应用数学和力学，第7卷第7期（1986年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

自重作用下的圆环薄壳*

王玳瑜　陈山林　吴国平

（重庆建筑工程学院，1984年4月15日收到）

摘　要

本文得到了等厚度圆环薄壳在自重荷载下一种简化形式的 Новожилов 方程，用 Fourier 级数求得了方程的特解。利用文[2]已有的齐次解结果，从而给出了问题的一般解。作为结果的应用，文中给出了两个算例。

一、引　言

在内压和轴力作用下的等厚度圆环薄壳问题，目前已有完整的解答。Новожилов (1959)得到了方程的特解[1]，钱伟长、郑思梁 (1979)得到了齐次方程的一般解[2]。在此基础上，文[4]～[9]处理了波纹管或波纹膜片的若干计算问题。

考虑到大型环壳结构，例如环壳形屋顶的采用，在自重荷载下环壳的应力和位移计算，实属一个有实际意义的问题。本文导得了在自重作用下环壳 Новожилов 型的复变量方程，并对方程进行了简化处理，得以用 Fourier 级数求得了方程的特解，利用钱伟长、郑思梁已得到的齐次解结果[2]，从而给出了问题的一般解。作为结果的应用，文中给出了两个算例。

二、基 本 方 程

我们考虑图1所示圆环薄壳在自重荷载下的轴对称问题，其几何尺寸，坐标，位移如图1。

平衡方程为[10]

$$\frac{d}{d\phi}(N_\phi r)-N_\theta a\cos\phi-rQ+arq\sin\phi=0 \tag{2.1}$$

$$rN_\phi+aN_\theta\sin\phi+\frac{d(Q\cdot r)}{d\phi}+arq\cos\phi=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{d\phi}(M_\phi\cdot r)-M_\theta a\cdot\cos\phi-Qar=0 \tag{2.3}$$

* 叶开沅推荐。本文被国际薄壳和空间结构学术会议(IASS)接受为宣读论文，莫斯科，1985年9月。

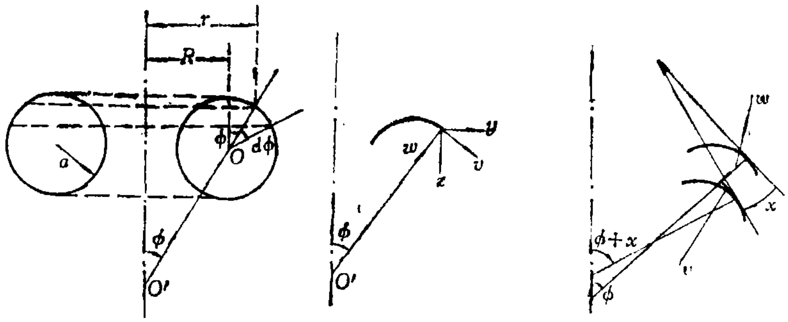


图 1 环壳的尺寸、坐标和位移及转角变形

式中，内力M_ϕ、M_θ、N_ϕ、N_θ、Q同文[10]，q为单位面积重量。

由图 1，$r=R(1+\alpha\sin\phi)$，其中$\alpha=a/R$，由（2.1），

$$N_\theta=\frac{1}{a\cos\phi}\frac{d}{d\phi}(N_\phi\cdot r)-\frac{rQ}{a\cdot\cos\phi}+rq\,\mathrm{tg}\,\phi \tag{2.4}$$

（2.4）代入（2.2）积分得，

$$N_\phi=-Q\mathrm{ctg}\phi+\frac{Q_0}{\sin\phi(1+\alpha\sin\phi)}+\frac{aq(\alpha\cos\phi-\phi+\alpha)}{\sin\phi(1+\alpha\sin\phi)} \tag{2.5}$$

式中Q_0为$\phi=0$处剪力。

设基本变量

$$\Phi=rQ/\sin\phi \tag{2.6}$$

$$Q=\frac{\Phi\sin\phi}{r}=\frac{\Phi\sin\phi}{R(1+\alpha\sin\phi)} \tag{2.7}$$

将（2.7）式代入（2.4），（2.5）得，

$$N_\phi=\frac{\alpha\cos\phi}{a(1+\alpha\sin\phi)}\Phi+\frac{Q_0}{\sin\phi(1+\alpha\sin\phi)}-\frac{aq(\phi-\alpha\cdot\cos\phi+\alpha)}{\sin\phi\cdot(1+\alpha\sin\phi)} \tag{2.8}$$

$$N_\theta=-\frac{1}{a}\frac{d\Phi}{d\phi}-\frac{Q_0}{a\sin^2\phi}+\frac{aq(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)}{a\sin^2\phi}-\frac{aq(1+\alpha\sin\phi)\cdot\cos\phi}{\alpha\cdot\sin\phi} \tag{2.9}$$

