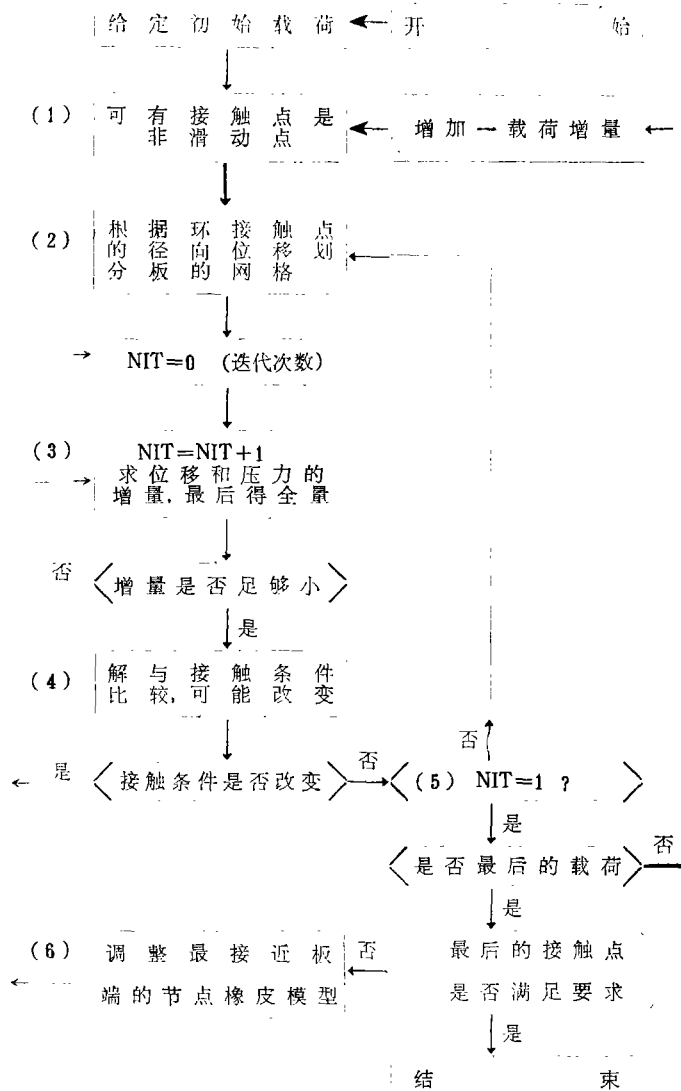
其中刚度矩阵由(3.7)和(3.17)式定义。右端载荷元余量 $\{\tilde{R}^i\}_c$ 由下式给出

$$\{\tilde{R}^i\}_c = \{\tilde{R}^i\}_c - \{\tilde{F}\}_c^T \quad (3.20)$$

右端项的具体定义由(3.18)和(3.8)式给出,同时内部轴向载荷 $\{F\}_{or} = -\{F\}_{or}$ 对消了。解方程(3.19),得到位移 $\{\Delta D\}_c$,那末由(3.14)给出 $\{\Delta p\}$,橡皮其余自由度 $\{\Delta D\}_r$ 由方程(3.13)给出,最后板模型的其余自由度 $\{\Delta D\}_r$ 由方程(3.5)给出。由(3.9)式给出 $\{F\}_{or}$ 或由(3.10)式给出 $\{F\}_{or}$,可计算轴向内力。

四、计算步骤

在上面的描述中,求解方程的增量迭代方面还没有详细地叙述,所以我们将给出更具体的计算步骤如下框图。



(1) 在前一个载荷水平上增加一增量, 固定作用在板上的外载荷水平(强度 q)。在这个增量之前, 正如下面解释的, 板和橡皮接触点间没有相对径向位移, 所以我们的初始接触假定是, 到处接触无滑动。

(2) 如果任意一接触点发生了径向位移, 那么板的模型就要改变。为了使板节点位置等于移动了的对应橡皮节点的径向位置, 这点在图 3 中指出了。 \overline{OA} 部分分成相等的等分, 其网格尺寸的大小, 要与 \overline{AB} 部分有相同的量级。如果 $r_D + u_D > r_B$, 那么橡皮模型的接触点 C 成为自由的。如果 $r_D + u_D < r_B$, 那么接触点 C 仍然对应点 B , 这个特殊的点更精确的处理在最后一步载荷。

(3) 依据当前的橡皮模型和当前的位移和压力, 就能计算 (2.9) 式其余的系数矩阵和右端余向量。

对于当前假定非滑动的接触点, 在 $\{\Delta D\}$ 中的对应径向位移, 由通常的求解技术, 强迫等于零, 对于当前假定是滑动的接触点, (3.11) 式中的右端向量 $\{F\}_{r,}$ 的非零元素由 (2.4) 式计算。

