应用数学和力学，第7卷第6期(1986年6月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

外力与阻尼间的振荡约束*

邹 凤 梧

(华中工学院，1985年9月16日收到)

摘 要

本文主要研究强迫力、变阻尼系数和变弹性恢复系数之间关于振荡解的相互制约关系，并结合实际问题的讨论，从而得到了一些新结果。

一、引 言

陈庆益在文献[1]中研究了具有球对称性的约化波动方程的振荡解问题，本文利用该文类似的方法，以及关于常微分方程的经典Sturm理论和WKB逼近法，进一步讨论了更一般的情形，即存在变阻尼系数项的二阶线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{1.1}$$

的振荡解存在性问题，以及阻尼系数$p(x)$，恢复系数$q(x)$与强迫作用项$f(x)$之间关于振荡解的相互制约关系。

二、振荡解的存在问题

考虑方程(1.1)，并设$p(x)$，$q(x)$是区间(a, b)中的连续函数，且区间(a, b)可以是$(-\infty, +\infty)$。

利用Liouville变换

$$y=u(x)z(x),\qquad u(x)=\exp\left[-\frac{1}{2}\int p(x)dx\right]$$

可以得到关于$z(x)$的不显含$z'(x)$的方程

$$z''+P(x)z=F(x) \tag{2.1}$$

其中

$$P(x)=q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x) \tag{a}$$

$$F(x)=f(x)\exp\left[\frac{1}{2}\int p(x)dx\right] \tag{b}$$

下面我们利用常微分方程的有关经典理论寻求方程式(2.1)的一个特解。为此可取对应的齐次方程

$$z''(x)+P(x)z(x)=0\qquad (x\geqslant a>0) \tag{2.2}$$

* 叶开沅推荐。

的两个线性无关的解$z_1(x)$，$z_2(x)$，且使

$$z_1(a)=0,\quad z_1'(a)=1$$

$$z_2(a)=1,\quad z_2'(a)=0$$

于是它们的 Wronski 行列式的值等于

$$w(x)\equiv z_1(x)z_2'(x)-z_1'(x)z_2(x)\equiv w(a)=-1$$

根据 Lagrange 常数变易法，并经初等运算，不难得到方程式(2.1)的一个特解为

$$z_0(x)=z_1(x)\int_a^x z_2(\xi)F(\xi)d\xi-z_2(x)\int_a^x z_1(\xi)F(\xi)d\xi \tag{2.3}$$

有了上述预备知识，下面便可以论证有关方程式 (1.1) 的振荡解存在性的两个定理。

定理 1 设 $P(x)$，$F(x)\in C^3([a,\ \infty])$，且当 $x\geqslant a$ 时，

$$P(x)\geqslant P_0>0,\quad P'(x)>0,$$

$$\frac{F(x)}{P(x)}=O\left(P^{-\frac{1}{4}}\right),\ \left(\frac{F(x)}{P(x)}\right)''>0,\ \left(\frac{F(x)}{P(x)}\right)'<0$$

则当 $x>a$ 时，方程式 (1.1) 至少存在一个振荡解。

证 由式(2.2)得 $z_1(\xi)=-z_1''(\xi)/P(\xi)$，$z_2(\xi)=z_2''(\xi)/P(\xi)$，代入式 (2.3) 右边积分中，再做两次分部积分运算，同时注意 $w(x)\equiv w(a)=-1$，于是不难求得

$$z_0(x)=\frac{F(x)}{P(x)}+\frac{F(a)}{P(a)}z_2(x)-\left(\frac{F}{P}\right)'(a)z_1(x)$$

$$-z_1(x)\int_a^x z_2(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)d\xi+z_2(x)\int_a^x z_1(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)d\xi \tag{2.4}$$

据题设，当 $x\geqslant a$ 时，要求 $P(x)\geqslant P_0>0$，$P'(x)>0$，故有

$$\int_a^\infty P(x)dx\geqslant P_0\int_a^\infty dx=\infty$$

由此可知齐次方程式(2.2)是振荡方程，而 $z_1(x)$，$z_2(x)$ 是其两个线性无关的振荡解。根据二阶线性齐次方程的 Sturm 比较定理，知 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$ 的单重零点列是彼此相间的，且它们的相邻二零点之间距离是严格下降的。又据量子力学中著名的 WKB 逼近理论（参考文献[2]、[3]），知 $z_1(x)$ 和 $z_2(x)$ 的幅值也是严格下降的，且具阶 $O(P^{-\frac{1}{4}})$。