环壳几何方程为[10]

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_\phi&=\frac{1}{a}\left(\frac{dv}{d\phi}-w\right)\\ \varepsilon_\theta&=(v\cos\phi-w\sin\phi)/r\\ &=\frac{\alpha(v\cos\phi-w\sin\phi)}{a(1+\alpha\sin\phi)}\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

$$\chi=\frac{1}{a}\left(\frac{dw}{d\phi}-v\right) \tag{2.11}$$

$$k_\phi=\frac{1}{a}\frac{d\chi}{d\phi};\ \ k_\theta=\frac{\cos\phi\chi}{r} \tag{2.12}$$

物理方程为

$$\varepsilon_\phi=\frac{1}{Eh}(N_\phi-\nu N_\theta);\ \ \varepsilon_\theta=\frac{1}{Eh}(N_\theta-\nu N\phi) \tag{2.13}$$

$$M_\phi=-D(k_\phi+\nu k_\theta);\ \ M_\theta=-D(k_\theta+\nu k_\phi) \tag{2.14}$$

将（2.12），（2.13），（2.7）代入（2.3），得到

$$\frac{1+\alpha\sin\phi}{\sin\phi}\cdot\frac{d^2\chi}{d\phi^2}+\alpha\text{ctg}\phi\frac{d\chi}{d\phi}$$

$$-\frac{\alpha^2\cos^2\phi}{(1+\alpha\sin\phi)\sin\phi}\chi-\nu\alpha\chi+\frac{\alpha a}{D}\Phi=0 \tag{2.15}$$

由（2.10），（2.11）可以导得

$$\chi=\left(\varepsilon_\phi-\frac{1+\alpha\sin\phi}{\alpha\sin\phi}\varepsilon_\theta\right)\text{ctg}\phi-\frac{1}{a}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1+\alpha\sin\phi}{\sin\phi}\varepsilon_\theta\right) \tag{2.16}$$

将（2.13）代入（2.16），得

$$Eha\chi=\text{ctg}\phi\left\{\left[\alpha+\nu\frac{(1+\alpha\sin\phi)}{\sin\phi}\right]N_\phi-\left[\frac{(1+\alpha\sin\phi)}{\sin\phi}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha\nu\right]N_\theta\right\}-\frac{d}{d\phi}\left[\frac{(1+\alpha\sin\phi)}{\sin\phi}(N_\theta-\nu N_\phi)\right]$$

将（2.8)，(2.9）代入上式，计算得

$$Eha\alpha\chi=\frac{1+\alpha\sin\phi}{\sin\phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\alpha\text{ctg}\phi\cdot\frac{d\Phi}{d\phi}-\frac{\alpha^2\cos^2\phi\cdot\Phi}{(1+\alpha\sin\phi)\cdot\sin\phi}$$

$$+\nu\alpha\Phi-\frac{aQ_0(2+3\alpha\sin\phi)\cdot\cos\phi}{a(1+\alpha\sin\phi)\sin^4\phi}$$

$$+\frac{a^2q(2+3\alpha\sin\phi)\ (\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)\cdot\cos\phi}{a(1+\alpha\sin\phi)\sin^4\phi}$$

$$-\frac{2a^2q(1+\alpha\sin\phi)}{a\sin^3\phi}-(2+\nu)a^2q(1+\alpha\sin\phi) \tag{2.17}$$

引入线性微分算子

$$L(\cdots)=\frac{1+\alpha\sin\phi}{\sin\phi}\frac{d^2(\cdots)}{d\phi^2}+\alpha\text{ctg}\phi\frac{d(\cdots)}{d\phi}-\frac{\alpha^2\cos^2\phi(\cdots)}{(1+\alpha\sin\phi)\sin\phi}$$

则（2.15)、(2.17）为

$$L(\chi)-\nu\alpha\chi+\frac{\alpha a}{D}\Phi=0 \tag{2.18}$$

$$L(\Phi)+\nu a\Phi-\alpha ha E\chi=\frac{aQ_0(2+3\alpha\sin\phi)\cdot\cos\phi}{\alpha(1+\alpha\sin\phi)\sin^4\phi}+(2+\nu)a^2q(1+\alpha\sin\phi)$$

$$-\frac{a^2q(2+3\alpha\sin\phi)(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)\cos\phi}{\alpha(1+\alpha\sin\phi)\sin^4\phi}+\frac{2a^2q(1+\alpha\sin\phi)}{\alpha\sin^3\phi} \tag{2.19}$$

