应用数学和力学，第7卷第5期(1986年5月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

拟协调元空间的紧致性和拟协调元法的收敛性

张鸿庆　王　鸣

(大连工学院应用数学系，1985年3月5日收到)

摘　　要

本文首先讨论拟协调元空间的紧致性，把Rellich紧致定理推广到拟协调元空间序列，进而把广义Poincarè、Friedrichs和Poincarè-Friedrichs等不等式推广到拟协调元空间。然后讨论拟协调元法的收敛性和误差估计。本文证明了如果拟协调元空间具有逼近性和强连续性、满足单元秩条件且通过检验IPT，则近似解是收敛的。做为例子，我们证明了6参、9参、12参、15参、18参及21参拟协调元的收敛精度在$L^{2,2}(\Omega)$范数下分别是$O(h_\tau)$、$O(h_\tau)$、$O(h_\tau^2)$、$O(h_\tau^2)$、$O(h_\tau^3)$及$O(h_\tau^4)$量级。

一、引　　言

文[1]建立了拟协调元方法的数学基础，把其收敛性归结为三部分：(i)能量泛函的一致正定性；(ii)拟协调元空间的逼近性；(iii)拟协调元空间通过广义分片检验。文[1]讨论了(ii)，(iii)，但对(i)还未加讨论。本文将讨论这个问题。为此目的，我们讨论拟协调元空间的紧致性，把熟知的Rellich紧致定理推广到拟协调元空间序列，进而把Poincarè、Friedrichs和Poincarè-Friedrichs等不等式推广到拟协调元空间。这样在用拟协调元解板弯曲问题时能保证能量泛函的一致正定性。另外，我们改进了[1]关于逼近性和广义分片检验的结果，证明在相当广的情况下拟协调元方法是收敛的，并且给出了误差估计。做为例子，6参、9参、12参、15参、18参及21参拟协调板元是收敛的。

和[1]一样，我们仍以周边固定的薄板弯曲问题为例叙述我们的结果。

设Ω是R^2中的有界多边形域，记$L^{2,2}(\Omega)=\{u=(u^{00},u^{10},u^{01},u^{20},u^{11},u^{02})\,|\,u^{ij}\in L^2(\Omega),\ 0\leqslant i+j\leqslant 2\}$，则$L^{2,2}(\Omega)$按下述范数$\|\cdot\|_{L^{2,2}(\Omega)}$是Hilbert空间：

$$u\in L^{2,2}(\Omega),\quad \|u\|^2_{L^{2,2}(\Omega)}=\sum_{0\leqslant i+j\leqslant 2}\int_\Omega |u^{ij}|^2dx$$

对$\forall w\in H^2(\Omega)$，定义$Ew=(w,\partial_{x_1}w,\ \partial_{x_2}w,\ \partial^2_{x_1x_1}w,\ \partial^2_{x_1x_2}w,\ \partial^2_{x_2x_2}w)$，则$EH^2(\Omega)$成为$L^{2,2}(\Omega)$的闭子空间。在空间$L^{2,2}(\Omega)$上，定义一个双线性连续泛函$a(\cdot,\cdot)$如下：

$$u,v\in L^{2,2}(\Omega),\quad a(u,v)=\int_\Omega (u^{20}v^{20}+2u^{11}v^{11}+u^{02}v^{02})dx \tag{1.1}$$

对$\forall f\in(L^{2,2}(\Omega))'$，考虑变分问题：

$$u_0\in H_0^2(\Omega),\ a(Eu_0,Ev)=f(Ev)\qquad(\forall v\in H_0^2(\Omega))\tag{1.2}$$

取$U_\tau(\tau=1,2,\cdots)$，是$L^{2,2}(\Omega)$的一列有限维子空间，则下述变分问题

$$u_\tau\in U_\tau,\ a(u_\tau,v)=f(v)\qquad(\forall v\in U_\tau)\tag{1.3}$$

是(1.2)的多套函数有限元逼近。如果U_τ是按拟协调元方法构造的，则(1.3)是解(1.2)的拟协调元方法（见[1]）。

对$\tau=1,2,\cdots$，设K_τ是Ω的一个有限元剖分且具有下述性质：

K1：对$\forall K\in K_\tau$，K是一个三角形（或平行四边形），且$\bar\Omega=\bigcup\limits_{K\in K_\tau}K$ $(\tau=1,2,\cdots)$；

K2：K_τ中的任意两相异单元的交集或空或是一条公共边，或是一个公共顶点；

K3：记ρ_K是K的最大内含圆的直径，h_K为K的外径，$h_\tau=\sup\limits_{K\in K_\tau}h_K$ $(\tau=1,2,\cdots,)$则$\lim\limits_{\tau\to\infty}h_\tau=0$

且存在与τ无关的正数$\eta>0$使得$\eta h_\tau\leqslant\rho_K(\forall K\in K_\tau)$。

拟协调元是按下述步骤构造U_τ的[1,2,3,4,5]。

首先给定一个整数$t>0$，对$\forall K\in K_\tau$，给定线性插值算子$\Pi_h^{00}:H^t(K)\to H^2(K)$、$\Pi_{\partial K}$：$H^t(K)\to L^2(\partial K)$、$\Pi_{\partial K}^s$：$H^t(K)\to L^2(\partial K)$及$\Pi_{\partial K}^N$：$H^t(K)\to L^2(\partial K)$和由多项式构成的有限维子空间$N_K^{ij}$，$0<i+j\leqslant2$。其次定义算子$\Pi_K^{ij}$：$H^t(K)\to N_K^{ij}$，$0<i+j\leqslant2$。对$\forall w\in H^t(K)$，$\Pi_K^{ij}w$由下述方程确定：

$$\forall P\in N_K^{10},\ \int_K P\Pi_K^{10}w\,dx=\int_{\partial K}P\Pi_{\partial K}wN_1ds-\int_K\partial_{x_1}P\,\Pi_K^{00}w\,dx\tag{1.4}$$

$$\forall P\in N_K^{01},\ \int_K P\Pi_K^{01}w\,dx=\int_{\partial K}P\Pi_{\partial K}wN_2ds-\int_K\partial_{x_2}P\,\Pi_K^{00}w\,dx\tag{1.5}$$

$$\forall P\in N_K^{20},\ \int_K P\Pi_K^{20}w\,dx=\int_{\partial K}P(N_1^2\Pi_{\partial K}^Nw-N_1N_2\Pi_{\partial K}^sw)\,ds-\int_K\partial_{x_1}P\Pi_K^{10}w\,dx\tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\forall P\in N_K^{11},\ 2\int_K P\Pi_K^{11}w\,dx=&\int_{\partial K}P[2N_1N_2\Pi_{\partial K}^Nw+(N_1^2-N_2^2)\Pi_{\partial K}^sw]ds\\&-\int_K(\partial_{x_1}P\Pi_K^{01}w+\partial_{x_2}P\Pi_K^{10}w)\,dx\end{aligned}\tag{1.7}$$

$$\forall P\in N_K^{02},\ \int_K P\Pi_K^{02}w\,dx=\int_{\partial K}P(N_2^2\Pi_{\partial K}^Nw+N_1N_2\Pi_{\partial K}^sw)\,ds-\int_K\partial_{x_2}P\Pi_K^{01}w\,dx\tag{1.8}$$

其中$N=(N_1,N_2)^T$是∂K的单位外法向向量。

最后，定义算子Π_τ：$H^2(\Omega)\to L^{2,2}(\Omega)$，对$\forall u\in H^t(\Omega)$，$\Pi_\tau u$由下式确定：

$$(\Pi_\tau u)^{ij}\Big|_K=\Pi_K^{ij}(u|_K)\qquad(i+j\leqslant2,\ K\in K_\tau)\tag{1.9}$$

对于问题(1.2)，令$U_\tau=\Pi_\tau(H^t(\Omega)\cap H_0^2(\Omega))$。这就是拟协调元法。

按照文[1]，我们称$\{U_\tau\}$、$H_0^2(\Omega)$（或$H^2(\Omega)$）具有逼近性，如果对$\forall w\in H_0^2(\Omega)$(或$H^2(\Omega)$)，有

$$\lim_{\tau\to\infty}\ \inf_{v_\tau\in U_\tau}\|Ew-v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}=0$$

我们称$\{U_\tau\}$，$H_0^2(\Omega)$（或$H^2(\Omega)$）通过广义分片检验，如果当$v_\tau\in U_\tau$ $(\tau=1,2,\cdots)$，$\sup\limits_\tau\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}<\infty$时，对$\forall\varphi\in C_0^\infty(R^2)$(或$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$)有$\lim\limits_{\tau\to\infty}T_{i,j}(\varphi,v_\tau)=0$ $(i=0,1,2,\ j=$

1,2)，这里

$$T_{0,1}(\varphi,v_\tau)=\int_\Omega(\partial_{x_1}\varphi v_\tau^{00}+\varphi v_\tau^{10})dx$$

$$T_{0,2}(\varphi,v_\tau)=\int_\Omega(\partial_{x_2}\varphi v_\tau^{00}+\varphi v_\tau^{01})dx$$

$$T_{1,1}(\varphi,v_\tau)=\int_\Omega(\partial_{x_1}\varphi v_\tau^{10}+\varphi v_\tau^{20})dx$$

$$T_{1,2}(\varphi,v_\tau)=\int_\Omega(\partial_{x_2}\varphi v_\tau^{10}+\varphi v_\tau^{11})dx$$

$$T_{2,1}(\varphi,v_\tau)=\int_\Omega(\partial_{x_1}\varphi v_\tau^{01}+\varphi v_\tau^{11})dx$$

$$T_{2,2}(\varphi,v_\tau)=\int_\Omega(\partial_{x_2}\varphi v_\tau^{01}+\varphi v_\tau^{02})dx$$

对(1.3)解的收敛性有如下定理.[1,6]

定理1 设 $a(\cdot,\cdot)$ 是一致正定的，即存在与 τ 无关的正常数 α 使得

$$\forall v_\tau\in U_\tau,\ \alpha\|v_\tau\|^2_{L^{2,2}(\Omega)}\leqslant a(v_\tau,v_\tau) \tag{1.10}$$

对 $\tau=1,2,\cdots$ 一致成立，则对 $\forall f\in(L^{2,2}(\Omega))'$，(1.3)的解 u_τ 在 $\|\cdot\|_{L^{2,2}(\Omega)}$ 意义下收敛于(1.2)的解 Eu_0 的充分必要条件是 $\{U_\tau\}$，$H_0^2(\Omega)$ 具有逼近性和通过广义分片检验.