根据题设

$$\left(\frac{F(x)}{P(x)}\right)''>0,\ \left(\frac{F(x)}{P(x)}\right)'<0,\ \text{知}\left(\frac{F(x)}{P(x)}\right)''$$

为单调下降正值函数。因此，若记 $\{a_1,a_2,\cdots\}$ 为 $z_1(x)$ 的零点列，则因为 $z_1(\xi)(F/P)(\xi)$的振幅严格下降，且

$$(a_{i+2}-a_{i+1})<(a_{i+1}-a_i)$$

从而知道有

$$\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}z_1\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)d\xi\right|>\left|\int_{a_{i+1}}^{a_{i+2}}z_1\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)d\xi\right| \tag{2.5}$$

$$(i=1,2,\cdots)$$

所以函数

$$R(x)=\int_a^x z_1(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)d\xi=\left(\int_a^{a_2}+\int_{a_2}^{a_3}+\cdots+\int_{a_n}^x\right)z_1(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)(\xi)d\xi$$

作为曲线 $z=z_1(\xi)(F/P)(\xi)$ 与轴 $z=0$ 在 $\xi=a$ 及 $\xi=x$ 间所围成的正负面积的代数和是一个定号函数。

事实上，不妨设 $z_1(\xi)$ 在区间 (a, a_2)，(a_3, a_4)，…中为正值，则在区间 (a_2, a_3)，(a_4, a_5)，…中必为负值，于是由式(2.5)知有

$$R(x)=\left[\int_a^{a_2} z_1\left(\frac{F}{P}\right)'' d\xi-\int_{a_2}^{a_3} z_1\left(\frac{F}{P}\right)'' d\xi\right]+\left[\int_{a_3}^{a_4} z_1\left(\frac{F}{P}\right)'' d\xi\right.$$

$$\left.-\int_{a_4}^{a_5} z_1\left(\frac{F}{P}\right)'' d\xi\right]+\cdots>0$$

由此即可推断线性组合

$$g(x)\equiv z_2(x)\int_a^x z_1(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)d\xi-z_1(x)\int_a^x z_2(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)(\xi)d\xi$$

是区间 (a, ∞) 中的一个振荡函数，显然也是连续的。

其实，由 Sturm 隔离定理知，若 $\{b_1, b_2, \cdots\}$ 是 $z_2(x)$ 的单重零点列，则有 $a_1<b_1<a_2<b_2\cdots$，此时可设在区间 (b_1, b_2)，(b_3, b_4)，…中 $z_2(x)>0$，而在区间 (b_2, b_3)，(b_4, b_5)，…中 $z_2(x)<0$，故知（注意 $R(x)$ 恒大于零）$g(a_2)=z_2(a_2)R(a_2)>0$，$g(a_3)=z_2(a_3)R(a_3)<0$，…，所以 $g(x)$ 确实是区间 (a, ∞) 中的振荡函数。

考虑到式 (2.4) 右边第一项 F/P 与第二、第三项的振幅同阶 $O(P^{-\frac{1}{4}})$，因此必要时可取适当大的正数 A 作和 $z=z_0+Az_1$，于是便得到方程式 (1.1) 的一个振荡解

$$y=z(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int p(x)dx\right]$$

定理 2 设 $P(x)$，$F(x)\in C^2([a, \infty))$，且当 $x\geqslant a$ 时 $P(x)>0$，而 $P'(x)\leqslant 0$，$P(x)\to 0$ $(x\to\infty)$，但仍使齐次方程式 (2.4) 是振荡方程，其一个解为 $z_1(x)$ $(z_1(a)=0,\ z_1'(a)=1)$。若 $F(x)/P(x)=O(P^{-\frac{1}{4}})$，且积分

$$\int_a^\infty z_1(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)d\xi \tag{2.6}$$

收敛，则方程式 (1.1) 当 $x>a$ 时，至少存在一个振荡解。

证 基于表达式(2.4)，考虑到对 $P(x)$ 的假定，再根据经典的 Sturm 理论和 WKB 逼近法，知齐次方程式 (2.2) 的所有非零解都有非降的振幅和非降的相邻零点距离，且振幅具增长阶 $O(P^{-\frac{1}{4}})$。鉴于题设积分 (2.6) 是收敛的，故存在某一充分大的 b $(b\gg a>0)$，当 $x\geqslant b$ 时，式 (2.6) 的值的符号由

$$\int_a^b z_1(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)d\xi$$

所确定，而且是定号函数。

由定理 1 的证明过程，知式 (2.4) 右边的后两项之和是区间 (b, ∞) 随之也是区间 (a, ∞) 中的振荡函数。于是，参照定理 1 的证明中后半部份的论述，知方程式 (1.1) 当 $x>a$ 时至少存在一个振荡解。