设复变量$S=A\Phi+B\chi$

其中 A、B 为待定常数，沿用文[2]的复变量化过程，可得

$$\left.\begin{aligned}-\alpha\left(\nu A+\frac{a}{D}B\right)=-i2\mu A\\ \alpha(AahE+\nu B)=-i2\mu B\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

μ 为待定比例常数，在 Love-Kirchhoff 假定范围内，有

$$\mu\approx\sqrt{3(1-\gamma^2)}\frac{a^2}{Rh}$$

$$B/A\approx\frac{D}{\alpha a}\cdot 2\mu i$$

$$L(S)=AL(\Phi)+BL(\chi)$$

由（2.18)、(2.19）式解出$L(\chi)$，$L(\Phi)$代回上式，并取$A=i2\mu/\alpha$，则可得

$$L(S)+2i\mu S=i\frac{2\mu}{a}\left[\frac{Q_0a\cos\phi(2+3\alpha\sin\phi)}{\alpha(1+\alpha\sin\phi)\sin^4\phi}\right.$$

$$-\frac{a^2q\cos\phi(2+3\alpha\sin\phi)}{\alpha(1+\alpha\sin\phi)\sin^4\phi}\cdot(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)$$

$$\left.+(2+\nu)a^2q(1+\alpha\sin\phi)+\frac{2a^2q(1+\alpha\sin\phi)}{\alpha\sin^3\phi}\right] \tag{2.21}$$

引入

$$F=i\frac{2\mu}{a}\left[\Phi+\frac{D}{\alpha a}\cdot 2\mu i\chi\right](1+\alpha\sin\phi)=(1+\alpha\sin\phi)S \tag{2.22}$$

代入（2.21）式，则得

$$(1+\alpha\sin\phi)\frac{d^2F}{d\phi^2}-\alpha\cos\phi\frac{dF}{d\phi}+(\alpha+2\mu i)\sin\phi F$$

$$=i2\mu\left[\frac{Q_0\cos\phi(2+3\alpha\sin\phi)}{\alpha\sin^3\phi}-\frac{aq\cos\phi(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)(2+3\alpha\sin\phi)}{\alpha\sin^3\phi}\right.$$

$$\left.+(2+\nu)aq\sin\phi(1+\alpha\sin\phi)^2+\frac{2aq(1+\alpha\sin\phi)^2}{\alpha\sin^2\phi}\right] \tag{2.23}$$

为简化（2.23），消去方程右端的分式，引进新变量V，

$$V=F-2i\mu\left[\frac{Q_0}{\alpha}-(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)\frac{aq}{\alpha}\right]\mathrm{ctg}\phi \tag{2.24}$$

并且考虑到$\alpha+2\mu i\approx 2\mu i$，（2.23）式则化为

$$(1+\alpha\sin\phi)\frac{d^2V}{d\phi^2}-\alpha\cos\phi\frac{dV}{d\phi}+2\mu i\sin\phi V=4\mu^2\left\{\left[\frac{Q_0}{a}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)\frac{aq}{a}\right]\cos\phi+\frac{\alpha i}{2\mu}(2+\nu)aq\sin\phi(1+\alpha\sin\phi)^2\right\}$$

(2.25)

因为$\frac{\alpha}{2\mu}=\frac{1}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{h}{a}\ll 1$，上式中含$\frac{\alpha}{2\mu}$项可以略去，这种忽略在$\phi\neq\pm\frac{\pi}{2}$的区域，误差在薄壳理论误差范围之内。在$\phi=\pm\pi/2$的邻域，式（2.25）的非齐次项$\ll 1$，这种忽略在渐近意义上是允许的，于是（2.25）式简化为：

$$(1+\alpha\cos\phi)\frac{d^2V}{d\phi^2}-\alpha\cos\phi\frac{dV}{d\phi}+2\mu i\sin\phi V$$

$$=4\mu^2[Q_0-(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)aq]\cos\phi/a \tag{2.26}$$

