应用数学和力学，第7卷第4期（1986年4月）　　　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　　　重庆出版社出版

双曲-双曲奇异摄动混合问题的一致收敛格式*

尹　光　炎

（江南大学，1985年1月25日收到）

摘　　要

本文构造了二阶双曲-双曲奇异摄动混合问题的差分格式，给出了差分解的能量不等式，并证明了差分解在离散范数下关于小参数一致收敛于摄动问题的解。

一、引　　言

关于高阶导数项含有小参数的二阶双曲型方程奇异摄动问题，不少作者已作了有益的讨论。例如，[1]给出了非线性混合问题的能量不等式；[2]，[3]和[4]分别对拟线性双曲型方程的柯西问题和混合问题进行了讨论，给出了解的渐近展开式及余项估计；[5]对一个特殊方程的混合问题用 Fourier 方法讨论了解的渐近性态。关于用数值方法研究二阶双曲型方程的奇异摄动问题，文献较为鲜见。[6]对柯西问题

$$\begin{cases} \varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}+f(x,t) \\ t=0:\ u=F(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=G(x) \\ a\ \text{为常数且}\ |a|<1 \end{cases}$$

进行了数值处理，给出了一个收敛且稳定的差分格式，但未论及一致收敛性。

本文主要讨论高阶导数项均带有小参数$\varepsilon>0$的二阶常系数双曲型方程的混合问题

$$A_\varepsilon:\begin{cases} Lu\equiv\varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+a\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial u}{\partial t}+du=f(x,t), \\ \qquad (0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T) \\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中　$f(x,t)\in C^6(\Omega)$，$\Omega\equiv\{(x,t):0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，$\varphi(x)$，$\psi(x)\in C^6[0,1]$且满足相容性条件

* 吴启光推荐。

本文曾在全国第二届计算流体力学会议上宣读（1984．5）。

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi(1)=\varphi'(1)=\psi(0)=\psi(1)=0,\ f(0,t)=f(1,t)=0 \tag{1.2}$$

而系数a, b和d是与x, t及ε无关的常数且$a\neq0$和$b\neq0$。

当$\varepsilon=0$时，方程(1.1)退化为

$$L_0w_0(x,t)\equiv a\frac{\partial w_0}{\partial x}+b\frac{\partial w_0}{\partial t}+dw_0=f(x,t) \tag{1.3}$$

由[1]和[2]知道，为使(1.3)较好地逼近(1.1)，要求$|b/a|>1$。

由[7]可以知道，如果$b\leqslant -a<0$，则摄动问题A_ε在$\Gamma_0=\{(x,0):0\leqslant x\leqslant 1\}$附近不出现边界层，而仅在$\Gamma_1=\{(1,t):0\leqslant t\leqslant T\}$附近出现边界层。当$a<0$时，我们作变换$y=1-x$后可以进行类似的讨论。因此，不失一般性，我们假定

$b>a>0$ 及 $d\geqslant 0$

此时，奇异摄动问题A_ε在Γ_0及Γ_1附近都出现边界层，其退化问题为

$$A_0:\begin{cases} L_0w_0(x,t)\equiv a\dfrac{\partial w_0}{\partial x}+b\dfrac{\partial w_0}{\partial t}+dw_0=f(x,t) & ((x,t)\in\Omega)\\ w_0(0,t)=0,\ w_0(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$$

本文的主要结果是构造了一个与A_ε相容的差分格式，如(3.1)′所示，证明了该格式的退化差分格式是与摄动问题A_ε的退化问题A_0相容的，并给出了退化差分方程的稳定性条件；在$b\tau=ah$的假定下，给出了差分格式的解的能量不等式，由此证明了该格式的解关于小参数ε一致收敛于摄动问题A_ε的解，且收敛阶在范数$\|\cdot\|_h$意义下为$O(\tau^{\frac{1}{2}})=O(h^{\frac{1}{2}})$，其中$h$和$\tau$分别是$x$方向和$t$方向的步长。在第五节中我们给出了数值例子。

为简单起见，我们规定c表示一个与x, t及ε无关的常数。同一个c可以代表不同的常数，即使在同一式中，这一规定也适用。

二、摄动问题A_ε的能量不等式及渐近解

我们可以用分离变量法求出问题A_ε的解的先验估计。先考虑齐次问题

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial t}+du=0,\ u(0,t)=u(1,t)=0$$