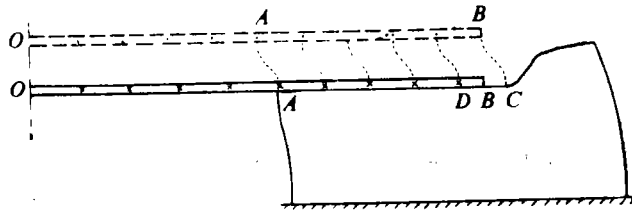


图3 板重新划网格 (·变形前节点, ×变形后节点)

增量位移和压力借助于(3.19), (3.14)和(3.13)式计算。

(4) 检验接触假定。实际的修改要依据二节1段。

(5) 对于 $NIT=1$ 的检验, 意味着在每一步载荷水平上, 板和橡皮之间的平衡完全被满足, 除最后一个板节点。

(6) 在最后一步修改橡皮模型, 使移动了的节点符合板的最后一个节点的径向位置 $J=B$ 。选择最近的橡皮模型的节点。这样作可能放松一个接触点。最后转到步骤(3)去考虑这个修改, 这个修改, 证明有一点点影响。

五、例题结果

在二节1段中由图1所示的例子, 是我们将要给出的结果。这结果对应于不同的摩擦系数, 不同的板外径, 但橡皮尺寸不变。

1、摩擦影响的参数研究

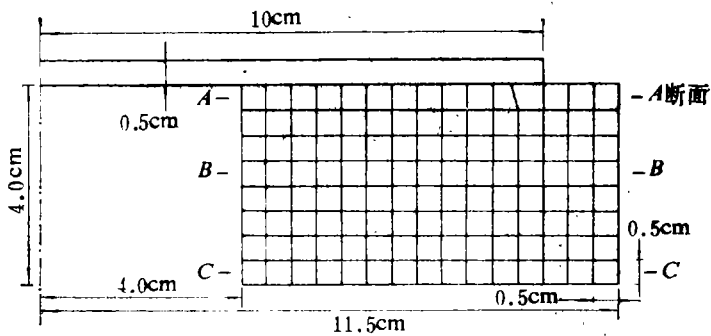


图4 未变型有限单元模型

第一个例题初始网格和尺寸在图4中给出这里也由 $A-A$, $B-B$, $C-C$, 指出将要给出应力的初始位置。问题的参数是

弹性模量 $E=2.0 \times 10^7 \text{kg/cm}^2$

泊松比 $\nu=0.3$

Mooney 材料 $c_{10}=80 \text{psi}=5.62465 \text{kg/cm}^2$

$c_{01}=20 \text{psi}=1.40616 \text{kg/cm}^2$

摩擦系数 $\mu=0.0, 0.05, 0.10$ 和 0.15

作用于板的外载荷 $q=9 \text{kg/cm}^2$

图5给出了摩擦系数对所得位移的影响。轴向法向应力 σ_z 的应力分布如图6。其位置在未

变形的物体中，如图 4 所示。

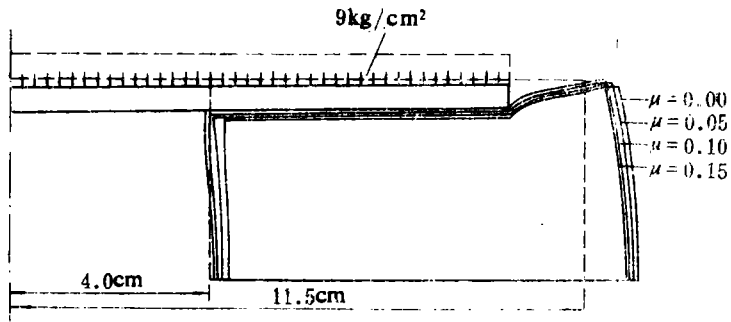


图5 不同摩擦系产生的位移

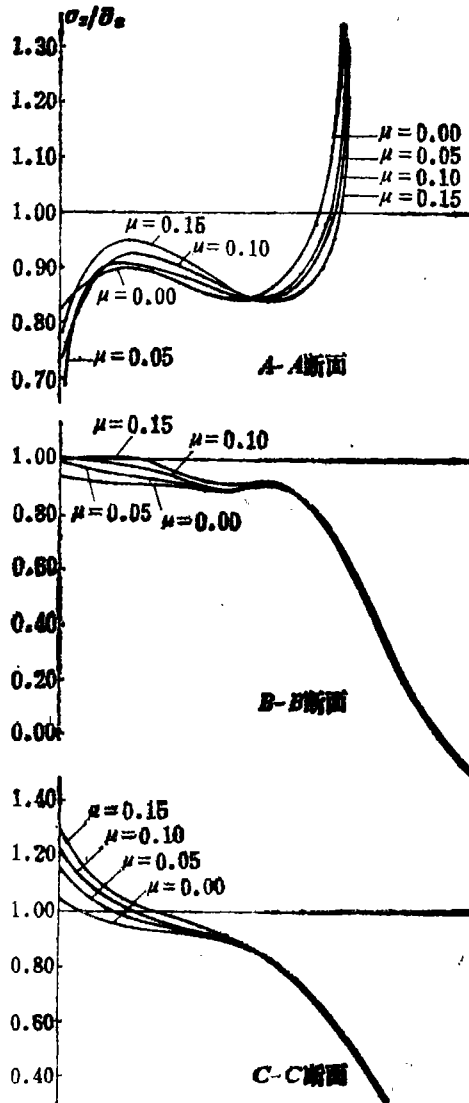


图6 相对于平均轴向应力 $\bar{\sigma}_x$ 的轴向应力

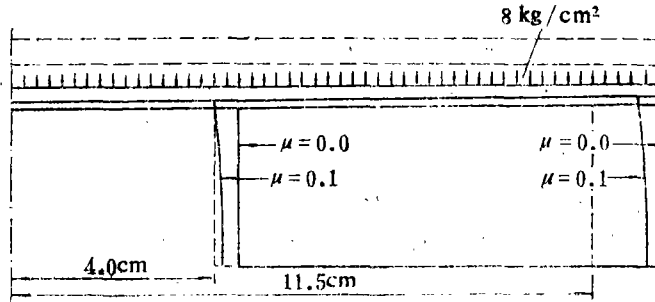


图7 完全被复盖的位移

2、板接触区域的影响

在第二个例子中，我们想了解在变形状态板完全复盖着橡皮环的影响。板厚再取 0.5cm 外载荷 $q=8\text{kg/cm}^2$ ，用二个摩擦系数 $\mu=0.0$ ，和 $\mu=0.10$ 。产生的变形如图 7。对应于变形的应力分布如图 8 所示。

通过整体平衡计算可以校核结果的精度。对于 $\mu=0.0$ 的情况，如原来处理的和图 5 给出的有