在第二节中，我们在 $\{U_\tau\}$ 具有相容性的条件下证明紧致性定理，然后证明广义 Poincarè 等不等式，在第三节中，讨论拟协调元空间具有相容性的条件，证明单元秩条件在某些条件下能导出相容性而且有更强的结果. 主要的想法是正规仿射连续族的概念. 第四节讨论逼近性和广义分片检验，给出拟协调元法的收敛定理和精度估计. 最后，第五节给出第三节、第四节中的定理的证明.

二、紧致性定理

设 $\{U_\tau\}$ 是 $L^{2,2}(\Omega)$ 的一列子空间，我们称 $\{U_\tau\}$ 具有相容性，如果存在整数 $r>0$ 和与 K、τ 无关的常数 c 使得：a) 对 $\forall v_\tau\in U_\tau$, $\forall\tau$, $v_\tau^{ij}|_K\in P_r(K)$ 对 $\forall K\in K_\tau$ $(0\leqslant i+j\leqslant 2)$ 成立；b) 下述不等式

$$l=0,1,\ \sum_{i+j=l}|v_\tau^{ij}|_{1,K}\leqslant c\left\{\sum_{m+n=l+1}|v_\tau^{mn}|_{0,K}+h_\tau^{1-l}\sum_{m+n=2}|v_\tau^{mn}|_{0,K}\right\} \tag{2.1}$$

对 $\forall v_\tau\in U_\tau$，$\forall K\in K_\tau$，$\forall\tau$ 一致成立；c) 下述不等式

$$i+j\leqslant 1,\ |(v_\tau^{ij})^{K'}(x)-(v_\tau^{ij})^{K''}(x)|\leqslant c\left\{h_\tau\sup_{K\subset K_\tau(x)}\sup_{y\in\underline{K}}\sum_{m+n=i+j+1}|v_\tau^{mn}(y)|\right.$$
$$\left.+h_\tau^{2-i-j}\sup_{K\subset K_\tau(x)}\sup_{y\in\underline{K}}\sum_{m+n=2}|v_\tau^{mn}(y)|\right\} \tag{2.2}$$

对 $\forall K'$、$K''\in K_\tau(x)$，$\forall x\in\Omega$、$\forall v_\tau\in U_\tau$ 及 $\forall\tau$ 一致成立；这里 $(v_\tau^{ij})^{K'}$、$(v_\tau^{ij})^{K''}$ 分别是 $v_\tau^{ij}|_{\underline{K}'}$、$v_\tau^{ij}|_{\underline{K}''}$ 在 K'、K'' 上的连续延拓，$K_\tau(x)=\{K|x\in K,K\in K_\tau\}$，$\underline{K}'$、$\underline{K}''$、$\underline{K}$ 分别是 K',K'',K 的内点集.

我们知道虽然 U_τ 不必包含在 $EH^2(\Omega)$ 中，但它要逼近 $EH^2(\Omega)$ 或其子空间，所以 U_τ

的元素必然要具有某种与$EH^2(\Omega)$的元素具有的性质类似的较弱的性质。相容性就是刻划这种性质。不等式(2.1)着眼于元素各分量间的关系，不等式(2.2)着眼于元素通过内部边界的连续性。当U_τ是非协调元空间时，[7]中的弱间断性和[8]中的弱连续性均能导出相容性。关于相容性成立的条件将在下节讨论。现在我们建立紧致性定理。

定理2 如果$\{U_\tau\}$具有相容性，则下述两结论为真：

1) 若$v_\tau\in U_\tau$ ($\tau=1,2\cdots$)，在$L^{2,2}(\Omega)$意义下弱收敛于0，则有 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\sum\limits_{i+j<1}\|v_\tau^{ij}\|_{L^2(\Omega)}=0$；

2) 若$\{U_\tau\}$、$H^2(\Omega)$(或$H_0^2(\Omega)$)具有逼近性且通过广义分片检验，则对任意在$L^{2,2}(\Omega)$中有界的序列$\{v_\tau\}$，$v_\tau\in U_\tau$，存在$\{v_\tau\}$的子列$\{v_{\tau'}\}$和$v_0\in H^2(\Omega)$（或$H_0^2(\Omega)$）使得$v_{\tau'}$弱收敛于Ev_0，且$\lim\limits_{\tau'\to\infty}\sum\limits_{i+j<1}\|v_{\tau'}^{ij}-(Ev_0)^{ij}\|_{L^2(\Omega)}=0$。

这个定理是Rellich紧致性定理在多套函数空间U_τ上的推广，也是[8]的工作的推广。它的证明完全平行于[8]的方法。因而从略。同样用[8]的方法也可得下面的定理。

定理3 如果$\{U_\tau\}$具有相容性，则下述结论为真：

1) 若$\{U_\tau\}$，$H_0^2(\Omega)$具有逼近性且通过广义分片检验，则存在常数c、γ使得广义Poincarè-Friedrichs不等式

$$\|v_\tau\|^2_{L^{2,2}(\Omega)}\leqslant c\sum_{i+j=2}\|v_\tau^{ij}\|^2_{L^2(\Omega)}\qquad(\forall v_\tau\in U_\tau)\tag{2.3}$$

对$\tau\geqslant\gamma$一致成立；

2) 若$\{U_\tau\}$、$H^2(\Omega)$具有逼近性且通过广义分片检验，则存在常数c、γ使得广义Poincarè不等式

$$\|v_\tau\|^2_{L^{2,2}(\Omega)}\leqslant c\left\{\sum_{i+j=2}\|v_\tau^{ij}\|^2_{L^2(\Omega)}+\sum_{i+j<1}\left(\int_\Omega v_\tau^{ij}dx\right)^2\right\}\tag{2.4}$$

及广义Friedrichs不等式

$$\|v_\tau\|^2_{L^{2,2}(\Omega)}\leqslant c\left\{\sum_{i+j=2}\|v_\tau^{ij}\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_{\partial\Omega}|v_\tau^{00}|^2ds\right\}\tag{2.5}$$

对$\forall v_\tau\in U_\tau$，$\forall\tau\geqslant\gamma$一致成立。

三、单元秩条件

从现在起，我们一直取U_τ是用拟协调元法构造的（见第一节）。本节讨论$\{U_\tau\}$具有相容性的条件。我们从单元秩条件和正规仿射连续族的定义出发。

单元秩条件 称$\{U_\tau\}$满足单元秩条件，如果对$\forall w\in H^4(K)$，$\forall K\in K_\tau$ ($\tau=1,2,\cdots$)，从$\Pi_K^{20}w=\Pi_K^{11}w=\Pi_K^{02}w=0$能推出$\Pi_K^{10}w$、$\Pi_K^{01}w\in P_0(K)$、$\Pi_K^{00}w\in P_1(K)$，且$\Pi_{\partial K}w-\Pi_K^{00}w|_{\partial K}=\Pi_{\partial K}^s w-\dfrac{\partial}{\partial s}\Pi_K^{00}w|_{\partial K}=\Pi_{\partial K}^N w-\dfrac{\partial}{\partial N}\Pi_K^{00}w|_{\partial K}=0$。

单元秩条件的物理意义是“零能模式只能是刚体位移”，它的验证是检验一个矩阵的秩，所以才称为单元秩条件。

现在要对算子Π_K^{00}、$\Pi_{\partial K}$等多讨论一些。对任意单元K，设存在$H^4(K)$上的线性独立

的连续线性泛函 $\phi_{1,K}$, $\phi_{2,K}$, …, $\phi_{M,K}$, 及一组多项式 $G_{1,K},\cdots,G_{M,K}$ 和空间 $\{g|g\in L^2(\partial K)$, 当 F 是 K 的一边时, $g|_F$ 是 F 上的多项式$\}$ 中的一组函数 $g_{j,K}$、$g^s_{j,K}$、$g^N_{j,K}$, $1\leqslant j\leqslant M$, 使得对 $\forall w\in H^t(K)$, 有

$$\left.\begin{aligned}\Pi^{00}_K w&=\sum_{j=1}^{M}\phi_{j,K}(w)G_{j,K}\\ \Pi_{\partial K}w&=\sum_{j=1}^{M}\phi_{j,K}(w)g_{j,K}\\ \Pi^s_{\partial K}w&=\sum_{j=1}^{M}\phi_{j,K}(w)g^s_{j,K}\\ \Pi^N_{\partial K}w&=\sum_{j=1}^{M}\phi_{j,K}(w)g^N_{j,K}\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

而且当 $\Pi^{00}_K w=0$、$\Pi_{\partial K}w=\Pi^s_{\partial K}w=\Pi^N_{\partial K}w=0$ 时 $\phi_{j,K}(w)=0, 1\leqslant j\leqslant M$. 我们称 $\phi_{j,K}$ 是 Π^{00}_K、$\Pi_{\partial K}$、$\Pi^s_{\partial K}$、$\Pi^N_{\partial K}$ 的参数.