令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，则可得到

$$\varepsilon X''(x)-aX'(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=X(1)=0 \tag{2.1}$$

其中λ是与x及t无关的常数。

由[10]可知

$$X_n(x)=\sqrt{2\varepsilon}\exp\left(\frac{ax}{2\varepsilon}\right)\sin n\pi x,\ \lambda_n=\frac{a^2+4\varepsilon^2n^2\pi^2}{4\varepsilon}$$

显然，$\{X_n(x)\}$是关于权函数$S(x)=(1/\varepsilon)\cdot\exp(-ax/\varepsilon)$的标准直交系，即

$$\int_0^1 S(x)X_m(x)X_n(x)dx=\begin{cases}1, & m=n\text{ 时}\\ 0, & m\neq n\text{ 时}\end{cases}$$

引入范数$\|h(x)\|^2=\int_0^1 S(x)h^2(x)dx$，显然我们有$\|1\|^2\leqslant c$。

令集合$H[0,1]\equiv\{G(x):G(0)=G(1)=0,\ G(x)\text{ 充分光滑}\}$，$\forall G(x)\in H[0,1]$，则

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n X_n(x)$$

其中g_n是$G(x)$关于标准直交系$\{X_n(x)\}$的 Fourier 系数，

$$g_n=\int_0^1 S(x)G(x)X_n(x)dx$$

容易证明

引理2.1 $\forall G(x)\in H[0,1]$，g_n如上定义，则

$$\|G(x)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2$$

我们又有

引理2.2 $\forall t\geqslant 0$，k为正整数，则有

$$t^k\exp(-t)\leqslant c(\theta)\exp(-\theta t)$$

其中$\theta\in(0,1)$，且$c(\theta)$是仅依赖于θ的一个常数。

本引理的证明可参看[8]的附录 B。

显然，$u(x,t)$，$f(x,t)$，$\varphi(x)$及$\psi(x)$均属于$H[0,1]$，故可将上述诸函数关于$\{X_n(x)\}$进行 Fourier 展开，并设其 Fourier 系数分别是$u_n(t)$，$f_n(t)$，φ_n及ψ_n。将展开式代入方程(1.1)，并利用(2.1)及初始条件，可得

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon u_n''(t)+bu_n'(t)+(\lambda_n+d)u_n(t)=f_n(t)\\&u_n(0)=\varphi_n,\quad u_n'(0)=\psi_n\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

对方程 (2.2) 的特征方程的特征根的各种情况加以讨论，可以证明

引理2.3 (2.2)的解$u_n(t)$满足不等式

$$|u_n(t)|\leqslant c\left\{\left(\int_0^t|f_n(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+|\varphi_n|+\varepsilon|\psi_n|\right\}$$

应用引理2.1和引理2.3，即可得到

定理2.1 摄动问题A_ε的解$u(x,t)$满足

$$\|u(x,t)\|^2\leqslant c\left\{\int_0^T\|f(x,\ \tau)\|^2d\tau+\|\varphi(x)\|^2+\varepsilon^2\|\psi(x)\|^2\right\}$$

这是摄动问题A_ε的解的能量估计。

我们用边界层校正法[7]，可以得到摄动问题A_ε的解的一阶渐近展开式：

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(x,t)=&w_0(x,t)+\varepsilon v_0(x,\zeta)+\varepsilon a_0(x)\\&+E(x)\{\tilde{v}_0(\xi,t)+\varepsilon w_1(x,t)+\varepsilon\tilde{v}_1(\xi,t)\}\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中，$w_0(x,t)$是退化问题A_0的解，

$$a_0(x)=\frac{1}{b}\left[\psi(x)-\frac{\partial w_0(x,0)}{\partial t}\right]$$

而$w_1(x,t)$满足

$$\begin{cases}a\dfrac{\partial w_1(x,t)}{\partial x}+b\dfrac{\partial w_1(x,t)}{\partial t}+dw_1(x,t)=\dfrac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2}-a\alpha_0'(x)-d\alpha_0(x)\\w_1(x,0)=w_1(0,t)=0\end{cases}$$

