应用数学和力学，第7卷第6期（1986年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

受匀速转动约束的变质量完整力学系统的运动微分方程*

赵 关 康

（上海纺织工业专科学校，1985年4月12日收到）

摘 要

本文建立受匀速转动约束的变质量完整力学系统的运动微分方程，包括 Lagrange 形式的方程，Nielsen 形式的方程和 Appell 形式的方程，并举例说明这些新型方程的应用.

一、引 言

由于空间技术和其它工业技术的发展，变质量力学系统的研究越来越引起人们的注视。在文献[1]、[2]、[3]中研究了常质量完整力学系统 Lagrange 形式的方程。本文研究变质量完整力学系统相对匀速转动坐标系的 Lagrange 形式的方程，Nielsen 形式的方程和 Appell 形式的方程。然后举例说明这些新型方程的应用。本文主要结果为(3.4)～(3.9)、(3.10)、(3.12)、(3.14)、(4.8)、(4.10)和(4.16)。

二、变质量完整力学系统在绝对坐标系中的运动微分方程

研究由N个质点所组成的力学系统。在瞬时t，第i质点的质量为$m_i=m_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$；在瞬时$t+dt$，由质点分离（或并入）的微粒质量为dm_i。设系统的位形由n个广义坐标q_1，$q_2,\cdots$，q_n来确定。我们假设质点的质量为时间的函数，即$m_i=m_i(t)$ $(i=1,\ 2,\cdots,\ N)$。在系统中第i质点写出 Мещерский 方程[2]

$$\overline{F}_i-m_i\ddot{\overline{r}}_i+\dot{m}_i\overline{u}_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ N) \tag{2.1}$$

其中$\overline{r}_i$表示i质点的位矢；$\ddot{\overline{r}}_i$表示i质点的加速度；$\overline{u}_i$表示微粒对i质点的相对速度；$\overline{F}_i$表示作用于i质点上的力。将(2.1)式两边点乘$\delta\overline{r}_i$，并对i求和，得到变质量系统的 D'Alembert-Lagrange 原理：

$$\sum_{i=1}^{N}\{\overline{F}_i-m_i\ddot{\overline{r}}_i+\dot{m}_i\overline{u}_i\}\delta\overline{r}_i=0 \tag{2.2}$$

在理想约束情况下，$\overline{F}_i$即为作用于i质点上的主动力。

* 朱照宣推荐。

现在将原理 (2.2) 写成广义坐标下的形式。

首先，采用“凝固”导数和“凝固”偏导数记号[2]。原理 (2.2) 可写成

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{Q_s+\Psi_s-\frac{D}{Dt}\frac{\varDelta T}{\varDelta \dot{q}_s}+\frac{\varDelta T}{\varDelta q_s}\right\}\delta q_s=0 \tag{2.3}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\bar{r}}_i\dot{\bar{r}}_i$ 为系统的动能；

$$Q_s=\sum_{i=1}^{N}\bar{F}_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_s},\quad \Psi_s=\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\bar{u}_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_s}$$

分别为广义力和广义反推力。

对于完整系统，我们得到变质量完整力学系统的运动微分方程[2]

$$\frac{D}{Dt}\frac{\varDelta T}{\varDelta \dot{q}_s}-\frac{\varDelta T}{\varDelta q_s}=Q_s+\Psi_s\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2.4}$$

如果采用普通导数和偏导数记号，可以得到方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+K_s\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2.5}$$

其中 $K_s=\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i(\bar{u}_i+\dot{\bar{r}}_i)\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_s}$

如果采用 Pars 偏导数记号[5]，则有方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_0}{\partial q_s}=Q_s+K_s\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2.6}$$

因为仅考虑$m_i=m_i(t)$的情况，故(2.5) 和 (2.6) 的右边有同样的形式。对于更一般的情况，则不然。

我们亦可以将 Lagrange 形式的方程(2.4)、(2.5) 和 (2.6) 表示为 Nielsen 形式的方程。

方程 (2.4) 变为

$$\frac{\varDelta}{\varDelta \dot{q}_s}\frac{DT}{Dt}-2\frac{\varDelta T}{\varDelta q_s}=Q_s+\Psi_s\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2.7}$$

方程 (2.5) 可变为

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+K_s\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2.8}$$

方程 (2.6) 可化为

$$\frac{\partial \dot{T}_0}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T_0}{\partial q_s}=Q_s+K_s\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2.9}$$