我们选定一个固定的参照单元 $\hat{K}$ (三角形或矩形). 对所有的单元 K, 都存在仿射变换 $F_K\hat{x}=B_K\hat{x}+b_K$, 这里 B_K 是 2×2 非奇异阵, $b_K\in R^2$, 使得 $K=F_K\hat{K}$. 于是对任意定义在 K (或 ∂K) 上的函数 w, 记

$$\hat{w}(\hat{x})=w(F_K\hat{x})\qquad(\forall\hat{x}\in\hat{K}(\text{或}\partial\hat{K}))\tag{3.2}$$

对线性泛函 $\phi_{j,K}$, 我们定义一个 $H^t(\hat{K})$ 上的线性泛函 $\hat{\phi}_{j,K}$ 如下:

$$\forall\hat{w}\in H^t(\hat{K}),\ \hat{\phi}_{j,K}(\hat{w})=\phi_{j,K}(w)\tag{3.3}$$

其中 $\hat{w}$、w 按(3.2)式的方式对应.

我们称算子族$\{\Pi^{00}_K,\Pi_{\partial K},\Pi^s_{\partial K},\Pi^N_{\partial K}\}=\{(\Pi^{00}_K,\Pi_{\partial K},\Pi^s_{\partial K},\Pi^N_{\partial K})|K\in K_\tau,\tau=1,2,\cdots\}$是正规仿射连续族, 如果(i)若对一列单元$\{K_m\}_{m=0}^{\infty}$有 B_{K_m} 在矩阵范数意义下收敛于 B_{K_0}, 则对 $j=1,\cdots,M$, $\hat{\phi}_{j,K_m}$ 在 $H^t(\hat{K})$ 的对偶空间的范数下收敛 $\hat{\phi}_{j,K_0}$. $\hat{G}_{j,K_m}$ 一致收敛于 $\hat{G}_{j,K_0}$, $\hat{g}_{j,K_m}$、$\hat{g}^s_{j,K_m}$ 和 $\hat{g}^N_{j,K_m}$ 分别在 $L^2(\partial\hat{K})$ 意义下收敛于 $\hat{g}_{j,K_0}$、$\hat{g}_{j,K_0}$ 和 $\hat{g}^N_{j,K_0}$; (ii)对任意单元 K 和常数 θ, 记 $\tilde{K}=\{\tilde{x}|\tilde{x}=\theta x,\forall x\in K\}$, 对任意定义在 K (或 ∂K) 上的函数 w, 记 $\tilde{w}(\tilde{x})=w(\theta^{-1}\tilde{x}), \tilde{x}\in\tilde{K}$ (或 $\partial\tilde{K}$), 则有 $(\Pi^{00}_K w)(x)=(\Pi^{00}_{\tilde{K}}\tilde{w})(\theta x)$, $(\Pi_{\partial K}w)(x)=(\Pi_{\partial\tilde{K}}\tilde{w})(\theta x)$, $(\Pi^s_{\partial K}w)(x)=\theta\,(\Pi^s_{\partial\tilde{K}}\tilde{w})(\theta x)$, $(\Pi^N_{\partial K}w)(x)=\theta\,(\Pi^N_{\partial\tilde{K}}\tilde{w})(\theta x)$, $x\in K$(或∂K), $w\in H^t(K)$.

如果插值算子 Π^{00}_K、$\Pi_{\partial K}$、$\Pi^s_{\partial K}$、$\Pi^N_{\partial K}$ 只用插值点的函数和其导数值以及函数和导数的某种积分平均值作为参数, 而插值点在 K 上的相对位置是仿射不变的, 则$\{\Pi^{00}_K,\Pi_{\partial K},\Pi^s_{\partial K},\Pi^N_{\partial K}\}$就是正规仿射连续族. 这说明常用的插值算子都是正规仿射连续族. 不难看出这是仿射族[9]的推广.

我们称$\{N^{ij}_K\}=\{N^{ij}_K|K\in K_\tau,\tau=1,2,\cdots\}$是正规仿射连续的, 如果(i)对任意单元 K, 存在 N^{ij}_K 的一组基 $P_{l,K}(1\leqslant l\leqslant L_{ij})$, 使得当 $B_{K_m}\to B_{K_0}$ 时有 $\hat{P}_{l,K_m}$ 一致收敛于 $\hat{P}_{l,K_0}$($1\leqslant l\leqslant L_{ij}$); (ii)对任意单元 K 和常数 θ, 若记 $\tilde{K}=\{\tilde{x}|\tilde{x}=\theta x,\forall x\in K\}$, 则 $P_{l,K}(x)=P_{l,\tilde{K}}(\theta x)$, $(\forall x\in K,\ 1\leqslant l\leqslant L_{ij})$.

$\{N_K^{ij}\}$是正规仿射连续的一个特殊情形就是它是仿射的，即存在$\hat{N}_{\hat{K}}^{ij}$使得对任意单元K，$N_K^{ij}=\{P|P(x)=\hat{P}(F_K^{-1}x),\forall\hat{P}\in N_{\hat{K}}^{ij}\}$。

我们称$\{U_\tau\}$具有强连续性，如果对单元K的每边F，存在定义在F上的多项式空间上的线性泛函q_F、q_F^s、q_F^N，它们具有性质：$q_F(1)q_F^s(1)q_F^N(1)\neq 0$，且$\{q_F\}=\{q_F|F\subset\partial K,K\in K_\tau,\forall\tau\}$、$\{q_F^s\}=\{q_F^s|F\subset\partial K,K\in K_\tau,\forall\tau\}$和$\{q_F^N\}=\{q_F^N|F\subset\partial K,K\in K_\tau,\forall\tau\}$分别是仿射族，使得当$F=K\cap K'$是一边时，对$\forall w\in H^4(\Omega)$，$q_F(\Pi_{\partial K}w|_F)=q_F(\Pi_{\partial K'}w|_F)$、$q_F^s(\Pi_{\partial K}^s w|_F)=-q_F^s(\Pi_{\partial K'}^{s'}w|_F)$、$q_F^N(\Pi_{\partial K}^N w|_F)=-q_F^N(\Pi_{\partial K'}^{N'}w|_F)$，当$F=K\cap\partial\Omega$时，对$\forall w\in H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$，$q_F(\Pi_{\partial K}w|_F)=q_F^s(\Pi_{\partial K}^s w|_F)=q_F^N(\Pi_{\partial K}^N w|_F)=0$。我们称$\{q_F\}$是仿射族，是指若$F=F_K\hat{F}$，则对任意$F$上的多项式$P$，有$q_F(P)=q_{\hat{F}}(\hat{P})$，其它的相同。

如果对$\forall w\in H^4(K)$，$\Pi_{\partial K}w|_F$用到w在F的一个函数插值点，$\Pi_{\partial K}^s w|_F$、$\Pi_{\partial K}^N w|_F$分别用到切向导数；法向导数插值点则$\{U_\tau\}$具有强连续性；如果$\Pi_{\partial K}w|_F$用到w在F的函数插值点，而$\Pi_{\partial K}^s w|_F$、$\Pi_{\partial K}^N w|_F$在F上的积分平均值由w在F上的参数唯一确定，则$\{U_\tau\}$也具有强连续性；也就是说常用的空间$\{U_\tau\}$都具有强连续性。

有了以上几个概念，我们可以给出相容性成立的条件。

定理4 设下述三个条件成立：

1) $\{\Pi_K^{00},\Pi_{\partial K},\Pi_{\partial K}^s,\Pi_{\partial K}^N\}$是正规仿射连续族，且对$\forall P\in P_1(K)$，$\Pi_K^{00}P=P$，$\Pi_{\partial K}P=P|_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^s P=\frac{\partial P}{\partial s}|_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^N P=\frac{\partial P}{\partial N}|_{\partial K}$；

2) $\{N_K^{ij}\}$是正规仿射连续的，且N_K^{ij}包含常数空间$(0<i+j\leqslant 2)$；

3) $\{U_\tau\}$具有强连续性。

则由单元秩条件成立可以断言$\{U_\tau\}$具有相容性，并且存在与F、K、τ无关的常数c使得不等式

$$l=0,1,\quad \sum_{i+j=l}|\Pi_K^{ij}w|_{2-l,K}\leqslant c\sum_{m+n=2}|\Pi_K^{mn}w|_{0,K} \tag{3.4}$$

$$|\partial_{x_1}\Pi_K^{00}w-\Pi_K^{10}w|_{0,K}+|\partial_{x_2}\Pi_K^{00}w-\Pi_K^{01}w|_{0,K}\leqslant c\,h_\tau\sum_{i+j=2}|\Pi_K^{ij}w|_{0,K} \tag{3.5}$$

$$|\Pi_K^{00}w-\Pi_{\partial K}w|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{\frac{3}{2}}\sum_{m+n=2}|\Pi_K^{mn}w|_{0,K} \tag{3.6}$$

$$|\Pi_{\partial K}^s w-\frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^{00}w|_{0,\partial K}+|\Pi_{\partial K}^N w-\frac{\partial}{\partial N}\Pi_K^{00}w|_{0,\partial K}\leqslant c\,h_\tau^{\frac{1}{2}}\sum_{m+n=2}|\Pi_K^{mn}w|_{0,K} \tag{3.7}$$