并且，$v_0(x,\zeta)$是Γ_0处的边界层函数，

$$v_0(x,\zeta)=-\alpha_0(x)\exp(-b\zeta),\quad \zeta=\frac{t}{\varepsilon}$$

而$\tilde{v}_0(\xi,t)$和$\tilde{v}_1(\xi,t)$是Γ_1处的边界层函数，

$$\tilde{v}_0(\xi,t)=-w_0(1,t)\exp(-a\xi),\quad \xi=\frac{1-x}{\varepsilon}$$

$$\tilde{v}_1(\xi,t)=-w_1(1,t)\exp(-a\xi)+\frac{1}{a}\left[b\frac{\partial w_0(1,t)}{\partial t}+dw_0(1,t)\right]\xi\exp(-a\xi)$$

$E(x)$是平滑函数，

$$E(x)=\begin{cases}1, & 0.9\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 0.1,\end{cases}\qquad 0\leqslant E(x)\leqslant 1\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

且$E(x)$在$[0,1]$内充分光滑。

利用引理2.2和定理2.1容易证明

定理2.2 设$u(x,t)$是摄动问题A_ε的解，而$\bar{u}_1(x,t)$为其一阶渐近解，如(2.3)所示，则有

$$\|\bar{u}_1(x,t)-u(x,t)\|\leqslant c\varepsilon$$

三、差分格式的建立及其能量不等式

在区域Ω上建立均匀网格

$$\Omega_{h\tau}=\{(kh,j\tau):\ k=0,1,\cdots,N;\ Nh=1;\ j=0,1,\cdots,M;\ T-\tau<M\tau\leqslant T\}$$

构造差分格式

$$\left.\begin{aligned}
&(L^{h\tau}u)_{kj}\equiv(\sigma_1u_{t\bar{t}}-\sigma_2u_{x\bar{x}}+au_{\mathring{x}}+bu_{\mathring{t}}+du)_{kj}\\
&\qquad=f_{kj}\qquad(k=1,\cdots,N-1;j=1,\cdots,M-1)\\
&u_{0j}=u_{Nj}=0\qquad(j=0,\ 1,\cdots,\ M)\\
&u_{k0}=\varphi_k\qquad(k=0,\ 1,\cdots,\ N)\\
&u_{k1}=\varphi_k+\tau\frac{\partial w_0(x_k,0)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\psi_k-\frac{\partial w_0(x_k,0)}{\partial t}}{b}\left(1-\exp\left(-\frac{b\tau}{\varepsilon}\right)\right)\quad(k=0,1,\cdots,N)
\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

其中 $f_{kj}=f(kh,\ j\tau)\qquad(k=0,\ 1,\cdots,\ N;\ j=0,\ 1,\cdots,\ M)$

$\varphi_k=\varphi(kh),\ \psi_k=\psi(kh)\qquad(k=0,\ 1,\cdots,\ N)$

$$\sigma_1=\frac{b\tau}{2}\mathrm{cth}\frac{b\tau}{2\varepsilon},\quad \sigma_2=\frac{ah}{2}\mathrm{cth}\frac{ah}{2\varepsilon}$$

而$u_{\mathring{t}}$和$u_{t\bar{t}}$分别表示u关于t方向的一阶和二阶中心差商，u_t和$u_{\bar{t}}$则分别表示其前差和后差。在x方向上的记号也有类似的含义。并且，由于$w_0(x,t)$是退化问题A_0的解，因此我们有

$$\frac{\partial w_0(x_k,0)}{\partial t}=\frac{1}{b}\left[f(x_k,\ 0)-a\frac{\partial w_0(x_k,0)}{\partial x}-dw_0(x_k,\ 0)\right]$$

$$=\frac{1}{b}[f_{k0}-a\varphi'(x_k)-d\varphi_k]$$

由于$\sigma_1\to b\tau/2$，$\sigma_2\to ah/2\ (\varepsilon\to 0)$，可以知道方程(3.1)的退化差分方程

$$(L_0^{h\tau}w)_{kj}\equiv\frac{b}{\tau}w_{k,j+1}-\frac{a}{h}w_{k-1,j}+\left(-\frac{b}{\tau}+\frac{a}{h}+d\right)w_{kj}=f_{kj}$$

以一阶逼近于(1.3)。可以证明退化差分算子$L_0^{h\tau}$是条件稳定的，且其稳定性条件是

$$\frac{\tau}{h}<1;\quad h\leqslant\begin{cases}(b-a)/d & (d>0)\\ 1 & (d=0)\end{cases}$$

