

# 各向异性强化时薄板的塑性分析\*

金永杰

(上海交通大学工程力学系, 1985年2月10日收到)

## 摘 要

本文讨论了当薄板受到反复加载时由于存在鲍兴 (Bauschinger) 效应必须运用各向异性强化模型。文中导出了在线性随动强化时如何用广义力及广义塑性变形来表示薄板的加载条件, 并讨论了可推广应用于非线性随动强化及混合强化 (Mixed Hardening) 情况。最后还以圆板为例进行了数值计算给出了计算结果。

## 一、前 言

通常, 我们利用等向强化模型来进行塑性分析。但当应力有反复变化时需要考虑鲍兴效应, 此时应用等向强化模型已不适合, 需要应用各向异性强化模型。这种模型有普拉格 (Prager) 的随动强化模型<sup>[1]</sup>以及齐格勒 (Ziegler)<sup>[2]</sup>莫洛兹 (Mroz)<sup>[3]</sup>的强化模型。当同时发生等向强化与随动强化时 (即屈服面和加载面发生又扩大又移动的情形) 一般就称之为混合强化模型<sup>[4]</sup>。这些模型可以处理一些各向异性强化问题<sup>[5]</sup>, 便于适应各种材料迥然不同的强化性能 (或软化性能), 它可用于何任的复杂加载路径包括循环加载, 当我们用各向异性强化模型确定了某构件在循环加载下的应力、应变场, 就便于在此基础上估算该构件的寿命<sup>[6]</sup>。

本文的工作就是将各向异性强化模型应用到薄板的塑性分析中去。文中我们首次导出了在各向异性强化条件下用广义力及广义塑性变形表示的薄板弯曲的屈服及加载条件, 有了这些公式可以方便地进行薄板的塑性分析。

## 二、随动强化时的本构关系

### 1、屈服与加载条件

初始屈服条件 (密西斯条件) 为:

$$f(\sigma_{ij}) = 3s_{ij}s_{ij}/2 - \sigma_0^2 = 0 \quad (2.1)$$

相继屈服条件或加载条件

\* 卢文达推荐。

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = 3(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) / 2 - \sigma_i^2 = 0 \quad (2.2)$$

上式中  $s_{ij}$  为应力偏量,  $\alpha_{ij}$  为屈服面中心在应力空间中移动的距离。

## 2、普拉格 (Prager) 的随动规律

$$d(\alpha_{ij}) = H d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.3)$$

式中如  $H$  为常数便为线性随动强化, 此时

$$\alpha_{ij} = H \varepsilon_{ij}^p \quad (2.4)$$

如  $H$  与当时的应力状态应变状态有关则便为非线性随动强化。

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} H d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.5)$$

今讨论线性随动强化模型, 在此基础上也可推广应用于非线性随动强化的情况。  
 $H$  值与材料性质有关

$$H = 2H'/3 \quad (2.6)$$

$H'$  是单向拉伸时刚塑性模型线性强化时的一个斜率(见图1)。

加载条件方程(2.2)如以主应力状态表示可写为:

$$f = \{[(\sigma_1 - H\varepsilon_1^p) - (\sigma_2 - H\varepsilon_2^p)]^2 + [(\sigma_2 - H\varepsilon_2^p) - (\sigma_3 - H\varepsilon_3^p)]^2 + [(\sigma_3 - H\varepsilon_3^p) - (\sigma_1 - H\varepsilon_1^p)]^2\} / 2 - \sigma_i^2 = 0 \quad (2.7)$$

## 3、塑性势流动定律

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.8)$$

$\phi$  为塑性势

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.9)$$

即为与密西斯屈服函数相关连的流动定律。

## 4、一致性条件 (Consistency Condition)

加载后应力点必须仍保持在加载面上。

综合以上诸条件, 可得

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}}{H \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right)} \quad (2.10)$$

当我们讨论平面应力状态时, 为了简化问题我们常常直接从应力子空间中导出, 则加载条件为:

$$f_1 = (\sigma_1 - H\varepsilon_1^p)^2 - (\sigma_1 - H\varepsilon_1^p)(\sigma_2 - H\varepsilon_2^p) + (\sigma_2 - H\varepsilon_2^p)^2 - \sigma_i^2 = 0 \quad (2.11)$$