对$\forall w\in H^4(K)$，$\forall K\in K_\tau$，$\forall\tau$一致成立；而且当$F=K\cap K'$是一边时不等式

$$|\Pi_{\partial K}w-\Pi_{\partial K'}w|_{0,F}\leqslant c\,h_\tau^{\frac{3}{2}}\sum_{m+n=2}\left[\,|\Pi_K^{mn}w|_{0,K}+|\Pi_{K'}^{mn}w|_{0,K'}\right) \tag{3.8}$$

$$|\Pi_{\partial K}^s w-\Pi_{\partial K'}^{s'}w|_{0,F}+|\Pi_{\partial K}^N w-\Pi_{\partial K'}^{N'}w|_{0,F}\leqslant ch_\tau^{\frac{1}{2}}\sum_{m+n=2}\left(|\Pi_K^{mn}w|_{0,K}+|\Pi_{K'}^{mn}w|_{0,K'}\right) \tag{3.9}$$

对$\forall w\in H^4(\Omega)$成立，当$F=K\cap\partial\Omega$是一边时不等式

$$|\Pi_{\partial K}w|_{0,F}\leqslant ch_\tau^{\frac{3}{2}}\sum_{m+n=2}|\Pi_K^{mn}w|_{0,K} \tag{3.10}$$

$$|\Pi_{\partial K}^{s}w|_{0,F}+|\Pi_{\partial K}^{N}w|_{0,F}\leqslant ch_\tau^{\frac{1}{2}}\sum_{m+n=2}|\Pi_K^{mn}w|_{0,K} \tag{3.11}$$

对$\forall w\in H^t(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$成立。

因为这个定理的三个条件是不苛刻的而且常用的单元是满足这些条件的，所以可用单元秩条件取代相容性条件。至于单元秩条件的验证可归结为一个矩阵的秩的检验。

对$\forall w\in H^t(K)$，在$N_K^{ij}(i+j=2)$中选取一组基，记$\Pi_K^{ij}w$在这组基下的坐标为$\beta_K^{ij}(w)$，令

$$\beta_K(w)=((\beta_K^{20}(w))^T,(\beta_K^{11}(w))^T,(\beta_K^{02}(w))^T)^T \tag{3.12}$$

$$\phi_K(w)=(\phi_{1,K}(w),\phi_{2,K}(w),\cdots,\phi_{m,K}(w))^T \tag{3.13}$$

$$L=L_{20}+L_{11}+L_{02}$$

其中L_{ij}是$\beta_K^{ij}(w)$的维数，则(3.6)～(3.8)可写成

$$A_K\beta_K(w)=Q_K\phi_K(w) \tag{3.14}$$

其中A_K是$L\times L$非奇异阵，Q_K是$L\times M$矩阵。

定理5 设N_K^{10}、N_K^{01}包含常数空间，且对$\forall P\in P_1(K)$，$\Pi_K^{00}P=P$，$\Pi_{\partial K}P=P|_{\partial K}$、$\Pi_{\partial K}^{s}P=\frac{\partial P}{\partial s}|_{\partial K}$、$\Pi_{\partial K}^{N}P=\frac{\partial P}{\partial N}|_{\partial K}$。则单元秩条件成立等价于$Q_K$的秩是$M-3$。

四、拟协调元收敛的条件

上一节我们解决了相容性的问题。现在我们讨论逼近性和广义分片检验。首先将仿射族的逼近性结果[9]推广到正规仿射连续族。

定理6 设$\{\Pi_K^{00},\Pi_{\partial K},\Pi_{\partial K}^{s},\Pi_{\partial K}^{N}\}$是正规仿射连续族，$\{N_K^{ij}\}$是正规仿射连续的，$0<i+j\leqslant 2$。如果存在整数$r_i\geqslant 2$ $(1\leqslant i\leqslant 5)$，使得$\Pi_K^{00}:H^{r_1+1}(K)\to H^m(K)\,(0\leqslant m\leqslant r_1+1)$、$\Pi_{\partial K}:H^{r_2+1}(K)\to L^2(\partial K)$、$\Pi_{\partial K}^{s}:H^{r_3+1}(K)\to L^2(\partial K)$、$\Pi_{\partial K}^{N}:H^{r_4+1}(K)\to L^2(\partial K)$是连续的，且对$\forall P\in P_{r_1}(K)$有$\Pi_K^{00}P=P$，对$\forall P\in P_{r_2}(K)$有$\Pi_{\partial K}P=P|_{\partial K}$，对$\forall P\in P_{r_3}(K)$有$\Pi_{\partial K}^{s}P=\frac{\partial P}{\partial s}|_{\partial K}$，对$\forall P\in P_{r_4}(K)$有$\Pi_{\partial K}^{N}P=\frac{\partial P}{\partial N}|_{\partial K}$，并且$P_{r_5-(i+j)}(K)\subset N_K^{ij}(0<i+j\leqslant 2)$，则存在与$K$、$\tau$无关的常数$c>0$使得

$$0\leqslant l\leqslant m,\ |w-\Pi_K^{00}w|_{l,K}\leqslant ch_\tau^{r_1+1-l}|w|_{r_1+1,K} \tag{4.1}$$

$$|w-\Pi_{\partial K}w|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{r_2+\frac{1}{2}}|w|_{r_2+1,K} \tag{4.2}$$

$$\left|\frac{\partial w}{\partial s}-\Pi_{\partial K}^{s}w\right|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{r_3-\frac{1}{2}}|w|_{r_3+1,K} \tag{4.3}$$

$$\left|\frac{\partial w}{\partial N}-\Pi_{\partial K}^{N}w\right|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{r_4-\frac{1}{2}}|w|_{r_4+1,K} \tag{4.4}$$

对$\forall w\in H^r(K)$，$\forall K\in K_\tau$，$\tau=1,2,\cdots$一致成立，且

$$\|Eu-\Pi_\tau u\|_{L^{2,2}(\Omega)}\leqslant c\sum_{i=1}^{5}h_\tau^{r_i-1}|u|_{r_i+1,\Omega} \tag{4.5}$$

对$\forall u\in H^r(\Omega)\cap H^t(\Omega)$，$\forall\tau=1,2,\cdots$一致成立。这里$r=\max\limits_{1\leq i\leq 5}\{r_i+1\}$。

由于在这个定理条件下$\{U_\tau\}$具有逼近性，而且这些条件相当地宽，所以我们从现在起，把用拟协调元方法构造的$\{U_\tau\}$满足定理6的条件称为具有逼近性。

虽然在能量泛函一致正定和$\{U_\tau\}$具有逼近性的条件下，通过广义分片检验是收敛的充要条件，但它的验证是相当不易的，下面我们给出一个较易验证的条件——检验IPT。

检验 IPT：对$\forall K\in K_\tau$，存在插值算子$\tilde{\Pi}^s_{\partial K}$、$\tilde{\Pi}^N_{\partial K}$使得$\{\Pi^{00}_K, \Pi_{\partial K}, \tilde{\Pi}^s_{\partial K}, \tilde{\Pi}^N_{\partial K}\}$也是正规仿射连续族，而且$\Pi^{00}_K$、$\Pi_{\partial K}$、$\tilde{\Pi}^s_{\partial K}$、$\tilde{\Pi}^N_{\partial K}$的参数是$\Pi^{00}_K$、$\Pi_{\partial K}$、$\Pi^s_{\partial K}$、$\Pi^N_{\partial K}$的参数的线性组合，且对$\forall P\in P_1(K)$，$\tilde{\Pi}^s_{\partial K}P=\left.\dfrac{\partial P}{\partial s}\right|_{\partial K}$，$\tilde{\Pi}^N_{\partial K}P=\left.\dfrac{\partial P}{\partial N}\right|_{\partial K}$。如果存在$r_6\geq 2$使得下述两条件成立：

a)、对$\forall u\in H^t(\Omega)\cap H^2_0(\Omega)$，当$F=K\cap K'$是一边时有

$$\forall P\in P_{r_6-2}(F),\quad \int_F P\begin{bmatrix}\tilde{\Pi}^s_{\partial K}u\\ \tilde{\Pi}^N_{\partial K}u\end{bmatrix}ds=-\int_F P\begin{bmatrix}\tilde{\Pi}^{s'}_{\partial K'}u\\ \tilde{\Pi}^{N'}_{\partial K'}u\end{bmatrix}ds \tag{4.6}$$

当$F=K\cap\partial\Omega$是一边时有

$$\forall P\in P_{r_6-2}(F),\quad \int_F P\tilde{\Pi}^s_{\partial K}u\,ds=\int_F P\tilde{\Pi}^N_{\partial K}u\,ds=0 \tag{4.7}$$

b)、对$\forall w\in H^t(K)$，$\forall K\in K_\tau$ $(\tau=1,2,\cdots)$ 有

$$\forall P\in P_{r_6-2}(K),\ \int_{\partial K}P\begin{bmatrix}N_1^2(\Pi^N_{\partial K}-\tilde{\Pi}^N_{\partial K})w-N_1N_2(\Pi^s_{\partial K}-\tilde{\Pi}^s_{\partial K})w\\ 2N_1N_2(\Pi^N_{\partial K}-\tilde{\Pi}^N_{\partial K})w+(N_1^2-N_2^2)(\Pi^s_{\partial K}-\tilde{\Pi}^s_{\partial K})w\\ N_2^2(\Pi^N_{\partial K}-\tilde{\Pi}^N_{\partial K})w+N_1N_2(\Pi^s_{\partial K}-\tilde{\Pi}^s_{\partial K})w\end{bmatrix}ds=0 \tag{4.8}$$

则称$\{U_\tau\}$通过检验IPT。

定理 7 如果$\{U_\tau\}$具有逼近性和强连续性，满足单元秩条件及通过检验IPT，则对任意$f\in(L^{2,2}(\Omega))'$，问题(1.3)的解收敛于(1.2)的解：$\lim\limits_{\tau\to\infty}\|Eu_0-u_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}=0$。