为讨论方便起见，以下我们假定

$$b\tau=ah$$

又令$\frac{b\tau}{\varepsilon}=\frac{ah}{\varepsilon}=\rho$，则$\sigma_1=\sigma_2=\sigma=\frac{\varepsilon}{2}\rho\ \mathrm{cth}\frac{1}{2}\rho$，故(3.1)可改写为

$$\left.\begin{aligned}&(L^{h\tau}u)_{kj}\equiv(\sigma(u_{t\bar t}-u_{x\bar x})+au_{\mathring{x}}+bu_{\mathring{t}}+du)_{kj}=f_{kj}\\&\qquad(k=1,\cdots,N-1;\ j=1,\cdots,M-1)\\&u_{0j}=u_{Nj}=0\qquad(j=0,\ 1,\cdots,\ M)\\&u_{k0}=\varphi_k\qquad(k=0,\ 1,\cdots,\ N)\\&u_{k1}=\varphi_k+\tau\frac{\partial w_0(x_k,0)}{\partial t}+\tau\frac{1-\exp(-\rho)}{\rho}\left[\psi_k-\frac{\partial w_0(x_k,0)}{\partial t}\right]\\&\qquad(k=0,\ 1,\cdots,\ N)\end{aligned}\right\}\tag{3.1)$'$ (}$$

显然差分格式(3.1)′是与摄动问题A_ε相容的。

设$u_{kj}=T^jX_k$，使$L^{h\tau}(T^jX_k)=0$，可得

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\sigma}{\tau^2}+\frac{b}{2\tau}\right)T^{j+1}+\left(\frac{\sigma}{\tau^2}-\frac{b}{2\tau}\right)T^{j-1}+\left(-\frac{2\sigma}{\tau^2}+\frac{2\sigma}{h^2}+d\right)T^j=\lambda_kT^j\\&\left(-\frac{\sigma}{h^2}+\frac{a}{2h}\right)X_{k+1}+\lambda_kX_k-\left(\frac{\sigma}{h^2}+\frac{a}{2h}\right)X_{k-1}=0\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

利用边界条件，我们有

$$\left(-\frac{\sigma}{h^2}+\frac{a}{2h}\right)X_{k+1}+\lambda_kX_k-\left(\frac{\sigma}{h^2}+\frac{a}{2h}\right)X_{k-1}=0,\quad X_0=X_N=0$$

由[9]可得

$$X_{k,m}=\sqrt{2\varepsilon}\ \exp\left(\frac{1}{2}k\rho\right)\sin\frac{km\pi}{N}\qquad(k,\ m=1,\cdots,\ N-1)$$

$$\lambda_k=-\frac{a\cos\dfrac{k\pi}{N}}{h\cdot\mathrm{sh}\dfrac{1}{2}\rho}\qquad(k=1,\cdots,\ N-1)$$

显然，$\{X_{k,m}\}$关于权函数$S_k=(1/\varepsilon)\exp(-k\rho)$标准直交，即

$$\sum_{k=1}^{N-1}S_kX_{k,m}X_{k,n}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

设$\bar H=\{G_k: G_k$是定义在$\Omega_{h\tau}$上的网格函数，并且$G_0=G_N=0\}$。$\forall G_k\in\bar H$，则G_k可以关于标准直交系$\{X_{k,n}\}$进行 Fourier 展开，$G_k=\sum_{n=1}^{N-1}g_nX_{k,n}$，其中$g_n$是$G_k$的 Fourier 系数，即

$$g_n=h\sum_{k=1}^{N-1}S_kG_kX_{k,n}$$

取离散范数$\|G_k\|_h^2=h\sum_{k=1}^{N-1}S_kG_k^2$。我们有

引理3.1 $\forall G_k\in\bar{H}$，g_n是G_k的 Fourier 系数，则有

$$\|G_k\|_h^2=\sum_{n=1}^{N-1}g_n^2$$

因为u_{kj}，$f_{kj}\in\bar{H}$，故可将它们关于$\{X_{k,n}\}$进行 Fourier 展开，设其 Fourier 系数分别是$\tilde{u}_{nj}$和$\tilde{f}_{nj}$，代入(3.1)′，利用(3.2)并记

$$\alpha=\frac{\sigma}{\tau^2}+\frac{b}{2\tau},\quad \beta_k=-\frac{2\sigma}{\tau^2}+\frac{2\sigma}{h^2}-\lambda_k+d,\quad \gamma=\frac{\sigma}{\tau^2}-\frac{b}{2\tau}$$

我们有
$$\alpha\tilde{u}_{n,j+1}+\beta_k\tilde{u}_{nj}+\gamma\tilde{u}_{n,j-1}=\tilde{f}_{nj} \tag{3.3}$$