此时塑性应力应变关系为:

$$de_1^* = d\lambda' \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \quad (2.12a)$$

$$de_2^* = d\lambda' \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \quad (2.12b)$$

中共

$$d\lambda' = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} d\sigma_2}{H \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \right)^2 \right]} \quad (2.12c)$$

### 三、薄板的屈服与加载条件

对于线性随动强化模型, 圆板在轴对称载荷作用下其初始屈服条件为:

$$F(M_r, M_\varphi) = M_r^2 - M_r M_\varphi + M_\varphi^2 - M_s^2 = 0 \quad (3.1)$$

式中  $M_r$ 、 $M_\varphi$  分别为径向与周向弯矩,  $M_s = h^2 \sigma_s / 4$ ,  $h$  为板厚. 其相继屈服或加载条件为:

$$F(M_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^*) = (M_r - CK_r^*)^2 - (M_r - CK_r^*)(M_\varphi - CK_\varphi^*) + (M_\varphi - CK_\varphi^*)^2 - M_s^2 = 0 \quad (3.2)$$

其中  $C = Hh^2/12$ ,  $K_r^*$ 、 $K_\varphi^*$  表示薄板变形后中面的径向与周向的塑性曲率. (3.2) 式可推证如下:

由方程(2.12)可得

$$de_1^* = d\lambda' [2(\sigma_1 - He_1^*) - (\sigma_2 - He_2^*)] \quad (3.3a)$$

$$de_2^* = d\lambda' [2(\sigma_2 - He_2^*) - (\sigma_1 - He_1^*)] \quad (3.3b)$$

因

$$de_1^* = dK_1^* z, \quad de_2^* = dK_2^* \cdot z$$

所以

$$\frac{de_1^*}{de_2^*} = \frac{dK_1^*}{dK_2^*} = \eta \quad (3.3c)$$

$\eta$  值与  $z$  无关.

将(3.3a)及(3.3b)代入(3.3c)可得

$$\frac{2(\sigma_1 - He_1^*) - (\sigma_2 - He_2^*)}{2(\sigma_2 - He_2^*) - (\sigma_1 - He_1^*)} = \eta$$

化简可得:

$$\frac{\sigma_1 - He_1^*}{\sigma_2 - He_2^*} = \frac{2\eta - 1}{2 + \eta} = f_1(\eta) \quad (3.4)$$

代入(2.11)式, 可求得:

$$(\sigma_2 - He_2^*)^2 = \frac{\sigma_s^2}{1 - f_1(\eta) + f_1^2(\eta)}$$

或

$$(\sigma_2 - He_2^*) = \pm f_2(\eta) \sigma_s \quad (3.5a)$$

$$f_2(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - f_1(\eta) + f_1^2(\eta)}} \quad (3.5b)$$

代入(3.4)式:  $(\sigma_1 - He_1^*) = f_1(\eta) (\sigma_2 - He_2^*) = \pm f_1(\eta) f_2(\eta) \sigma_s$ .

$$\text{或} \quad (\sigma_1 - H e_1^z) = \pm f_3(\eta) \sigma, \quad (3.6a)$$

$$f_3(\eta) = f_1(\eta) f_2(\eta) \quad (3.6b)$$

由(3.5a), (3.6a)可知 $(\sigma_1 - H e_1^z)$ 与 $(\sigma_2 - H e_2^z)$ 均与 $z$ 无关.

在板弯曲时由于小变形可不计轴向力作用, 则可令

$$z > 0, \quad \sigma_1 - H e_1^z = +a_1 \quad (3.7a)$$

$$\sigma_2 - H e_2^z = +a_2 \quad (3.7b)$$

$$z < 0, \quad \sigma_1 - H e_1^z = -a_1 \quad (3.8a)$$

$$\sigma_2 - H e_2^z = -a_2 \quad (3.8b)$$

式中 $a_1, a_2$ 是与 $z$ 无关的正常数, 它们应满足条件:

$$a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2 = \sigma_s^2 \quad (3.9)$$