定理 8 设$\{U_\tau\}$具有逼近性和强连续性，满足单元秩条件且通过检验IPT，如果当$F=K\cap K'$是一边时，对$\forall u\in H^t(\Omega)$，有

$$\forall P\in P_{r_6-3}(F),\quad \int_F\Pi_{\partial K}uP\,ds=\int_F\Pi_{\partial K'}uP\,ds \tag{4.9}$$

成立，当$F=K\cap\partial\Omega$时，对$\forall u\in H^t(\Omega)\cap H^2_0(\Omega)$有

$$\forall P\in P_{r_6-3}(F),\quad \int_F P\Pi_{\partial K}u\,ds=0 \tag{4.10}$$

成立，则存在与u_0、τ无关的常数c使得当取$f(v)=\int_\Omega fv^{00}dx$，$f\in L^2(\Omega)$时，若$u_0\in H^r(\Omega)\cap H^2_0(\Omega)$，则

$$\|Eu_0-u_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}\leq c\left\{\sum_{i=1}^{6}h_\tau^{r_i-1}|u_0|_{r_i+1,\Omega}+h_\tau^{r_6-1}|u_0|_{r',\Omega}\right\} \tag{4.11}$$

对$\forall\tau=1,2,\cdots$一致成立。这里$r'=\max\{r_6+1,\ 4\}$，$P_{-1}(F)=\{0\}$，$r=\max\limits_{1\leq i\leq 6}\{r_i+1,4\}$；如

果对 $\forall K\in K_\tau$, $\forall\tau$, $\Pi_{\partial K}w=\Pi_K^{00}w|_{\partial K}$, $\forall w\in H^t(K)$ 且对 $\forall u\in H^t(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$, $(\Pi_\tau u)^{00}\in\{v|v\in C(\bar\Omega),\ v|_{\partial\Omega}=0\}$, 则 $r'=r_6+1$, $r=\max\limits_{1\le i\le 6}\{r_i+1\}$。

不难验论 6 参、9 参、12参、15参、18参和21 参拟协调元是满足定理 7 的条件的[1-5]，这样就证明了用它们解板弯曲问题是收敛的。表 1 给出了它们的收敛精度。

表 1

元	$\|Eu_0-u_\tau\|_{L^2,2(\Omega)}$	正则性要求	元	$\|Eu_0-u_\tau\|_{L^2,2(\Omega)}$	正则性要求
6参拟协调元	$O(h_\tau)$	$u_0\in H^4(\Omega)$	15参拟协调元	$O(h_\tau^2)$	$u_0\in H^4(\Omega)$
9参拟协调元	$O(h_\tau)$	$u_0\in H^3(\Omega)$	18参拟协调元	$O(h_\tau^3)$	$u_0\in H^5(\Omega)$
12参拟协调元	$O(h_\tau^2)$	$u_0\in H^4(\Omega)$	21参拟协调元	$O(h_\tau^4)$	$u_0\in H^6(\Omega)$

五、各定理的证明

现在给出第三节和第四节中各定理的证明。首先我们建立一个引理。

引理 1 设 $\{\Pi_K^{00},\ \Pi_{\partial K},\ \Pi_{\partial K}^s,\ \Pi_{\partial K}^N\}$是正规仿射连续族，$\{N_K^{ij}\}$是正规仿射连续的。则对一列单元 $\{K_m\}_{m=0}^\infty$和$w_m\in H^t(K_m)$ $(m=0,1,\cdots)$ 如果 $\lim\limits_{m\to\infty}\|\phi_{K_m}(w_m)-\phi_{K_0}(w_0)\|=\lim\limits_{m\to\infty}\|B_{K_m}-B_{K_0}\|=0$，我们可以断言对 $0\leqslant i+j\leqslant 2$, $(\Pi_{K_m}^{ij}w_m)(F_{K_m}\hat x)$一致收敛于 $(\Pi_{K_0}^{ij}w_0)(F_{K_0}\hat x)$。这里$\|\cdot\|$分别是向量的欧几里得范数和矩阵与之相应的范数。

证明 由于$\{\Pi_K^{00},\ \Pi_{\partial K},\ \Pi_{\partial K}^s,\ \Pi_{\partial K}^N\}$是正规仿射连续的，所以 $i+j=0$ 的情形时引理的结论是显然的。对 $m=0,1,\cdots$，在(1.4) 中做坐标变换 $x=B_{K_m}\hat x+b_{K_m}$，利用导数链法则和下述等式

$$dx=|\det B_{K_m}|d\hat x,\ ds=|\det B_{K_m}|\|B_{K_m}^{-1}\hat N\|d\hat s,\quad N=\frac{B_{K_m}^{-1}\hat N}{\|B_{K_m}^{-1}\hat N\|}\tag{5.1}$$

我们可得：

$$\begin{aligned}1\leqslant l\leqslant L_{10},\ &\int_{\hat K}\hat P_{l,K_m}(\Pi_{K_m}^{10}w_m)(F_{K_m}\hat x)|\det B_{K_m}|d\hat x\\&=\int_{\partial\hat K}\hat P_{l,K_m}(\Pi_{\partial K_m}w_m)(F_{K_m}\hat x)(B_{K_m}^{-1}\hat N)_1|\det B_{K_m}|d\hat s\\&\quad-\int_{\hat K}\Big(\sum_{j=1}^2 b_{K_m}^{1j}\partial_{\hat x_j}\hat P_{l,K_m}\Big)(\Pi_{K_m}^{00}w_m)(F_{K_m}\hat x)|\det B_{K_m}|d\hat x\end{aligned}\tag{5.2}$$

其中 $B_{K_m}^{-1}=(b_{K_m}^{ij})_{2\times 2}$.

如果记$\Pi_{K_m}^{10}w_m=\sum_{l=1}^{L_{10}}\beta_{l,m}P_{l,K_m}$, $A_m^{lj}=\int_{\hat K}\hat P_{l,K_m}\hat P_{j,K_m}|\det B_{K_m}|d\hat x$, R_m^l 是 (5.2) 式的右端项，$1\leqslant l,\ j\leqslant L_{10}$，令

$$A_m=(A_m^{lj})_{L_{10}\times L_{10}},\ \beta_m=(\beta_{l,m})_{L_{10}\times 1},\ R_m=(R_m^l)_{L_{10}\times 1}$$

则(5.2)可化成下述等式

$$A_m\beta_m=R_m$$

由于$\{\Pi_K^{00},\ \Pi_{\partial K},\ \Pi_{\partial K}^S,\ \Pi_{\partial K}^N\}$是正规仿射连继族，$\{N_K^{10}\}$是正规仿射连续的，所以由引理的假

设，当$m\to\infty$时，$A_m\to A_0$，$R_m\to R_0$，而A_0非奇异，所以$\beta_m\to\beta_0$。由此立刻导出$(\Pi_{K_m}^{10}w_m)(F_m\hat{x})$一致收敛于$(\Pi_{K_0}^{10}w_0)(F_{K_0}\hat{x})$。类似地可以证明其它情形。引理得证。

定理 4 的证明：证明较长分几步进行。

a)、对$\forall\xi>0$，我们证明如果集$J_\xi=\{K|K$是与$\hat{K}$同面积的三角形（或平行四边形），$h_K\leqslant\xi\}$非空，则存在与ξ有关的常数，使得

$$l=0,1,\ \sum_{i+j=l}|\Pi_K^{ij}w|_{2-l,K}\leqslant c(\xi)\sum_{m+n=2}|\Pi_K^{mn}w|_{0,K} \tag{5.3}$$

$$|\partial_{x_1}\Pi_K^{00}w-\Pi_K^{10}w|_{0,K}+|\partial_{x_2}\Pi_K^{00}w-\Pi_K^{01}w|_{0,K}\leqslant c(\xi)\sum_{m+n=2}|\Pi_K^{mn}w|_{0,K} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}&|\Pi_K^{00}w-\Pi_{\partial K}w|_{0,\partial K}+\left|\frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^{00}w-\Pi_{\partial K}^s w\right|_{0,\partial K}\\&\quad+|\Pi_{\partial K}^N w-\frac{\partial}{\partial N}\Pi_K^{00}w|_{0,\partial K}\leqslant c(\xi)\sum_{m+n=2}|\Pi_K^{mn}w|_{0,K}\end{aligned} \tag{5.5}$$

对$\forall w\in H^t(K)$、$\forall K\in J_\xi$一致成立。为此我们假设上述结论不真，则对于$m=1,2,\cdots$，存在$K_m\in J_\xi$和$w_m\in H^t(K_m)$，使得

$$\begin{aligned}&|\Pi_{K_m}^{00}w_m|_{2,K_m}+\sum_{i+j=1}|\Pi_{K_m}^{ij}w_m|_{1,K_m}+|\partial_{x_1}\Pi_{K_m}^{00}w_m-\Pi_{K_m}^{10}w_m|_{0,K_m}\\&+|\partial_{x_2}\Pi_{K_m}^{00}w_m-\Pi_{K_m}^{01}w_m|_{0,K_m}+|\Pi_{K_m}^{00}w_m-\Pi_{\partial K_m}w_m|_{0,\partial K_m}\\&+|\Pi_{\partial K_m}^s w_m-\frac{\partial}{\partial s}\Pi_{K_m}^{00}w_m|_{0,\partial K_m}+|\Pi_{\partial K_m}^N w_m-\frac{\partial}{\partial N}\Pi_{K_m}^{00}w_m|_{0,\partial K_m}\\&\quad>m\sum_{i+j=2}|\Pi_{K_m}^{ij}w_m|_{0,K_m}\end{aligned} \tag{5.6}$$