其特征方程是

$$\alpha\mu^2+\beta_k\mu+\gamma=0 \tag{3.4}$$

通过直接验证容易证明

引理3.2 设μ_{1k}和μ_{2k}是(3.4)的两个根，则(3.3)的解$\tilde{u}_{nj}$满足

(i) 若$\mu_{1k}=\mu_{2k}=\mu_k$，则

$$\tilde{u}_{nj}=\frac{1}{\alpha}\Big\{\sum_{l=1}^{j-1}(j-l)\mu_k^{j-l-1}\tilde{f}_{nl}+\alpha j\mu_k^{j-1}\tau(\tilde{u}_t)_{n0}$$
$$+\alpha\mu_k^{j-1}[j(1-\mu_k)+\mu_k]\tilde{u}_{n0}\Big\}$$

(ii) 若$\mu_{1k}\neq\mu_{2k}$，则

$$\tilde{u}_{nj}=\frac{1}{\alpha(\mu_{2k}-\mu_{1k})}\Big\{\sum_{l=1}^{j-1}(\mu_{2k}^{j-l}-\mu_{1k}^{j-l})\tilde{f}_{nl}+\alpha\tau(\mu_{2k}^j-\mu_{1k}^j)(\tilde{u}_t)_{n0}$$
$$+\alpha[\mu_{2k}^j-\mu_{1k}^j-\mu_{1k}\mu_{2k}(\mu_{2k}^{j-1}-\mu_{1k}^{j-1})]\tilde{u}_{n0}\Big\}$$

我们还有

引理3.3 假设α，β和γ均为实数($\alpha\neq0$)，则二次方程$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$的两个根均按模小于或等于某一正常数$\delta_0$的充要条件是

$$|\gamma|\leqslant|\alpha|\delta_0^2,\quad |\beta|\leqslant|\alpha|\delta_0+\frac{|\alpha|\gamma}{\alpha\delta_0}$$

其证明类似于[10, p.92]引理的证明。

令
$$\delta=\begin{cases}1, & d=0\\ \min\left\{\dfrac{4a^2}{25bd},\ \dfrac{b-a}{d}\right\}, & d>0\end{cases}$$

由引理3.3可证

引理3.4 当$\rho\geqslant1$及$0<\tau\leqslant\delta$时，特征方程(3.4)的两个根μ_{1k}和μ_{2k}均满足

$$|\mu_{ik}|\leqslant0.97\qquad(i=1,2;\ k=1,2,\cdots,N-1)$$

又令

$$\varepsilon_0=\begin{cases}1, & d=0\\ \dfrac{a^2}{5d}, & d>0\end{cases}$$

由反证法可得

引理3.5 当$0<\rho<1$，$0<h\leqslant\delta$和$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，若特征方程(3.4)的根$\mu_{ik}(i=1,\ 2;\ k=1,\ \cdots,\ N-1)$均为实根，则存在常数$\delta_0\ (0<\delta_0<1)$使得

$$|\mu_{ik}|\leqslant\delta_0$$

因此由引理3.2，引理3.4和引理3.5不难得到

引理3.6 如果$0<h\leqslant\delta$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，且下面两个条件中有任一个成立：

(i) $\rho\geqslant 1$。

(ii) $0<\rho<1$且特征方程(3.4)的两根μ_{1n}和μ_{2n}均为实根。则方程(3.3)的解$\tilde{u}_{nj}$满足

$$|\tilde{u}_{nj}|\leqslant c\left\{\left(\tau\sum_{l=1}^{j-1}|\tilde{f}_{nl}|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\tau|(\tilde{u}_t)_{n0}|+|\tilde{u}_{n0}|\right\}$$

当$0<\rho<1$且特征方程(3.4)的根均为虚数，我们能够首先证明这些虚根的幅角θ当$\rho\to 0$时不可能趋于π，然后采用某些变换技巧并反复应用引理2.2，则可证明如下的不等式

$$\left|\frac{\mu_{2k}^{j}-\mu_{1k}^{j}-\mu_{1k}\mu_{2k}(\mu_{2k}^{j-1}-\mu_{1k}^{j-1})}{\mu_{2k}-\mu_{1k}}\right|\leqslant c$$