由(3.7), (3.8)可得

$$z > 0 \quad \sigma_1 = a_1 + H e_1^z$$

$$\sigma_2 = a_2 + H e_2^z$$

$$z < 0 \quad \sigma_1 = -a_1 + H e_1^z$$

$$\sigma_2 = -a_2 + H e_2^z$$

因 $e_1^z = K_1^z z, e_2^z = K_2^z z$

$$\text{所以} \quad z > 0, \quad \sigma_1 = a_1 + H K_1^z z \quad (3.10a)$$

$$\sigma_2 = a_2 + H K_2^z z \quad (3.10b)$$

$$z < 0 \quad \sigma_1 = -a_1 + H K_1^z z \quad (3.11a)$$

$$\sigma_2 = -a_2 + H K_2^z z \quad (3.11b)$$

$$\text{因} \quad M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 z dz, \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 z dz$$

$$\text{所以} \quad M_1 = a_1 h^2 / 4 + H K_1^z h^3 / 12 \quad (3.12a)$$

$$M_2 = a_2 h^2 / 4 + H K_2^z h^3 / 12 \quad (3.12b)$$

$$\text{或} \quad a_1 = \frac{4}{h^2} \left( M_1 - H K_1^z \frac{h^3}{12} \right)$$

$$a_2 = \frac{4}{h^2} \left( M_2 - H K_2^z \frac{h^3}{12} \right)$$

代入(3.9)式可得:

$$(M_1 - C K_1^z)^2 - (M_1 - C K_1^z)(M_2 - C K_2^z) + (M_2 - C K_2^z)^2 - M_s^2 = 0$$

式中 $C = H h^3 / 12, M_s = h^2 \sigma_s / 4$ .

此式与(3.2)式同, 证毕.

对于矩形板可得相似结果(推证从略):

$$\begin{aligned} & (M_x - C K_x^z)^2 - (M_x - C K_x^z)(M_y - C K_y^z) + (M_y - C K_y^z)^2 \\ & + 3 \left( M_{xy} - \frac{1}{2} C K_{xy}^z \right)^2 - M_s^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

## 四、数值计算实例——圆板的塑性分析

今用线性随动强化模型对简支边薄圆板进行塑性分析。设板的厚度为  $h$ ，半径为  $R$ ，受均布载荷  $p$  作用。

$$\text{因} \quad \varepsilon_r = K_r z, \quad \varepsilon_\varphi = K_\varphi z \quad (4.1)$$

$$K_r = -\frac{d^2 w}{dr^2}, \quad K_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (4.2)$$

$$w = w^e + w^p \quad (4.3)$$

式中  $w$  是板在垂直板面方向的位移， $e$ 、 $p$  表示弹性与塑性。则

$$K_r = K_r^e + K_r^p, \quad K_\varphi = K_\varphi^e + K_\varphi^p \quad (4.4)$$

$$K_r^e = -\frac{d^2 w^e}{dr^2}, \quad K_\varphi^e = -\frac{1}{r} \frac{dw^e}{dr} \quad (4.5)$$

$$K_r^p = -\frac{d^2 w^p}{dr^2}, \quad K_\varphi^p = -\frac{1}{r} \frac{dw^p}{dr} \quad (4.6)$$

由此可得塑性的相容方程为：

$$\frac{dK_\varphi^p}{dr} = \frac{K_r^p - K_\varphi^p}{r} \quad (4.7)$$

设加载增量为  $\Delta p$ ，相应的用增量形式表示的平衡方程和相容方程为：

$$\frac{d(\Delta M_r)}{dr} = \frac{1}{r} (\Delta M_\varphi - \Delta M_r) - \frac{1}{2} \Delta p \cdot r \quad (4.8)$$

$$\frac{d(\Delta K_\varphi^p)}{dr} = \frac{1}{r} (\Delta K_r^p - \Delta K_\varphi^p) \quad (4.9)$$

根据塑性势理论建立的相关的流动定律为：

$$dK_{\alpha\beta}^p = d\beta \frac{\partial F}{\partial M_{\alpha\beta}} \quad (4.10)$$