注 要求积分 (2.6) 收敛不便检验，可以换为一个充分条件，即要求积分

$$\int_a^\infty \left|P^{\frac{1}{4}}(\xi)\left(\frac{F}{P}\right)''(\xi)\right|d\xi$$

收敛，然而这个条件较强，不能给出最佳结果，

三、振荡制约关系

最后，我们根据定理 1 及 2 和关系式(a)及(b)，并结合实际的物理和力学问题进一步讨论恢复系数 $q(x)$、阻尼系数 $p(x)$ 和强迫作用项 $f(x)$ 三者之间的振荡制约关系。

关于定理 1：

1° 由 $P(x)\geqslant P_0>0$，$P'(x)>0$ 及 $z_{1,2}=O(P^{-\frac{1}{4}})$知，式(1.1)的振荡解的振幅是随 x 增长而衰减的。

2° 由关系式

$$P(x)=q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x)\geqslant P_0$$

得

$$q(x)\geqslant\frac{1}{2}p'(x)+p^2(x)+P_0>0 \tag{3.1}$$

物理的和力学的实际问题要求阻尼系数 $p(x)>0$，所以由式 (3.1) 可以得到结论：恢复系数 $q(x)$ 随阻尼系数 $p(x)$ 要有适当大的增长性才能保证式(1.1)有衰减振荡解的可能。

又因　$P'(x)>0$，故得

$$q'(x)>\frac{1}{2}p''(x)+\frac{1}{2}p(x)p'(x) \tag{3.2}$$

式(3.1)和(3.2)一起引出使方程式(1.1)有振荡解的$q(x)$与$p(x)$的约束条件。

例如，设介质阻尼有增长率$p'(x)=O\left(\frac{1}{2}p^2(x)\right)$时，则式(3.1)变成

$$q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)\geqslant P_0$$

当 $q(x)=x^{\frac{1}{n}}$，$p(x)=x^{\frac{1}{2n}}$　$(n\geqslant1)$ 时，显然满足条件 (3.1)，于是式(1.1)存在一个衰减振荡解。

3° 由式(a)和(b)，以及定理 1 的条件可得

$$f(x)=\exp\left[-\frac{1}{2}\int pdx\right]O\left(\left(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{3}{4}}\right) \tag{3.3}$$

或

$$|f(x)|\leqslant C\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int pdx\right]\left(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{3}{4}} \tag*{(3.3)$'$}$$

(C 为正的常数)

式(3.3)或式(3.3)′即是线性阻尼系数 $p(x)$、弹性恢复系数$q(x)$与强迫作用项$f(x)$之间的振荡约束关系。

在实际的物理学和力学问题中，要求 $p(x)\geqslant0$，$q(x)\geqslant0$。当 $q(x)$ 和 $p(x)$ 不同时为变量时，可以得到 $f(x)$ 与 $q(x)$，或者 $f(x)$ 与 $p(x)$ 之间较为简明的振荡制约条件。

关于定理 2：

完全仿照定理 1 的讨论，同样可以得到 $q(x)$ 与 $p(x)$，以及 $f(x)$，$q(x)$，$p(x)$ 三者之

间的振荡制约关系，我们不再赘述。在此仅把结论中不同之点写出：

1° 方程式(1.1)有振幅增长的振荡解；

2° $q'(x) < \frac{1}{2} p''(x) + \frac{1}{2} p(x) p'(x)$

最后顺便指出，由定理1和2得到的结论是：振幅随恢复系数$q(x)$增长而衰减；随$q(x)$的减小而增长。这一点是可以解释的。

感谢陈庆益教授对本文所提的宝贵意见和有益讨论。

参 考 文 献

[1] 陈庆益，球对称约化波动方程的振幅解（投数学物理学报）。

[2] Mott, N. F., *Elements of Wave Mechanics*, Cambridge, at the University Press (1952).

[3] 陈庆益、柳训明，《常微分方程及其应用》，华中工学院出版社（1983）。

Oscillatory Correlations between External Force and Damping

Zou Feng-wu

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Abstract

In this paper we are concerned mainly with correlations between the external force and the damping coefficient. Some new results are obtained.