因此我们容易得到

引理3.7 当$0<\rho<1$，$0<h\leqslant\delta$和$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，且特征方程(3.4)的根均为虚根，则方程(3.3)的解$\tilde{u}_{nj}$满足

$$|\tilde{u}_{nj}|\leqslant c\left\{\left(\tau\sum_{l=1}^{j-1}|\tilde{f}_{nl}|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon|(\tilde{u}_t)_{n0}|+|\tilde{u}_{n0}|\right\}$$

综合上述两个引理并应用引理3.1，不难得到

定理3.1 当$0<h\leqslant\delta$和$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，差分格式(3.1)′的解$u_{kj}$满足

$$\|u_{kj}\|_h^2\leqslant c\left\{\tau\sum_{l=1}^{j-1}\|f_{kl}\|_h^2+(\tau+\varepsilon)\|(u_t)_{k0}\|_h^2+\|u_{k0}\|_h^2\right\}$$

四、差分格式的一致收敛性

我们设$u(x,t)$是摄动问题A_ε的解，而$\bar{u}_1(x,t)$是其一阶渐近解，如(2.3)所示，又设u_{kj}是差分格式(3.1)′的解，并令$(\bar{R}_1)_{kj}=\bar{u}_1(x_k,t_j)-u_{kj}$。不难证明$(L^{h\tau}\bar{R}_1)_{kj}=\sum_{i=1}^{7}F_i$，其中

$$\begin{aligned}
F_1&=(a(w_0)_{\hat{x}}+b(w_0)_{\hat{t}}+dw_0)_{kj}-f_{kj}\\
F_2&=\{\sigma(w_0)_{t\bar{t}}-\sigma(w_0)_{x\bar{x}}+\varepsilon\cdot E(x)[a(w_1)_{\hat{x}}+b(w_1)_{\hat{t}}\\
&\quad+dw_1]+\varepsilon[a(\alpha_0)_{\hat{x}}+d\alpha_0]\}_{kj}\\
F_3&=\varepsilon\{E(x)\sigma[(w_1)_{t\bar{t}}-(w_1)_{x\bar{x}}]-(\alpha_0)_{x\bar{x}}\}_{kj}\\
F_4&=\varepsilon\{-\sigma(v_0)_{x\bar{x}}+a(v_0)_{\hat{x}}+dv_0\}_{kj}\\
F_5&=E(x_k)\{\varepsilon(-\sigma(\tilde{v}_1)_{x\bar{x}}+a(\tilde{v}_1)_{\hat{x}})_{kj}+(b(\tilde{v}_0)_{\hat{t}}+d\tilde{v}_0)_{kj}\}\\
F_6&=E(x_k)(\sigma(\tilde{v}_0)_{t\bar{t}})_{kj}\\
F_7&=E(x_k)\{\varepsilon(\sigma(\tilde{v}_1)_{t\bar{t}}+b(\tilde{v}_1)_{\hat{t}}+d\tilde{v}_1)_{kj}\}
\end{aligned}$$

利用引理2.2及不等式$|\sigma-\varepsilon|\leqslant c\rho\varepsilon\leqslant c\tau$（可参看[8]附录B），对$F_i$（$i=1,\cdots,7$）分别作估计，可以得到$|(L^{h\tau}\bar{R}_1)_{kj}|=\left|\sum_{i=1}^{7}F_i\right|\leqslant c(\tau+\varepsilon)$。因此有

$$\|(L^{h\tau}\bar{R}_1)_{kl}\|_h^2\leqslant c(\tau+\varepsilon)^2$$

易知 $(\bar{R}_1)_{0j}=(\bar{R}_1)_{Nj}=(\bar{R}_1)_{k0}=0$ $(k=0,\ 1,\cdots,\ N;\ j=0,\ 1,\cdots,\ M)$

而 $\|((\bar{R}_1)_t)_{k0}\|_h^2\leqslant c$。故由定理3.1即得

引理4.1 当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$及$0<h\leqslant\delta$时，有

$$\|\bar{u}_1(x_k,t_j)-u_{kj}\|_h=\|(\bar{R}_1)_{kj}\|_h\leqslant c(\tau+\varepsilon)$$

由定理2.2和引理4.1可得

定理4.1（非古典估计） 设$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$及$0<h\leqslant\delta$，则有 $\|u(x_k,t_j)-u_{kj}\|_h\leqslant c(\tau+\varepsilon)$

我们又可证明

定理4.2（古典估计） 设$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$及$0<h\leqslant\delta$，