$$\text{内部的 } 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z r dz = 2\pi \sum_{i=1}^{16} \Delta R_i R_i (\sigma_z)_i$$

$$= 2827.2$$

外部的 $\pi R^2 q = 2827.4$
符合很好。

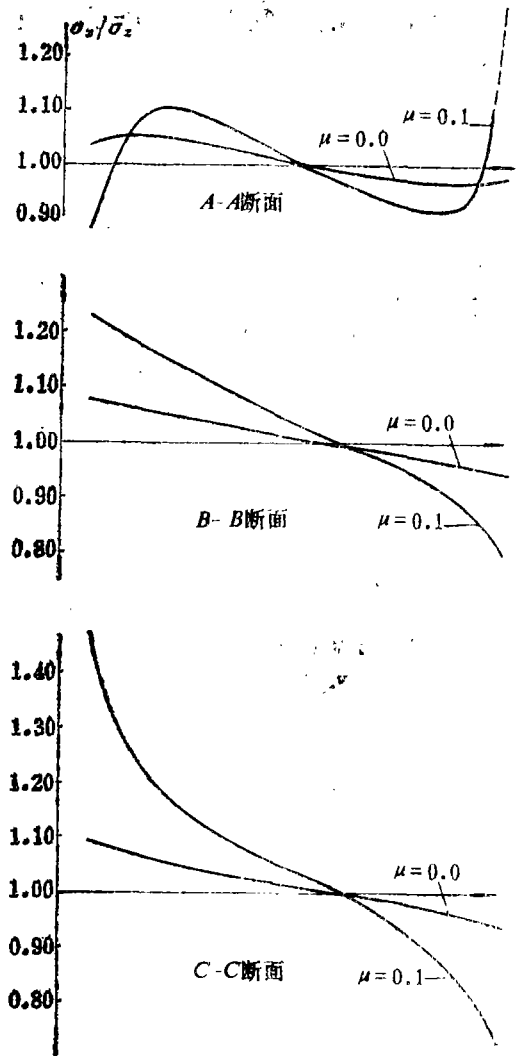


图8 完全复盖橡皮环的轴向应力

参 考 文 献

- [1] Oden, J. T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, (1972).
- [2] Jankovich, E., F. Leblance and M. Durand, A finite element method for the analysis of rubber parts, experimental and analytical assessment, *Computers Structures*, **14**, 5—6 (1981), 385—391.
- [3] Lü He-xiang, Superlement method for solution of nonlinear large deformation, Dalian Institute of Technology Dept. of. Appl. Mech. Research Report 83—306(1983).
- [4] Lü He-xiang, Analysis of axisymmetric large deformation of rubber, *Journal of Dalian Institute of Technology*, **23**, 1(1984).

Contact Problem of Rubber Rings with Large Deformation

Lü He-xiang

(*Department of Engineering Mechanics, Dalian Institute of
Technology, Dalian*)

Abstract

A combined problem with frictional contact between a rubber ring with large deformation and linear elastic thin plate is solved by means of the substructuring technique. A study of the influence of frictional coefficient and the influence of plate thickness is presented.