三、变质量完整力学系统相对匀速转动坐标系的 Lagrange方程和Nielsen方程

现在将方程(2.4)、(2.5)、(2.6)、(2.7)、(2.8)和(2.9)写成相对匀速转动坐标系的形

式。

在绝对坐标系中的动能

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\bar{r}}_i\dot{\bar{r}}_i$$

根据复合运动的概念，可将上式写成

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\bar{v}_{ir}+\bar{v}_{ie})(\bar{v}_{ir}+\bar{v}_{ie})$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\bar{v}_{ir}\bar{v}_{ir}+\sum_{i=1}^{N}m_i\bar{v}_{ir}\bar{v}_{ie}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\bar{v}_{ie}\bar{v}_{ie}$$

$$=T_r+T_m+T_e \tag{3.1}$$

其中 $T_r=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\bar{v}_{ir}\bar{v}_{ir}$ 表示相对转动坐标系的动能；

$T_m=\sum_{i=1}^{N}m_i\bar{v}_{ir}\bar{v}_{ie}$ 表示动能中含有 ω 的项；

$T_e=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\bar{v}_{ie}\bar{v}_{ie}$ 表示动能中含有ω^2的项。

设系统绕空间固定坐标系$Oxyz$的Oz轴以匀角速度转动。取动坐标系$Ox'y'z'$。其中Oz'与Oz轴重合。令质点在$Ox'y'z'$坐标系中的坐标为x_i'，y_i'，z_i'。我们有

$$\bar{v}_{ir}=\dot{x}_i'\bar{i}'+\dot{y}_i'\bar{j}'+\dot{z}_i'\bar{k}'$$

$$\bar{v}_{ie}=\omega\bar{k}'\times(x_i'\bar{i}'+y_i'\bar{j}'+z_i'\bar{k}')=\omega(x_i'\bar{j}'-y_i'\bar{i}')$$

其中$\bar{i}'$，$\bar{j}'$，$\bar{k}'$为Ox'，Oy'，Oz'轴的单位矢量。于是

$$T_m=\omega\sum_{i=1}^{N}m_i(t)(-\dot{x}_i'y_i'+\dot{y}_i'x_i') \tag{3.2}$$

$$T_e=\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(t)(x_i'^2+y_i'^2) \tag{3.3}$$

将(3.1)式代入(2.4)、(2.5)、(2.6)、(2.7)、(2.8) 和 (2.9)，得到相对匀速转动坐标系的变质量完整力学系统的运动微分方程。

因为

$$\frac{\varDelta T_e}{\varDelta\dot{q}_s}=\frac{\partial T_e}{\partial\dot{q}_s}=\frac{\partial T_{0e}}{\partial\dot{q}_s}=0$$

故 (2.4) 式化为

$$\frac{D}{Dt}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_s}-\frac{\varDelta T_r}{\varDelta q_s}=Q_s+\varPsi_s-\left(\frac{D}{Dt}\frac{\varDelta T_m}{\varDelta\dot{q}_s}-\frac{\varDelta T_m}{\varDelta q_s}\right)+\frac{\varDelta T_e}{\varDelta q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{3.4}$$

(2.5) 式化为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s+K_s-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_m}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_m}{\partial q_s}\right)+\frac{\partial T_e}{\partial q_s}\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n)\qquad (3.5)$$

(2.6) 式化为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{0r}}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_{0r}}{\partial q_s}=Q_s+K_s-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{0m}}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_{0m}}{\partial q_s}\right)+\frac{\partial T_{0e}}{\partial q_s}\qquad (s=1,2,\cdots,n)\quad (3.6)$$

(2.7) 式化为

$$\frac{Д}{Д\dot{q}_s}\frac{DT_r}{Dt}-2\frac{ДT_r}{Дq_s}=Q_s+\Psi_s-\left(\frac{Д}{Д\dot{q}_s}\frac{DT_m}{Dt}-2\frac{ДT_m}{Дq_s}\right)+\frac{ДT_e}{Дq_s}$$

$$(s=1,\ 2,\cdots,\ n)\qquad (3.7)$$

(2.8) 式化为

$$\frac{\partial \dot{T}_r}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s+K_s-\left(\frac{\partial \dot{T}_m}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T_m}{\partial q_s}\right)+\frac{\partial T_e}{\partial q_s}\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n)\qquad (3.8)$$

(2.9) 式化为

$$\frac{\partial \dot{T}_{0r}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T_{0r}}{\partial q_s}=Q_s+K_s-\left(\frac{\partial \dot{T}_{0m}}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T_{0m}}{\partial q_s}\right)+\frac{\partial T_{0e}}{\partial q_s}\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n)\qquad (3.9)$$