则有
$$\|u(x_k,t_j)-u_{kj}\|_h\leqslant c\left\{\frac{\tau^2}{\varepsilon^3}+\frac{\tau(\tau+\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}$$

最后，若$\tau\leqslant\varepsilon^2$则应用定理4.2，若$\tau>\varepsilon^2$则应用定理4.1，我们就得到了本文的主要结果

定理4.3 当$0<h\leqslant\delta$时，不等式

$$\|u(x_k,t_j)-u_{kj}\|_h\leqslant c\tau^{\frac{1}{2}}$$

关于$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$一致成立。换言之，差分格式(3.1)′的解$u_{kj}$关于$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$一致收敛于摄动问题$A_\varepsilon$的解$u(x,t)$，且收敛阶在范数$\|\cdot\|_h$意义下为$O(\tau^{\frac{1}{2}})$。

五、数 值 例 子

我们考虑奇异摄动问题

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial t}+2u\\&\qquad=x^3(1-x)^2(4-5x-2x^2)\quad(0<x<1,\ 0<t\leqslant1)\\&u|_{x=0}=u|_{x=1}=0,\ u|_{t=0}=x^4(1-x)^3,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=x^2(1-x)^2\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

从第二节的讨论，容易求得(5.1)的一阶渐近解$\bar{u}_1$（具体过程此处从略），其中平滑函数粗略地取成

$$E(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<0.97\\1, & 0.97\leqslant x\leqslant1\end{cases}$$

在区域$\{(x,t):0\leqslant x\leqslant1;\ 0\leqslant t\leqslant1\}$上取$h=2\tau$的均匀网格，由(3.1)′得到如下的差分格式：

$$\left.\begin{aligned}&u_{k,j+1}=\frac{1}{4(1+G)}\{2hf_{kj}+(G-1)u_{k+1,j}+(G+1)u_{k-1,j}\\&\qquad+(6G-4h)u_{kj}-4(G-1)u_{k,j-1}\}\quad(k=1,\cdots,N-1;\ j=1,\cdots,2N-1)\\&u_{0j}=u_{Nj}=0\quad(j=0,1,\cdots,\ 2N)\\&u_{k0}=\varphi(kh)\quad(k=0,\ 1,\cdots,\ N)\\&u_{k1}=\varphi(kh)+\frac{1}{2}\varepsilon\psi(kh)[1-\exp(-h/\varepsilon)]\quad(k=0,\ 1,\cdots,\ N)\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

其中 $G=\mathrm{cth}\tau/\varepsilon$, $Nh=1$, $\varphi(x)=x^4(1-x)^3$, $\psi(x)=x^2(1-x)^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, $f_{kj}=f(kh)$

而
$$f(x)=x^3(1-x)^2(4-5x-2x^2)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

(5.2) 是显式格式，因此可很方便地求得差分格式 (5.2) 的解u_{kj}。因为很难求得奇异摄动问题(5.1)的解析解，故我们将(5.2)的差分解u_{kj}与(5.1)的渐近解$\bar{u}_1(kh,j\tau)$在范数$\|\cdot\|_h$意义下进行比较。

$h=1/20$时，在Γ_0附近的差分解与渐近解的值相同，因此不再画表列出。

表 1 列出了$h=1/40$时差分解与渐近解在Γ_0附近的值，可以看出两者在角点 (1,0) 附近有一定的误差（见表 1 的最末一列）。表 2 列出了差分解与渐近解在网格中间的一些点上的值的比较。表 3 与表 4 分别列出了在$h=1/20$及$h=1/40$时采用离散范数$\|u_{kj}-\bar{u}_1(kh,j\tau)\|_h$所求得的值。

表 1

ε	u \ (x,t)	(0.2,0.0125)	(0.4,0.0125)	(0.6,0.0125)	(0.8,0.0125)	(0.975,0.0125)
$\varepsilon=\frac{1}{128}$	$u_{kj}(h=1/40)$	0.00091512	0.00574542	0.00851022	0.00337272	0.00001635
	$\bar{u}_1$	0.00091512	0.00574542	0.00851022	0.00337272	0.00002399
$\varepsilon=\frac{1}{256}$	$u_{kj}(h=1/40)$	0.00086912	0.00564190	0.00840671	0.00332672	0.00001528
	$\bar{u}_1$	0.00086912	0.00564190	0.00840671	0.00332672	0.00001912