成立。由于对$P\in P_1(K_m)$、$\Pi_{K_m}^{00}P=P$，$\Pi_{K_m}^{10}P=\partial_{x_1}P$，$\Pi_{K_m}^{01}P=\partial_{x_2}P$，$\Pi_{\partial K_m}P=P|_{\partial K_m}$，$\Pi_{\partial K_m}^s P=\left.\frac{\partial P}{\partial s}\right|_{\partial K_m}$，$\Pi_{\partial K_m}^N P=\left.\frac{\partial P}{\partial N}\right|_{\partial K_m}$，$\Pi_{K_m}^{20}P=\Pi_{K_m}^{11}P=\Pi_{K_m}^{02}P=0$，且这些算子都是线性算子，我们可设对$m=1,2,\cdots$有

$$\|\phi_{K_m}(w_m)\|=1,\ \phi_{K_m}(w_m)\perp\phi_{K_m}(P)\qquad(\forall P\in P_1(K_m)) \tag{5.7}$$

由于$\{K_m\}\subset J_\xi$，由文[9]可知$\{B_{K_m}\}$是有界集，所以存在$\{\phi_{K_m}(w_m)\}$、$\{B_{K_m}\}$的子列（仍记为$\{\phi_{K_m}(w_m)\}$、$\{B_{K_m}\}$）及单元K_0和$w_0\in H^t(K_0)$满足

$$\lim_{m\to\infty}\|\phi_{K_m}(w_m)-\phi_{K_0}(w_0)\|=\lim_{m\to\infty}\|B_{K_m}-B_{K_0}\|=0,\ \|\phi_{K_0}(w_0)\|=1 \tag{5.8}$$

因为$B_{K_m}\to B_{K_0}$，所以$\hat{\phi}_{j,K_m}\to\hat{\phi}_{j,K_0}$。故对$j=1,\cdots,M$有$\lim\limits_{m\to\infty}\hat{\phi}_{j,K_m}(1)=\hat{\phi}_{j,K_0}(1)$，

$\lim\limits_{m\to\infty}\hat{\phi}_{j,K_m}\left(\sum_{l=1}^{2}(B_{K_m}\hat{x})_i\right)=\hat{\phi}_{j,K_0}\left(\sum_{l=1}^{2}(B_{K_0}\hat{x})_i\right)(i=1,2)$这里$B_{K_m}=(b_{K_m}^{ij})_{2\times2}$。从而由(5.7)可得

$$\phi_{K_0}(w_0)\perp\phi_{K_0}(P)\qquad(\forall P\in P_1(K_0)) \tag{5.9}$$

另一方面，由$\{\Pi_K^{00},\Pi_{\partial K},\Pi_{\partial K}^s,\Pi_{\partial K}^N\}$是正规仿射连续族的事实和引理1可知(5.6)

的左端是一致有界的，所以$\lim_{m\to\infty}\sum_{i+j=2}|\Pi^{ij}_{K_m} w_m|_{0,K_m}=0$，即 $(\Pi^{ij}_{K_m} w_m)(F_{K_m}\hat{x})$ 一致收敛于 0，$i+j=2$。再用引理 1 得

$$\Pi^{ij}_{K_0} w_0=0 \qquad (i+j=2) \tag{5.10}$$

由单元秩条件得$\Pi^{10}_{K_0} w_0$、$\Pi^{01}_{K_0} w_0\in P_0(K_0)$，$\Pi^{00}_{K_0} w_0\in P_1(K_0)$，$\Pi_{\partial K_0}w_0-\Pi^{00}_{K_0} w_0|_{\partial K_0}=0$，$\Pi^{s}_{\partial K_0} w_0-\frac{\partial}{\partial s}\Pi^{00}_{K_0} w_0|_{\partial K_0}=\Pi^{N}_{\partial K_0} w_0-\frac{\partial}{\partial N}\Pi^{00}_{K_0} w_0|_{\partial K_0}=0$，即若令$P_0=\Pi^{00}_{K_0}w_0$，则有$\Pi^{00}_{K_0}w_0=\Pi^{00}_{K_0}P_0$，$\Pi_{\partial K_0}w_0-\Pi_{\partial K_0}P_0=\Pi^{s}_{\partial K_0}w_0-\Pi^{s}_{\partial K_0}P_0=\Pi^{N}_{\partial K_0}w_0-\Pi^{N}_{\partial K_0}P_0=0$。于是得$\phi_{K_0}(w_0)=\phi_{K_0}(P_0)$。再由(5.9)得 $\phi_{K_0}(w_0)=0$，这与$\|\phi_{K_0}(w_0)\|=1$矛盾。所以(5.3)～(5.5) 成立。

b)、对$\forall K\in K_\tau$，记 $\theta_K=(\hat{K}\text{的面积}/K\text{的面积})^{1/2}$，$\tilde{K}=\{\tilde{x}\,|\,\tilde{x}=\theta_K x,\ x\in K\}$。则$\tilde{K}$与$\hat{K}$同面积且存在与$K$、$\tau$无关的常$c_1$、$c_2>0$，使得

$$c_2h_\tau^{-1}\leqslant\theta_K\leqslant c_1h_\tau^{-1},\ h_{\tilde{K}}\leqslant c_1 \tag{5.11}$$

对$\forall w\in H^4(K)$，记$\tilde{w}(\tilde{x})=w(\theta_K^{-1}\tilde{x})$。$\forall\tilde{x}\in\tilde{K}$。则由于$\{\Pi^{00}_K,\ \Pi_{\partial K},\ \Pi^s_{\partial K},\ \Pi^N_{\partial K}\}$、$\{N^{ij}_K\}$均是正规仿射连续的，故有

$$\left.\begin{aligned}&(\Pi^{ij}_K w)(x)=\theta_K^{i+j}(\Pi^{ij}_{\tilde{K}}\tilde{w})(\theta_K x) && (\forall i+j\leqslant 2, x\in K)\\&(\Pi_{\partial K}w)(x)=(\Pi_{\partial\tilde{K}}\tilde{w})(\theta_K x) && (\forall x\in\partial K)\\&(\Pi^s_{\partial K}w)(x)=\theta_K(\Pi^s_{\partial\tilde{K}}\tilde{w})(\theta_K x) && (\forall x\in\partial K)\\&(\Pi^N_{\partial K}w)(x)=\theta_K(\Pi^N_{\partial\tilde{K}}\tilde{w})(\theta_K x) && (\forall x\in\partial K)\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

成立，这样由(5.11)及(5.3)～(5.5)可导出(3.4)～(3.7)。再由(3.5)可知，(2.1)式成立。

c)、现在我们证明对 $\xi>1$，存在只与ξ有关的常数 $c(\xi)$ 使得下述不等式

$$\begin{aligned}&|\Pi_{\partial K}w-\Pi_{\partial K'}w|_{0,F}+|\Pi^s_{\partial K}w-\Pi^{s'}_{\partial K'}w|_{0,F}+|\Pi^N_{\partial K}w-\Pi^{N'}_{\partial K'}w|_{0,F}\\&\leqslant c(\xi)\sum_{i+j=2}\{|\Pi^{ij}_K w|_{0,F}+|\Pi^{ij}_{K'}w|_{0,K'}\}\end{aligned} \tag{5.13}$$

对$\forall w\in H^4(K\cup K')$及这样的$K$和$K'$一致成立：$F=K\cap K'$是一条边，$K$与$\hat{K}$同面积，$h_K\leqslant\xi$，$h_{K'}\leqslant\xi$，$\rho_{K'}\geqslant\xi^{-1}h_{K'}$。

如果(5.13)为真，则利用与b)类似的方法可证明(3.8)～(3.9)，现在假设(5.13)不成立，则对$m=1,2,\cdots$存在K_m，K'_m具有性质$K_m\cap K'_m=F_m$是一边，K_m与$\hat{K}$同面积，$h_{K_m}\leqslant\xi$，$h_{K'_m}\leqslant\xi$，$\rho_{K'_m}\geqslant\xi^{-1}h_{K'_m}$及$w_m\in H^4(K_m\cup K'_m)$使得

$$\begin{aligned}&|\Pi_{\partial K_m}w_m-\Pi_{\partial K'_m}w_m|_{0,F_m}+|\Pi^s_{\partial K_m}w_m-\Pi^{s'}_{\partial K'_m}w_m|_{0,F_m}+|\Pi^N_{\partial K_m}w_m\\&-\Pi^{N'}_{\partial K'_m}w_m|_{0,F_m}>m\Big\{\sum_{i+j=2}[|\Pi^{ij}_{K_m}w_m|_{0,K_m}+|\Pi^{ij}_{K'_m}w_m|_{0,K'_m}]\Big\}\end{aligned} \tag{5.14}$$

与a)类似设对$m=1,2,\cdots$，有

$$\|\phi_{K_m}(w_m|_{K_m})\|^2+\|\phi_{K'_m}(w_m|_{K'_m})\|^2=1,\ \phi_{K_m}(w_m|_{K_m})\perp\phi_{K_m}(P|_{K_m}),\quad\forall P\in P_1(K_m\cup K'_m) \tag{5.15}$$

而且存在K_0，K'_0和$w_0\in H^4(K_0\cup K'_0)$，$F_0=K_0\cap K'_0$是一边，使得当$m\to\infty$时

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{K_m}(w_m|_{K_m})\to\phi_{K_0}(w_0|_{K_0}),\ \phi_{K'_m}(w_m|_{K'_m})\to\phi_{K'_0}(w_0|_{K'_0})\\&B_{K_m}\to B_{K_0},\ B_{K'_m}\to B_{K'_0}\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