现在研究方程(3.4)～(3.9)的特殊而又重要的情况．将(3.2)和(3.3) 代入方程 (3.4)，得到

$$\frac{D}{Dt}\frac{ДT_r}{Д\dot{q}_s}-\frac{ДT_r}{Дq_s}=Q_s+\Psi_s-2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i(t)\left(\dot{x}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}-\dot{y}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}\right)$$

$$+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(t)\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)\quad (s=1,2,\cdots,n)\qquad (3.10)$$

如果满足条件

$$\sum_{i=1}^{N}m_i(t)\left(\dot{x}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}-\dot{y}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}\right)=0\qquad (3.11)$$

则方程(3.10)成为

$$\frac{D}{Dt}\frac{ДT_r}{Д\dot{q}_s}-\frac{ДT_r}{Дq_s}=Q_s+\Psi_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(t)\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)$$

$$(s=1,\ 2,\cdots,\ n)\qquad (3.12)$$

我们注意到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{0r}}{\partial \dot{q}_s}=\frac{D}{Dt}\frac{ДT_r}{Д\dot{q}_s}+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\left(\dot{x}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+\dot{y}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}+\dot{z}_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_s}\right)$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=\frac{\partial T_{0r}}{\partial q_s}=\frac{ДT_r}{Дq_s}$$

$$K_s=\Psi_s+\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\left(\dot{x}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+\dot{y}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}+\dot{z}_i'\frac{\partial z_i'}{\partial q_s}+\omega x_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}-\omega y_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_m}{\partial \dot{q}_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{0m}}{\partial \dot{q}_s}=\frac{D}{Dt}\frac{\varDelta T_m}{\varDelta \dot{q}_s}+\omega\sum_{i=1}^{N}\dot{m}_i\left(x_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}-y_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}\right)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial q_s}=\frac{\partial T_{0m}}{\partial q_s}=\frac{\varDelta T_{0m}}{\varDelta q_s}$$

则方程(3.5)和(3.6)在满足条件(3.11)下，亦可表为方程(3.12)。

将(3.2)和(3.3)代入方程(3.7)，得到

$$\frac{\varDelta}{\varDelta \dot{q}_s}\frac{DT_r}{Dt}-2\frac{\varDelta T_r}{\varDelta q_s}=Q_s+\Psi_s-2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i(t)\left(\dot{x}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}-\dot{y}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}\right)$$
$$+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(t)\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)\qquad(s=1,\ 2,\cdots,\ n)\qquad(3.13)$$

如果满足条件(3.11)，则方程(3.13)化为

$$\frac{\varDelta}{\varDelta \dot{q}_s}\frac{DT_r}{Dt}-2\frac{\varDelta T_r}{\varDelta q_s}=Q_s+\Psi_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(t)\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)\qquad(s=1,\ 2,\cdots,\ n)$$
$$(3.14)$$

类似地，方程(3.8)和(3.9)在满足条件(3.11)亦可化为方程(3.14)。

如果质量是不变的，则$\Psi_s=0$，特殊偏导数记号$\varDelta$变成普通偏导数记号∂，D变成d，而方程(3.12)和(3.14)分别为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)\qquad(s=1,\ 2,\cdots,\ n)\qquad(3.15)$$

$$\frac{\partial \dot{T}_r}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)\qquad(s=1,\ 2,\cdots,\ n)\qquad(3.16)$$

方程(3.15)与文献[1]、[2]、[3]中的结果一致。

四、变质量完整力学系统相对匀速转动坐标系的Appell形式的方程

将原理(2.2)改写成

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{Q_s+\Psi_s-\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}\right\}\delta q_s=0\qquad(4.1)$$

有关系式[3]

$$\frac{\partial \ddot{\bar{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}=\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s},\quad\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\bar{r}}_i\frac{\partial \ddot{\bar{r}}_i}{\partial \ddot{q}_s}=\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_s}\qquad(4.2)$$

其中 $$G=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\ddot{\bar{r}}_i\ddot{\bar{r}}_i\qquad(4.3)$$

为加速度能量.