式中  $F$  函数可见 (3.2) 式。

与推导 (2.12) 式相似的步骤可得

$$dK_r^p = \frac{\frac{\partial F}{\partial M_r} \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} dM_r + \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} dM_\varphi \right)}{C \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right)^2 \right]} \quad (4.11a)$$

$$dK_\varphi^p = \frac{\frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} dM_r + \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} dM_\varphi \right)}{C \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right)^2 \right]} \quad (4.11b)$$

将 (4.11) 式代入 (4.9) 式可得：

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right)^2 \right] \frac{d(\Delta M_\varphi)}{dr} \\ &= \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right)^2 \right] \left\{ \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right)^2 \Delta M_r - \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right)^2 \Delta M_\varphi \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \Delta p \cdot r \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) - \left\{ \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right) \Delta M_r + \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) \Delta M_\varphi \right] \right. \\
& + \left. \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right) \Delta M_r + \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) \Delta M_\varphi \right] \right\} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right)^2 \right] \\
& + 2 \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right) \Delta M_r + \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) \Delta M_\varphi \right] \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial M_r} \right) \right. \\
& \left. + \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial M_\varphi} \right) \right] \quad (4.12)
\end{aligned}$$

将(4.8)(4.12)两式联立,即可求得在塑性区内各步载荷增量 $\Delta p$ 下 $M_r$ 与 $M_\varphi$ 的增量 $\Delta M_r$ 、 $\Delta M_\varphi$ ,则弯矩便为上述增量与原有弯矩之和。同理可得塑性曲率值。

总的计算过程,可先设圆盘中心处弯矩增量一个初值 $\Delta M_r$ 、 $\Delta M_\varphi$ ( $\Delta M_r = \Delta M_\varphi$ ),利用四阶龙格库塔法求得各步长处相应的弯矩增量值,若算得边界上有 $\Delta M_r = 0$ ,则计算结果即为所要求的解答,否则应不断调整中心处的初值,直到满足边界条件为止。显然解答精度与所取步长及载荷增量大小有关。

当 $p = p_s$ 时 $p_s = 4.8M_s/R^2$ ,圆盘中心开始进入屈服点(今设泊桑系数 $\mu = 1/3$ ),随着 $p$ 不断增加,圆盘的塑性区不断扩大,弹性区不断缩小,先进入塑性的那些地区随即先发生随动强化。

部分的计算结果如下(计算时载荷增量取 $\Delta p/p_s = 0.05$ ,卸载时和第二次加载时取同样的增量值):

$p/p_s$	$r/R$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
		1.0	1.0000	0.9600	0.8400	0.6400	0.3600
2.5	2.4153	2.4153	2.3171	2.0378	1.5623	0.8833	0.0000
0.5	0.4148	0.4148	0.3974	0.3578	0.2823	0.1633	0.0000
0.0	-0.0880	-0.0880	-0.0852	-0.0648	-0.0387	-0.0170	0.0000
-2.5	-2.4239	-2.4239	-2.3242	-2.0451	-1.5698	-0.8888	0.0000
0.0	0.0793	0.0793	0.0781	0.0574	0.0312	0.0117	0.0000
1.0	1.0494	1.0494	1.0094	0.8840	0.6699	0.3717	0.0000
2.5	2.4179	2.4179	2.3198	2.0405	1.5650	0.8847	0.0000

$p/p_s$	$r/R$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
		1.0	1.0000	0.9760	0.9040	0.7840	0.6160
2.5	2.4153	2.4153	2.3777	2.2500	1.9994	1.5951	1.0772
0.5	0.4148	0.4148	0.4255	0.4419	0.4314	0.3630	0.2772
0.0	-0.0880	-0.0880	-0.0694	-0.0093	0.0415	0.0565	0.0783
-2.5	-2.4239	-2.4239	-2.3842	-2.2576	-2.0068	-1.5815	-1.0523
0.0	0.0793	0.0793	0.0689	0.0017	-0.0488	-0.0429	-0.0534
1.0	1.0494	1.0494	1.0243	0.9309	0.7544	0.5733	0.3468
2.5	2.4179	2.4179	2.3805	2.2528	2.0018	1.5879	1.0682