并且有

$$\Pi^{ij}_{K_0} w_0=0,\Pi^{ij}_{K'_m} w_0=0 \qquad (i+j=2) \tag{5.17}$$

所以有 $\phi_{K_0}(w_0|_{K_0})=0$，$\Pi^{00}_{K'_m} w_0\in P_1(K'_0)$，$\Pi_{\partial K'_m} w_0-\Pi^{00}_{K'_m} w_0|_{\partial K'_0}=\Pi^{s'}_{\partial K'_0} w_0-\frac{\partial}{\partial s'}\Pi^{00}_{K'_0} w_0|_{\partial K'_0}=\Pi^{N'}_{\partial K'_0} w_0-\frac{\partial}{\partial N'}\Pi^{00}_{K'_0} w_0|_{\partial K'_0}=0$。由强连续性可知 $q^{s}_{F_0}(\Pi^{s'}_{\partial K'_0}w_0|_{F_0})=q^{N}_{F_0}(\Pi^{N'}_{\partial K'_0} w_0|_{F_0})=0$，所以$\Pi^{00}_{K'_0} w_0\in P_0(K'_0)$；又$q_{F_0}(\Pi_{\partial K'_0} w_0|_{F_0})=0$，所以$\Pi^{00}_{K'_0} w_0=0$。即 $\phi_{K'_0}(w_0)=0$，与$\|\phi_{K_0}(w_0|_{K_0})\|^2+\|\phi_{K'_0}(w_0|_{K_0})\|^2=1$矛盾。所以(5.13)成立，进而(3.8)、(3.9)成立。

利用(3.5)～(3.9)可证明当$F=K\cap K'$是一边时，不等式

$$h_\tau^{-\frac{1}{2}}|\Pi^{00}_K w-\Pi^{00}_{K'} w|_{0,F}+h_\tau^{-\frac{1}{2}}\sum_{i+j=1}|\Pi^{ij}_K w-\Pi^{ij}_{K'} w|_{0,F}\leqslant c\sum_{m+n=2}[|\Pi^{mn}_K w|_{0,K}+|\Pi^{mn}_{K'} w|_{0,K'}] \tag{5.18}$$

对$\forall w\in H^t(\Omega)$一致成立，这里c与K、K'、τ无关，K、$K'\in K_\tau$。利用(5.18)及[1]的引理和[8]的方法可以证明(2.2)式。

d)、最后，利用与上面类似的方法可以证明(3.10)、(3.11)。定理4得证。

定理 5 的证明：首先假设单元秩条件成立，由定理假设，显然$Q_K\phi_K(P)=0,\forall P\in P_1(K)$。又$\phi_K(1)$、$\phi_K(x_1)$、$\phi_K(x_2)$线性独立，故$Q_K$的秩至多为$M-3$。如果$u\in H^t(K)$且$\phi_K(u)$满足方程

$$Q_K\phi_K(u)=0 \tag{5.19}$$

则因单元秩条件推出$\Pi^{00}_K u\in P_1(K)$，$\Pi_{\partial K}u=\Pi^{00}_K u|_{\partial K}$，$\Pi^s_{\partial K}u=\frac{\partial}{\partial s}\Pi^{00}_K u|_{\partial K}$，$\Pi^N_{\partial K} u=\frac{\partial}{\partial N}\Pi^{00}_K u|_{\partial K}$，所以$\phi_K(u)=\phi_K(\Pi^{00}_K u)$，再由$R^M=\{\phi_K(u)|u\in H^t(K)\}$，可知$Q_K$的秩是$M-3$。

反之设Q_K的秩为$M-3$，则(5.19)的解空间是$\{\phi_K(P)|P\in P_1(K)\}$。因而若$u\in H^t(K)$，$\Pi^{20}_K u=\Pi^{11}_K u=\Pi^{02}_K u=0$。则$\phi_K(u)$是(5.19)的解，于是存在$P\in P_1(K)$，使得$\phi_K(u)=\phi_K(P)$，所以$\Pi^{00}_K u=P$，$\Pi_{\partial K}u=P|_{\partial K}$，$\Pi^s_{\partial K}u=\frac{\partial P}{\partial s}\Big|_{\partial K}$，$\Pi^N_{\partial K}u=\frac{\partial P}{\partial N}\Big|_{\partial K}$，由此可推出$\Pi^{10}_K u$、$\Pi^{01}_K\in P_0(K)$，这说明单元秩条件成立。定理5得证。

定理 6 的证明：我们首先证明(4.1)。令J_ξ是定理4的证明a)中定义的集合，我们证明存在常数$c(\xi)$使得

$$\|\Pi^{00}_K w\|_{m,K}\leqslant c(\xi)\|w\|_{r_1+1,K} \tag{5.20}$$

对$\forall w\in H^{r_1+1}(K)$，$\forall K\in J_\xi$一致成立。由[9]知，(5.20)等价于

$$\forall\hat{w}\in H^{r_1+1}(\hat{K}),\ \|\widehat{\Pi^{00}_K w}\|_{m,\hat{K}}\leqslant c(\xi)\|\hat{w}\|_{r_1+1,\hat{K}} \tag{5.21}$$

对$\forall K\in J_\xi$一致成立，这里$w(x)=\hat{w}(F_K^{-1}x)$，$\forall x\in K$。

对$\forall\hat{w}\in H^{r_1+1}(\hat{K})$，集合$\{\widehat{\Pi^{00}_K w}|K\in J_\xi\}$是$H^m(\hat{K})$中的有界集，否则对$n=1,2,\cdots$，存在$K_n\in J_\xi$，使得

$$\|\widehat{\Pi^{00}_{K_n} w}\|_{m,\hat{K}}>n \tag{5.22}$$

而$\{B_{K_n}\}$是有界集，所以存在$\{B_{K_n}\}$的子列$\{B_{K_{n'}}\}$及单元K_0使得$B_{K_{n'}}\to B_{K_0}$，所以$\hat{\phi}_{i,K_{n'}}\to\hat{\phi}_{i,K_0}$，$\hat{G}_{i,K_{n'}}$一致收敛于$\hat{G}_{i,K_0}$，因而在$H^m(\hat{K})$中$\hat{G}_{i,K_{n'}}\to\hat{G}_{i,K_0}$，$1\leqslant j\leqslant M$。所以$\widehat{\Pi^{00}_{K_{n'}}}w$在$H^m(\hat{K})$中收敛于$\widehat{\Pi^{00}_{K_0}}w$，即$\{\widehat{\Pi^{00}_{K_{n'}}}\}$是有界的，这与它是无界的矛盾。所以$\{\widehat{\Pi^{00}_K}w|K\in J_\xi\}$是$H^m(\hat{K})$中的有界集，又对$\forall K\in J_\xi$，由定理条件有$c(K)$存在使得

$$\forall\hat{w}\in H^{r_1+1}(\hat{K}),\ \|\widehat{\Pi^{00}_K}\|_{m,\hat{K}}\leqslant c(K)\|\hat{w}\|_{r_1+1,\hat{K}}$$

因而由共鸣定理（见[10]）可知(5.21)成立，也就是(5.20)成立。

另外利用仿射变换的技巧可知[9]，存在常数$c(\xi)$使得对$\forall w\in H^{r_1+1}(K)$，$\forall K\in J_\xi$有

$$\inf_{P\in Pr_1(K)}\|w-P\|_{r_1+1,K}\leqslant c(\xi)|w|_{r_1+1,K} \tag{5.23}$$

由(5.20)显然有$\forall w\in H^{r_1+1}(K)$，$\forall K\in J_\xi$，不等式

$$\|w-\Pi^{00}_K w\|_{m,K}\leqslant c(\xi)\|w\|_{r_1+1,K} \tag{5.24}$$

成立。注意定理的条件有

$$\|w-\Pi^{00}_K w\|_{m,K}=\inf_{P\in Pr_1(K)}\|(w-P)-\Pi^{00}_K(w-P)\|_{m,K}$$

$$\leqslant c(\xi)\inf_{P\in Pr_1(K)}\|w-P\|_{r_1+1,K}\leqslant c(\xi)|w|_{r_1+1,K}$$

即不等式

$$\|w-\Pi^{00}_K w\|_{m,K}\leqslant c(\xi)|w|_{r_1+1,K}\qquad\forall w\in H^{r_1+1}(K) \tag{5.25}$$

对$\forall K\in J_\xi$一致成立。

对$\forall K\in K_\tau$，利用定理4的证明b)的符号，由(5.25)，对$\forall w\in H^{r_1+1}(K)$，$l=0,1,\cdots,m$，有

$$|w-\Pi^{00}_K w|_{l,K}=\theta_K^{l-1}|\tilde{w}-\Pi^{00}_{\tilde{K}}\tilde{w}|_{l,\tilde{K}}\leqslant c\theta_K^{l-1}|\tilde{w}|_{r_1+1,\tilde{K}}$$

$$=c\theta_K^{l-1}\theta_K^{1-(r_1+1)}|w|_{r_1+1,K}=c\theta_K^{l-(r_1+1)}|w|_{r_1+1,K}$$

再利用(5.11)可得(4.1)。

类似地可证(4.2)～(4.4)。再用与[1]文类似的方法可得(4.5)。定理6得证。

定理7的证明：由定理1、定理3、定理4，我们只须证明：若$v_\tau\in U_\tau(\tau=1,2,\cdots)$，且$\sup_\tau\|v_\tau\|_{L^2,2(\Omega)}<\infty$，则对$\forall\varphi\in C_0^\infty(R^2)$，$\lim_{\tau\to\infty}T_{i,j}(\varphi,v_\tau)=0$ $(i=0,1,2,\ j=1,2)$.