这样 (4.1) 式可改写为

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{Q_s+\Psi_s-\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_s}\right\}\delta q_s=0 \tag{4.4}$$

对于完整力学系统，得到 Appell 形式的方程

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\Psi_s \qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{4.5}$$

如果将G的表达式化为相对匀速转动坐标系的形式

$$G=G_1+G_2+G_3+G_4+G_r \tag{4.6}$$

其中 $G_r=\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\bar{a}_{ir}\bar{a}_{ir}$

为相对转动坐标系的相对加速度能量，

$$G_1=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\cdot 2\cdot(\ddot{x}_i'\bar{i}'+\ddot{y}_i'\bar{j}'+\ddot{z}_i'\bar{k}')\cdot[2\omega\bar{k}'\times(\dot{x}_i'\bar{i}'+\dot{y}_i'\bar{j}'+\dot{z}_i'\bar{k}')]$$

$$=2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot(\dot{x}_i'\ddot{y}_i'-\ddot{x}_i'\dot{y}_i')$$

为加速度能量中含有ω的项，

$$G_2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i[2\omega\bar{k}'\times(\dot{x}_i'\bar{i}'+\dot{y}_i'\bar{j}'+\dot{z}_i'\bar{k}')]^2$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\cdot 2(\ddot{x}_i'\bar{i}'+\ddot{y}_i'\bar{j}'+\ddot{z}_i'\bar{k}')\{\omega\bar{k}'\times[\omega\bar{k}'\times(\dot{x}_i'\bar{i}'+\dot{y}_i'\bar{j}'+\dot{z}_i'\bar{k}')]\}$$

$$=2\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{x}_i'^2+\dot{y}_i'^2)-\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i(\ddot{x}_i'x_i'+\ddot{y}_i'y_i')$$

为加速度能量中含有ω^2的项，

$$G_3=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\{2\omega\bar{k}'\times[\omega\bar{k}'\times(x_i'\bar{i}'+y_i'\bar{j}'+z_i'\bar{k}')]\}\cdot[2\omega\bar{k}'\times(\dot{x}_i'\bar{i}'+\dot{y}_i'\bar{j}'+\dot{z}_i'\bar{k}')]$$

$$=2\omega^3\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot(x_i'\dot{y}_i'-y_i'\dot{x}_i')$$

为加速度能量中含有ω^3的项，

$$G_4=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\{\omega\bar{k}'\times[\omega\bar{k}'\times(x_i'\bar{i}'+y_i'\bar{j}'+z_i'\bar{k}')]\}^2$$

$$=\frac{1}{2}\omega^4\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i'^2+y_i'^2)$$

为加速度能量中含有ω^4的项。

因为G_3，G_4项中不含有$\ddot{q}_s$项，故可弃去。

于是
$$G=G_r+G_1+G_2 \tag{4.7}$$

将(4.7)代入(4.4)，得到相对匀速转动坐标系的 Appell 形式的方程

$$\frac{\partial G_r}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\Psi_s+\left(-\frac{\partial G_1}{\partial \ddot{q}_s}\right)+\left(-\frac{\partial G_2}{\partial \ddot{q}_s}\right)\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{4.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G_1}{\partial \ddot{q}_s}&=2\omega\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\dot{x}'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}-\dot{y}'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}\right)\\ \frac{\partial G_2}{\partial \ddot{q}_s}&=-\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}+y'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

如果满足条件(3.11)，则方程(4.8)可写成

$$\frac{\partial G_r}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s+\Psi_s+\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\left(x'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_s}+y'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_s}\right)\qquad (s=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{4.10}$$

如果引进准速度$\omega_l=\omega_l(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)$ $(l=1,\ 2,\cdots,\ s)$则有

$$\dot{q}_s=\dot{q}_s(q_l,\ \omega_l,\ t),\ \ddot{q}_s=\ddot{q}_s(q_l,\ \omega_l,\ \dot{\omega}_l,\ t)$$

以及

$$\delta q_s=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_l}\delta\pi_l \tag{4.11}$$

其中 $\delta\pi_l$ 为准坐标变分。

将(4.11)代入(4.4)，得到

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_l}+\sum_{s=1}^{n}\Psi_s\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_l}-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_l}\right\}\delta\pi_l=0 \tag{4.12}$$

令 $G^*(q_s,\ \omega_l,\ \dot{\omega}_l,\ t)=G(q_s,\ \dot{q}_s(q_s,\ \omega_l,\ t),\ \ddot{q}_s(q_s,\ \omega_l,\ \dot{\omega}_l,\ t),\ t)$

则有
$$\frac{\partial G^*}{\partial \dot{\omega}_l}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \dot{\omega}_l}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_s}\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_l} \tag{4.13}$$

将(4.13)代入(4.12)，则有

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{\Pi_l+P_l-\frac{\partial G^*}{\partial \dot{\omega}_l}\right\}\delta\pi_l=0 \tag{4.14}$$