上式左端与 Новожилов[1]环壳复变量方程相同。（2.26）式即为自重荷载下环壳基本方程。

三、特　　解

注意到

$$\phi\cos\phi=-\frac{1}{2}\sin\phi+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\sin n\phi$$

$$\cos^2\phi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\phi)$$

我们将方程（2.26）改写为，

$$(1+\alpha\sin\phi)\frac{d^2V}{d\phi^2}-\alpha\cos\phi\frac{dV}{d\phi}+2\mu i\sin\phi V=\frac{4\mu^2}{a}aq\left[\frac{\alpha}{2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{Q_0}{aq}-\alpha\right)\cos\phi+\frac{1}{2}\alpha\cos 2\phi-\sum_{h=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\sin n\phi+\frac{1}{2}\sin\phi\right]$$

(3.1)

设（3.1）式特解为，

$$V^*=\left[B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin n\phi+B_n\cos n\phi)\right]\cdot\frac{4\mu^2}{a}\cdot aq \tag{3.2}$$

代入（3.1）式左端，比较同类项系数，可得

$$(-\alpha+\mu i)A_1=\alpha/2 \tag{3.3}$$

$$(-3\alpha+\mu i)A_2-B_1=\frac{Q_0}{aq}-\alpha \tag{3.4}$$

$$2\mu i B_0 - A_1 + (3\alpha - \mu i) B_2 = 1/2 \tag{3.5}$$

$$-4B_2 + (-6\alpha + \mu i) A_3 - \mu i A_1 = \alpha/2 \tag{3.6}$$

及

$$-B_n n^2 + \left[-\frac{\alpha}{2}(n+1)(n+2) + \mu i\right] A_{n+1} + \left[\frac{\alpha}{2}(n-1)(n-2) - \mu i\right] \cdot A_{n-1} = 0 \qquad (n \geqslant 3) \tag{3.7}$$

$$-A_n n^2 + \left[\frac{\alpha}{2}(n+1)(n+2) - \mu i\right] B_{n+1} + \left[-\frac{\alpha}{2}(n-1)(n-2) + \mu i\right] \cdot B_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{2n}{n^2-1} \qquad (n \geqslant 2) \tag{3.8}$$

由于非齐次项交叉存在，采用通常环壳问题的递推办法计算（3.7）、（3.8）各项系数是难此奏效的，我们直接采用（3.3）～（3.8）式组成的方程组计算系数。方程组可分为互相独立的两组，一组取（3.7）n为偶数，（3.8）n为奇数的方程，并补充（3.3），（3.6）式，当算至项数n等于N时，可取B_{N+1}及A_{N+1}为0，即可解出A_1、A_3、…、A_{2n-1}、…，及B_2、B_4、…、B_{2n}、…。另一组取（3.7）n为奇数，（3.8）n为偶数的方程，并补充上（3.4），同样可解出A_2、A_4、…、A_{2n}、…及B_1、B_3、…、B_{2n-1}、…。（3.5）式用于确定B_0，于是特解（3.2）可以完全确定。

四、齐 次 解

钱伟长、郑思梁已得到方程（2.26）齐次解的两个线性无关解[2]

$$\left.\begin{aligned} V_{(1)} &= \exp\left[(\beta_1 + i\gamma_1)\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot [f_1(\phi) + i f_2(\phi)] \\ V_{(2)} &= \exp\left[-(\beta_1 + i\gamma_1)\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot [q_1(\phi) + i q_2(\phi)] \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

特征指数$\lambda_1 = \beta_1 + i\gamma$与$\alpha$和$\mu$有关，文[2]已列出其数值表格。

实函数

$$\left.\begin{aligned} f_1(\phi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\phi - q_n' \sin n\phi) \\ f_2(\phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (p_n' \sin n\phi + q_n \cos n\phi) \\ g_1(\phi) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (p_n \cos n\phi + q_n' \sin n\phi) \\ g_2(\phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-p_n' \sin n\phi + q_n \cos n\phi) \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

上式中

$$p_n=(a_n+a_{-n})/2, \qquad q_n=(b_n+b_{-n})/2$$

$$p'_n=(a_n-a_{-n})/2, \qquad q'_n=(b_n-b_{-n})/2$$

而 $$c_n/c_0=(a_n+ib_n)/2, \qquad c_{-n}/c_0=(a_{-n}+ib_{-n})/2$$

c_n 和 c_{-n} 由递推式确定

$n>0$ 时

$$\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{-\left\{\mu-\frac{ai}{2}[\lambda+i(n-1)][\lambda+i(n-2)]\right\}}{(\lambda+in)^2-\left\{\mu-\frac{ai}{2}[\lambda+i(n+1)][\lambda+i(n+2)]\right\}\frac{C_{n+1}}{C_n}}$$