记$v_\tau=\Pi_\tau w_\tau$，$w_\tau\in H^t(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$，则利用分部积分公式可得

$$2T_{1,2}(\varphi,v_\tau)=2\sum_{K\in K_\tau}\int_K(\varphi\Pi^{11}_K w_\tau+\partial_{x_2}\varphi\,\Pi^{10}_K w_\tau)dx$$

$$\begin{aligned}=\sum_{K\in K_\tau}\Big\{&\int_K\varphi(2\Pi^{11}_K w_\tau-\partial_{x_1}\Pi^{01}_K w_\tau-\partial_{x_2}\Pi^{01}_K w_\tau)dx\\&+\int_{\partial K}\varphi[(\Pi^{10}_K w_\tau-\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_1+\Pi^s_{\partial K}w_\tau N_2)N_2\\&+(\Pi^{01}_K w_\tau-\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_2-\Pi^s_{\partial K}w_\tau N_1)N_1]ds\\&+\int_K\partial_{x_2}\varphi(\Pi^{10}_K w_\tau-\partial_{x_1}\Pi^{00}_K w_\tau)dx+\int_{\partial K}\partial_{x_2}\varphi(\Pi^{00}_K w_\tau-\Pi_{\partial K}w_\tau)N_1ds\\&-\int_K\partial_{x_1}\varphi(\Pi^{01}_K w_\tau-\partial_{x_2}\Pi^{00}_K w_\tau)dx-\int_{\partial K}\partial_{x_1}\varphi(\Pi^{00}_K w_\tau-\Pi_{\partial K}w_\tau)N_2ds\Big\}\end{aligned}$$

$$+\sum_{K\in K_\tau}\left\{\int_{\partial K}\varphi[2N_1N_2\Pi^N_{\partial K}w_\tau+(N_1^2-N_2^2)\Pi^s_{\partial K}w_\tau]ds\right.$$

$$\left.+\int_{\partial K}\Pi_{\partial K}w_\tau(\partial_{x_2}\varphi N_1-\partial_{x_1}\varphi N_2)ds\right\}$$

对非负整数 l，记 P^l_K：$L^2(K)\to P_l(K)$ 是正交投影算子，P^l_F：$L^2(F)\to P_l(F)$ 是正交投影算子，利用(1.4)、(1.5)及(1.7)式及$\{U_\tau\}$通过检验 IPT 的事实，有

$$\begin{aligned}2T_{1,2}(\varphi,v_\tau)=&\sum_{K\in K_\tau}\left\{\int_K(\varphi-P^0_K\varphi)(2\Pi^{11}_K w_\tau-\partial_{x_2}\Pi^{10}_K w_\tau\partial_{x_1}\Pi^{01}_K w_\tau)dx\right.\\&+\int_{\partial K}(\varphi-P^0_K\varphi)[(\Pi^{10}_K w_\tau-\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_1+\Pi^s_{\partial K}w_\tau N_2)N_2\\&+(\Pi^{01}_K w_\tau-\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_2-\Pi^s_{\partial K}w_\tau N_1)N_1]ds\\&+\int_K[\partial_{x_2}\varphi(\Pi^{10}_K w_\tau-\partial_{x_1}\Pi^{00}_K w_\tau)+\partial_{x_1}\varphi(\Pi^{01}_K w_\tau-\partial_{x_2}\Pi^{00}_K w_\tau)]dx\\&\left.+\int_{\partial K}(\partial_{x_2}\varphi N_1-\partial_{x_1}\varphi N_2)(\Pi^{00}_K w_\tau-\Pi_{\partial K}w_\tau)ds\right\}\\&+\sum_{K\in K_\tau}\int_{\partial K}\Pi_{\partial K}w_\tau(\partial_{x_2}\varphi N_1-\partial_{x_1}\varphi N_2)ds\\&+\sum_{K\in K_\tau}\sum_{F\subset\partial K}\int_F(\varphi-P^0_F\varphi)[2N_1N_2\widetilde{\Pi}^N_{\partial K}w_\tau+(N_1^2-N_2^2)\widetilde{\Pi}^s_{\partial K}w_\tau]ds\\&+\sum_{K\in K_\tau}\int_{\partial K}(\varphi-P^0_K\phi)[2N_1N_2(\Pi^N_{\partial K}-\widetilde{\Pi}^N_{\partial K})w_\tau\\&+(N_1^2-N_2^2)(\Pi^s_{\partial K}-\widetilde{\Pi}^s_{\partial K})w_\tau]ds\end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式，插值不等式（见[1]）、不等式(3.4)～(3.11)及下述不等式

$$|\Pi^{10}_K w_\tau-(\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_1-\Pi^s_{\partial K}w_\tau N_2)|_{0,\partial K}+|\Pi^{01}_K w_\tau-(\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_2+\Pi^s_{\partial K}w_\tau N_1)|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{\frac{1}{2}}\sum_{i+j=2}|\Pi^{ij}_K w_\tau|_{0,K}\tag{5.26}$$

$$|\Pi^N_{\partial K}w_\tau-\widetilde{\Pi}^N_{\partial K}w_\tau|_{0,\partial K}+|\Pi^s_{\partial K}w_\tau-\widetilde{\Pi}^s_{\partial K}w_\tau|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{\frac{1}{2}}\sum_{i+j=2}|\Pi^{ij}_K w_\tau|_{0,K}\tag{5.27}$$

$$\forall\Phi\in H^1(K),\quad|\Phi|_{0,\partial K}\leqslant ch_\tau^{-\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{1,K}\tag{5.28}$$

我们可以得到

$$|T_{1,2}(\varphi,v_\tau)|\leqslant ch_\tau\|\varphi\|_{2,\Omega}\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}\tag{5.29}$$

因而 $\lim\limits_{\tau\to\infty}T_{1,2}(\varphi,v_\tau)=0$. 类似地可证明对 $\forall i=0,1,2,j=1,2$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}T_{i,j}(\varphi,v_\tau)=0$，不等式(5.26)由(3.5)和(3.7)可以推出，(5.27)用与定理 4 的证明类似的方法可得，(5.28)见[7]。定理 7 得证。

定理 8 的证明：在定理的条件下，$a(\cdot,\cdot)$是一致正定的，因而存在与 τ 无关的常数 c 使得下述不等式成立：

$$\tau=1,2,\cdots,\quad\|Eu_0-u_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}\leqslant c\left\{\min_{v_\tau\in U_\tau}\|Eu_0-v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}+\sup_{0\neq v_\tau\in U_\tau}\frac{|a(Eu_0,v_\tau)-f(v_\tau)|}{\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}}\right\}\tag{5.30}$$

由(4.5)可知对 $\tau=1,2,\cdots$，一致有

$$\min_{v_\tau\in U_\tau}\|Eu_0-v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}\leqslant c\sum_{i=1}^{6}h_\tau^{r_i-1}\ |u_0|_{r_i+1,\Omega}. \tag{5.31}$$

对(5.30)右端第二项，利用与定理7的证明类似的方法可以证得对$\forall v_\tau\in U_\tau$，不等式

$$|a(Eu_0,\ v_\tau)-f(v_\tau)|\leqslant c\|v_\tau\|_{L^{2,2}(\Omega)}\left\{\sum_{i=6}^{6}h_\tau^{r_i-1}\ |u_0|_{r_i+1,\Omega}+h_\tau^{r_6-1}\ |u_0|_{r',\Omega}\right\} \tag{5.32}$$

成立，其中c是与u_0，τ无关的常数，这样我们就得到了(4.11)。定理8得证。

参考文献

[1] 张鸿庆、王鸣，多套函数有限元逼近与拟协调板元，应用数学与力学，**6**，1 (1985)，41—52.

[2] Zhang Hongqing, Wang Ming, Finite element approximations with multiple sets of functions and quasi-conforming elements, 第五次国际双微会议(DD5)论文集，北京 (1984).

[3] 唐立民、陈万吉、刘迎曦，有限元分析中的拟协调元，大连工学院学报，**19**，2 (1980)，16—35.

[4] 陈万吉、刘迎曦、唐立民，拟协调元列式，大连工学院学学报，**19**，2 (1980).

[5] 蒋和洋，用拟协调元方法推导高精度三角形板弯曲单元，大连工学院学报，**20**，增刊2 (1981)，21—28.

[6] Stummel, F., The generalized patch test, *SIAM J. Num. Anal.* **16** (1979). 449—471.

[7] 冯康，论间断有限元的理论，计算数学，**1**，4 (1979) 378—385.

[8] Stummel, F., Basic compactness properties of nonconforming and hybrid finite element spaces, *RAIRO*, *Analyse*, *Sumcriqe*, *Numerical Analysis*, **4**, 1 (1980), 81—115.

[9] Ciarlet, P. C., The *Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1978).

[10] 吉田耕作，《泛函分析》（吴元恺等译），人民教育出版社 (1980).

On the Compactness of Quasi-Conforming Element Spaces and the Convergence of Quasi-Conforming Element Method

Zhang Hong-qing Wang Ming

(*Department of Applied Mathematics*, *Dalian Institute of Technology*, *Dalian*)

Abstract

In this paper, the compactness of quasi-conforming element spaces and the convergence of quasi-conforming element method are discussed. The well-known Rellich compactness theorem is generalized to the sequences of quasi-conforming element spaces with certain properties, and the generalized Poincaré inequality, the generalized Friedrichs inequality and the generalzed inequality of Poincaré-Friedrichs are proved true for them. The error estimates are also given. It is shown that the quasi-conforming element method is convergent if the quasi-conforming element spaces have the approximability and the strong continuity, and satisfy the rank condition of element and pass test IPT. As practical examples, 6-parameter, 9-parameter, 12-parameter, 15-parameter, 18-parameter and 21-parameter quasi-conforming elements are shown to be convergent, and their $L^{2,2}(\Omega)$-errors are $O(h_\tau)$, $O(h_\tau)$, $O(h_\tau^2)$, $O(h_\tau^2)$, $O(h_\tau^3)$ and $O(h_\tau^4)$ respectively.