其中

$$\Pi_l=\sum_{s=1}^{n}Q_s\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_l},\quad P_l=\sum_{s=1}^{n}\Psi_s\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_l}$$

对于完整系统$\delta\pi_l$ $(l=1,\ 2,\cdots,\ n)$是彼此独立的。由(4.14)得到准坐标下 Appell 形式的变质量完整力学系统的运动微分方程

$$\frac{\partial G^*}{\partial \dot{\omega}_l}=\Pi_l+P_l \qquad (l=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{4.15}$$

G^*可化为类似于(4.6)形式，然后代入(4.15)得到相对匀速转动坐标系准坐标下的Appell形式的方程

$$\frac{\partial G_r^*}{\partial \dot{\omega}_l}=\Pi_l+P_l+\left(-\frac{\partial G_1^*}{\partial \dot{\omega}_l}\right)+\left(-\frac{\partial G_2^*}{\partial \dot{\omega}_l}\right) \qquad (l=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{4.16}$$

五、例　　子

一质量为$m=m(t)$的质点在重力作用下运动在半径为a的圆管中，此圆管以角速度ω绕与其平面成α角的铅垂固定轴匀速转动．试研究质点的运动．

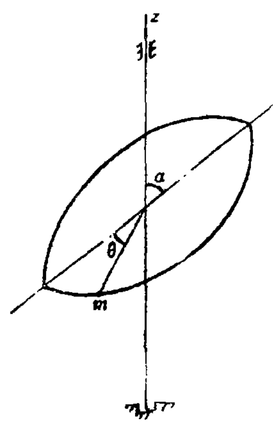

图　1

解：取质点离开圆管最低点的张角θ（图1）为广义坐标．

质点的动能为

$$T=T_r+T_m+T_e \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&其中\ T_r=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2,\quad T_m=ma^2\dot{\theta}\omega\sin\alpha\\ &T_e=\frac{1}{2}ma^2\omega^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

满足条件(3.11)$\left(或\ \frac{D}{Dt}\ \frac{\text{Д}T_m}{\text{Д}\dot{q}_s}-\frac{\text{Д}T_m}{\text{Д}q_s}=0\right)$

于是　　$\frac{D}{Dt}\ \frac{\text{Д}T_m}{\text{Д}\dot{\theta}}=0,\quad \frac{\text{Д}T_m}{\text{Д}\theta}=0$

这样含ω项在方程中不再出现．

应用方程(3.12)，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{D}{Dt}\ \frac{\text{Д}T_r}{\text{Д}\dot{\theta}}=ma^2\ddot{\theta},\quad \frac{\text{Д}T_r}{\text{Д}\theta}=0\\ &\frac{\text{Д}T_e}{\text{Д}\theta}=ma^2\omega^2(\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta\sin^2\alpha)\\ &Q_\theta=-mg\cos\alpha\cdot a\sin\theta,\quad \Psi_\theta=\dot{m}u_\theta\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

将(5.3)代入(3.12)得到

$$ma^2\ddot{\theta}=-mga\cos\alpha\sin\theta+\dot{m}u_\theta+ma^2\omega^2(\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta\sin^2\alpha) \tag{5.4}$$

如果是常质量完整力学系统，则(5.4)右边第二项不出现，得到

$$ma^2\ddot{\theta}=-mga\cos\alpha\sin\theta+m\omega^2a^2(\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta\sin^2\alpha)$$

积分一次得到

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2-mga\cos\alpha\cos\theta-\frac{1}{2}ma^2\omega^2(1-\cos^2\theta\cos^2\alpha)=h^* \tag{5.5}$$

(5.5)式与文献[2]的结果一致．

作者与梅凤翔副教授进行了有益的讨论，谨致谢意。

参 考 文 献

[1] Whittaker, E. T., *A Treatise on Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge (1904).
[2] 梅凤翔, 《分析力学基础》, 北京工业学院 (1983).
[3] 汪家訸, 《分析动力学》, 高教出版社 (1958).
[4] 梅凤翔, 非完整系统力学的某些问题, 北京工业学院 (1983).
[5] Pars, L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics*, London (1965).
[6] Goldstein, *Classical Mechanics*, California (1950).

Differential Equations of Motion for a Variable-Mass Holonomic System with a Uniformly Rotating Constraint

Zhao Guang-kang

(*Shanghai Textile Engineering College, Shanghai*)

Abstract

In this paper, the differential equations of motion will be established for variable-mass holonomic mechanical systems constrained to the uniform rotation, including the equations in Lagrange form, Nielsen form and Appell form. The application of these new equations is illustrated with an example.