表 2

ε	u \ (x,t)	(0.4,0.25)	(0.4,0.50)	(0.4,0.75)	(0.4,1.00)
$\varepsilon=\frac{1}{128}$	$u_{kj}(h=1/20)$	0.00584804	0.00588033	0.00594812	0.00596556
	$u_{kj}(h=1/40)$	0.00570326	0.00574860	0.00576946	0.00577221
	$\bar{u}_1$	0.00575459	0.00575459	0.00575459	0.00575459
$\varepsilon=\frac{1}{256}$	$u_{kj}(h=1/20)$	0.00568480	0.00586619	0.00594129	0.00596349
	$u_{kj}(h=1/40)$	0.00563948	0.00571688	0.00575102	0.00575809
	$\bar{u}_1$	0.00564209	0.00564209	0.00564209	0.00564209

表 3 $(h=1/20)$ $\|u_{kj}-\bar{u}_1(kh,j\tau)\|_h$

t \ ε	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
0.025	0.295480×10^{-10}	0.212246×10^{-11}	0.223944×10^{-12}	0.540655×10^{-14}
0.25	0.987567×10^{-5}	0.176376×10^{-5}	0.530225×10^{-6}	0.530057×10^{-7}
0.50	0.114320×10^{-4}	0.194259×10^{-5}	0.562196×10^{-6}	0.559865×10^{-7}
0.75	0.117105×10^{-4}	0.195917×10^{-5}	0.563602×10^{-6}	0.561062×10^{-7}
1.00	0.117633×10^{-4}	0.196077×10^{-5}	0.563665×10^{-6}	0.561109×10^{-7}

本文是在南京大学的苏煜城和吴启光两位导师的指导下完成的，作者借此机会深表谢意。

表 4 $(h=1/40)$ $\|u_{kj}-\bar{u}_1(kh,j\tau)\|_h$

t \ ε	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
0.0125	0.145353×10^{-10}	0.419893×10^{-11}	0.720371×10^{-12}	0.938660×10^{-13}
0.25	0.704679×10^{-5}	0.107519×10^{-5}	0.359494×10^{-6}	0.159084×10^{-7}
0.50	0.735785×10^{-5}	0.111049×10^{-5}	0.361691×10^{-6}	0.159487×10^{-7}
0.75	0.740297×10^{-5}	0.111171×10^{-5}	0.361708×10^{-6}	0.159488×10^{-7}
1.00	0.740970×10^{-5}	0.111175×10^{-5}	0.361708×10^{-6}	0.159488×10^{-7}

参 考 文 献

[1] Genet, Jean and Monique Madaune, Singular perturbations for a class of nonlinear hyperbolic-hyperbolic problems, *Jour. Math. Anal. Appl.*, 64 (1978), 1—24.

[2] de Jager, E. M., Singular perturbations of hyperbolic type, *Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis*, S. Axelsson, L. S. Frank, A. Van der Sluis (eds.), North-Holland, Publishing Company (1981).

[3] 苏煜城，二阶拟线性双曲型方程奇异摄动柯西问题的渐近解，高等学校计算数学学报，1 (1979)，80—91.

[4] 苏煜城，二阶拟线性双曲型方程奇异摄动混合问题的渐近解，南京大学学报，1 (1980)，19—29.

[5] Зламал М., О смешанной задаче для одного гиперболического уравнения с малым параметром, *Чехословацкий Математический Журнал*, 84, 9 (1959), 218—242.

[6] 张伟江、马晓云，双曲型偏微分方程奇异摄动问题的差分解法，上海交通大学学报，1 (1983).

[7] 苏煜城，《奇异摄动中的边界层校正法》，上海科学技术出版社 (1983).

[8] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1080).

[9] 戈杜诺夫 C. K., B. C. 李亚宾基，《差分格式理论导引》(中译本)，冯果忱等译，上海科学技术出版社 (1966).

[10] 苏煜城、吴启光，《偏微分方程数值解法》，科学出版社 (1979).

Uniform Difference Scheme for Hyperbolic-Hyperbolic Singular Perturbation Mixed Problems

Yin Guang-yan

(*Jiangnan University, Jiangsu*)

Abstract

A difference scheme is established in this paper for second-order hyperbolic-hyperbolic singular perturbation mixed problems. We give an energy inequality of the numerical solution and prove that the numerical solution converges to the solution of the singular perturbation problems uniformly with respect to a small parameter and in the sense of a discrete norm.