$CK_r^p/M_s$ 

$p/p_s$	$r/R$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1.0		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.5		1.4153	1.3230	1.0610	0.6243	0.0981	-0.0310
0.5		1.4148	1.3230	1.0610	0.6243	0.0981	-0.0310
0.0		0.9120	0.9086	0.9010	0.6243	0.0981	-0.0310
-2.5		-1.4239	-1.3300	-1.0685	-0.6309	-0.0775	0.0220
0.0		-0.9207	-0.9175	-0.9084	-0.6309	-0.0775	0.0220
1.0		0.0494	0.0146	-0.0940	-0.2615	-0.0775	0.0220
2.5		1.4176	1.3257	1.0639	0.6260	0.0784	-0.0266

 $CK_\phi^p/M_s$ 

$p/p_s$	$r/R$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1.0		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.5		1.4153	1.3720	1.2283	0.9473	0.4692	0.0629
0.5		1.4148	1.3720	1.2283	0.9473	0.4692	0.0629
0.0		0.9120	0.9367	1.0218	0.9473	0.4692	0.0629
-2.5		-1.4239	-1.3784	-1.2357	-0.9552	-0.4642	-0.9415
0.0		-0.9207	-0.9432	-1.0293	-0.9552	-0.4642	-0.9415
1.0		0.0494	0.0189	-0.0897	-0.3024	-0.4642	-0.9415
2.5		1.4179	1.3747	1.2311	0.9503	0.4689	0.0552

上述结果可用图3至图8表示, 今说明如下:

1、 径向弯矩 $M_r/M_s$ 和周向弯矩 $M_\phi/M_s$ 随半径 $r/R$ 的变化曲线见图3、图4。塑性的径向曲率 $CK_r^p/M_s$ 与塑性的周向曲率 $CK_\phi^p/M_s$ 随半径 $r/R$ 的变化曲线可见图5、图6。图中表示了 $p/p_s=1$ (在图5、图6中 $p/p_s=1$ 时与横座标轴重合)、 $p/p_s=2.5$ 时的变化曲线以及卸载到 $p/p_s=0$ 时残余弯矩和残余曲率的变化曲线, 反向加载到 $p/p_s=-2.5$ 时的变化曲线。

2、 圆板内各点从弹性进入塑性及进入塑性后加载面的随动情况均不相同, 今仅以 $r/R=0$ 、 $r/R=0.6$ 两处说明加载面的随动情况。分别见图7与图8。

图7表示 $r/R=0$ 处的情况。椭圆A是初始屈服面( $p/p_s=1$ )。椭圆B是加载到 $p/p_s=2.5$ 以及开始卸载到 $p/p_s=0.6$ 时的加载面。椭圆C是卸载到 $p/p_s=0$ 时的加载面。椭圆D是卸载到零后又开始反向加载到 $p/p_s=-2.5$ 时的加载面, 从 $p/p_s=-2.5$ 开始再第二次加载到 $p/p_s=-0.6$ 时的加载面也与此重合。

图8则表示在 $r/R=0.6$ 处的变化情况。

## 五、结 束 语

1、 对于线性随动强化模型, 板的加载条件可表示为方程(3.2)及方程(3.13)。这种形式便于进行板的塑性分析。

2、 对于非线性随动强化情况可将方程(3.2)修正后应用。

由方程(2.5)

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\epsilon_{ij}^p} H d\epsilon_{ij}^p$$

圆板的加载条件可将方程(3.2)改写成:

$$(M_r - A_r)^2 - (M_r - A_r)(M_\varphi - A_\varphi) + (M_\varphi - A_\varphi)^2 = M_0^2 \quad (5.1)$$

其中

$$A_r = \int_0^{K_1^*} C dK_1^* \cong \sum_{i=1}^n C_i (\Delta K_1^*)_i$$

$$A_\varphi = \int_0^{K_\varphi^*} C dK_\varphi^* \cong \sum_{i=1}^n C_i (\Delta K_\varphi^*)_i$$

$$C_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} H_i z^2 dz$$

式中  $n$  表示施加载荷增量的次数,  $i$  表示第  $i$  次施加载荷增量。在同一个应力水平下  $H_i$  可近似地取为常量(见图2), 因沿板的厚度应力水平是变化的, 所以  $H_i$  是  $z$  的函数。很明显, 如果在整个加载过程中  $H_i$  均能取为一常数  $H$ , 则  $C_i$  也为常数且等于:

$$C_i = H \frac{h^3}{12} = C$$

此时可得:

$$A_r = CK_1^*$$

$$A_\varphi = CK_\varphi^*$$

这就是线性随动情况。

3、 $M_0$  也可以不断强化, 这样便成为混合强化模型, 即一般的各向异性强化模型。

李如锋同志参加了部分计算工作, 特此表示感谢。

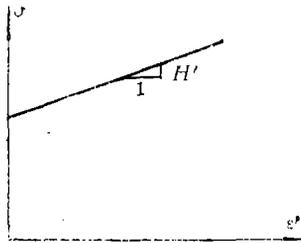


图1 单向拉伸刚塑性线性强化模型时应力应变关系

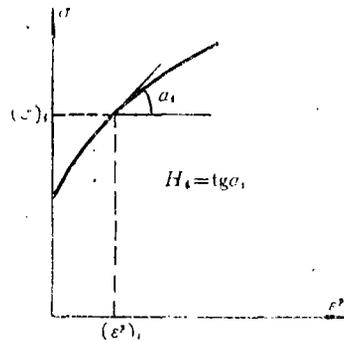


图2 单向拉伸刚塑性非线性强化时应力应变关系

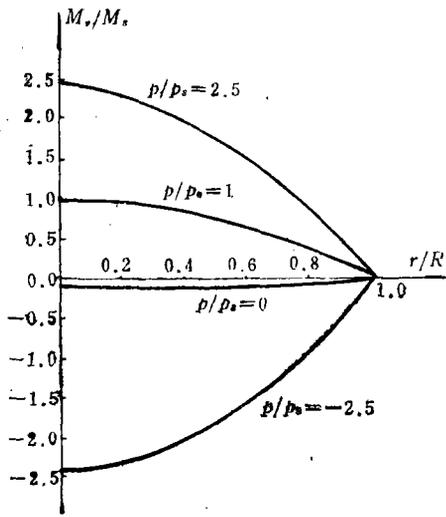


图3 在不同加载和卸载情况下  $\frac{M_r}{M_s} - \frac{r}{R}$  曲线

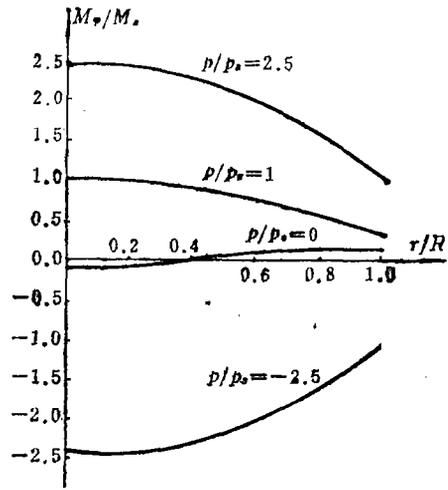


图4 在不同加载和卸载情况下  $\frac{M_\theta}{M_s} - \frac{r}{R}$  曲线

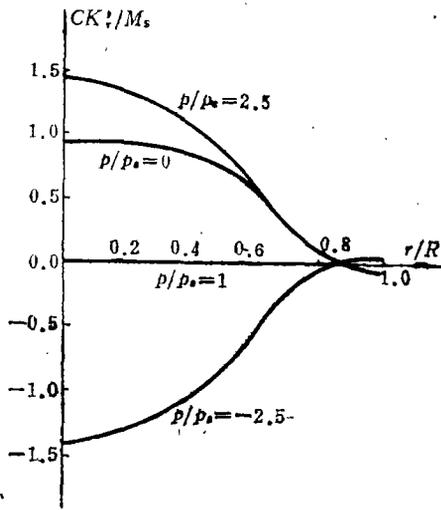


图5 在不同加载和卸载情况下  $\frac{CK_p^p}{M_s} - \frac{r}{R}$  曲线

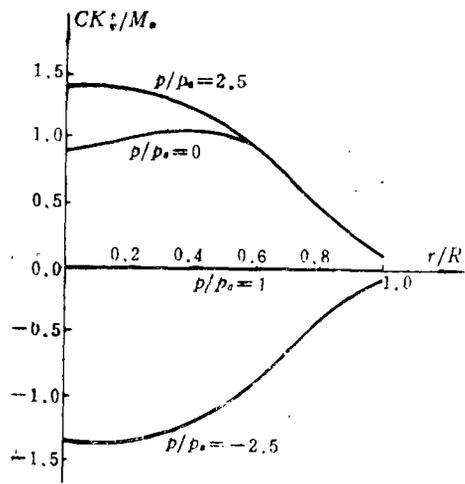


图6 在不同加载和卸载情况下  $\frac{CK_p^p}{M_s} - \frac{r}{R}$  曲线

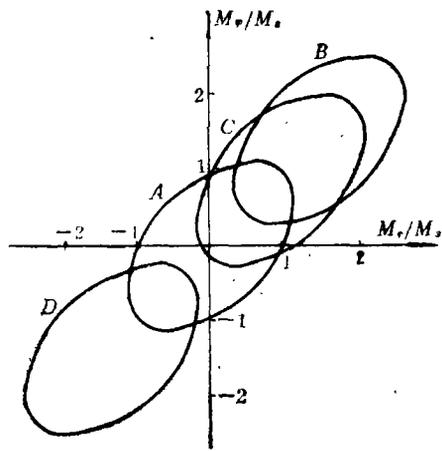


图7  $\frac{r}{R} = 0$  处加载面随着加载卸载变化而运动的情况

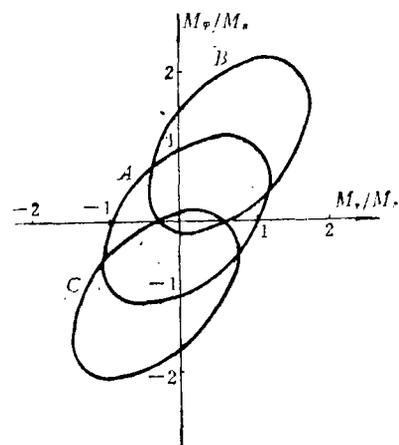


图8  $\frac{r}{R} = 0.6$  处加载面随着加载卸载变化而运动的情况

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Shield, R. T. and H. Ziegler, On Prager's hardening rule, *J. Appl. Math. Phys.* (ZAMP). **9a**, 3 (1958), 260—276.
- [ 2 ] Ziegler, H., A Modification of Prager's hardening rules, *Quarterly Appl. Math.*, **17** (1959), 55—65.
- [ 3 ] Mroz, Z., On the description of anisotropic work-hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, **15** (1967), 163—175.
- [ 4 ] Axelsson, K. and A. Samuelsson, Finite element analysis of elasto-Plastic materials displaying mixed hardening, *Inter. J. Num. Meth. Engng*, **14** (1979), 211—225.
- [ 5 ] Lamba, H. S. and O. M. Sidebottom, Cyclic plasticity for nonproportional paths, Part 2—comparison with prediction of three incremental plasticity models, *J. Engng Mat. Tech.* (Trans. ASME) **100**, Jan. (1978), 104—111.
- [ 6 ] Zenner, H., On life prediction in low cyclic-fatigue, *Proceedings of the International Symposium on Low-Cycle Fatigue Strength and Elasto-Plastic Behaviour of Materials*, (1979).
- [ 7 ] Kachanov, L. M., *Foundation of the Theory of Plasticity* (1971).
- [ 8 ] Hwang, Chintsun, Incremental Stress-strain law applied to work-hardening plastic materials, *J. Appl. Mech.*, (Trans. ASME) Dec. (1959), 594—598.

## Plastic Analysis of Thin Plates with Anisotropic Hardening

Jing Yong-jie

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

### Abstract

In this paper we discuss the adoption of the anisotropic hardening model due to the existence of Bauschinger effect when thin plate is applied by repeated loading. The loading condition of thin plates for linear kinematic hardening has been deduced in terms of generalized forces and generalized plastic deformation. And it can be extended to non-linear kinematic hardening and mixed hardening. Finally as an example the numerical results are obtained for a circular plate.