$n<0$ 时

$$\frac{C_n}{C_{n+1}}=\frac{\left\{\mu-\frac{ai}{2}[\lambda+i(n+1)][\lambda+i(n+2)]\right\}}{(\lambda+in)^2+\left\{\mu-\frac{ai}{2}[\lambda+i(n-1)][\lambda+i(n-2)]\right\}\frac{C_{n-1}}{C_n}}$$

$n=0$ 时

$$\left[\mu-\frac{ai}{2}(\lambda-i)(\lambda-2i)\right]\frac{C-1}{C_0}+\lambda^2-\left[\mu-\frac{ai}{2}(\lambda+i)(\lambda+2i)\right]\frac{C_1}{C_0}=0$$

于是，方程（2.26）的一般解可写做

$$V=K_1V_{(1)}+K_2V_{(2)}+V^*$$

式中K_1，K_2为待定复常数，可由边界条件确定。

五、内力和位移

将（2.6）、（2.22）代入（2.24）式即得

$$V=-\frac{4\mu^2D}{a^2\alpha}(1+\alpha\sin\phi)\chi+i2\mu\left[\frac{Q}{\alpha}\frac{(1+\alpha\sin\phi)^2}{\sin\phi}\right.$$

$$\left.-\frac{Q_0}{\alpha}\cdot\mathrm{ctg}\phi+(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)\frac{aq}{\alpha}\mathrm{ctg}\phi\right] \tag{5.1}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}\chi&=\frac{-\mathrm{Re}V}{Eh\alpha(1+\alpha\sin\phi)}\\ Q&=\frac{\alpha}{2\mu}\frac{\sin\phi\,\mathrm{Im}V}{(1+\alpha\sin\phi)^2}+\frac{\cos\phi\cdot Q_0}{(1+\alpha\sin\phi)^2}-\frac{aq\cos\phi(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)}{(1+\alpha\sin\phi)^2}\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

由（2.8），（2.9）式

$$N_\phi=\frac{-\alpha\cos\phi\,\mathrm{Im}V}{2\mu(1+\alpha\sin\phi)^2}+\frac{(\alpha+\sin\phi)Q_0}{(1+\alpha\sin\phi)^2}-\frac{aq(\sin\phi+\alpha)(\phi-\alpha\cdot\cos\phi+\alpha)}{(1+\alpha\sin\phi)^2} \tag{5.3}$$

$$N_\theta=-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{d\phi}\left[\frac{\mathrm{Im}V}{(1+\alpha\sin\phi)}\right]-\frac{\sin\phi+\alpha}{(1+\alpha\sin\phi)^2}[Q_0$$

$$-aq(\phi-\alpha\cos\phi+\alpha)]-aq\cos\phi \tag{5.4}$$

由（2.14）、（2.12）、（5.2）式，得

$$\left.\begin{aligned}M_\phi&=\frac{a\alpha}{4\mu^2}\left\{\frac{d}{d\phi}\left[\frac{\mathrm{Re}V}{(1+\alpha\sin\phi)}\right]\right\}+\frac{a\alpha^2\nu\cos\phi\,\mathrm{Re}V}{4\mu^2(1+\alpha\sin\phi)^2}\\M_\theta&=\frac{a\alpha}{4\mu^2}\left\{\nu\frac{d}{d\phi}\left[\frac{\mathrm{Re}V}{(1+\alpha\sin\phi)}\right]+\frac{\alpha\cos\phi}{(1+\alpha\sin\phi)^2}\mathrm{Re}V\right\}\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

由图 1

$$y=v\cos\phi-w\sin\phi$$
$$z=v\sin\phi+w\cos\phi$$

易于导出[1]

$$y=\frac{a}{\alpha Eh}(1+\alpha\sin\phi)(N_\theta-\nu N_\phi)$$

$$z=z_0-\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{a\cos\phi\mathrm{Re}V}{Eh(1+\alpha\sin\phi)}d\phi\tag{5.6}$$

式中积分常数Z_0由位移零位置规定决定。

六、算　例

作为本文结果的应用，我们计算了图 2 所示自重荷载下的环壳形结构的两个算例。

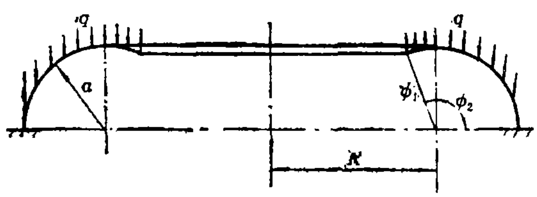


图 2

算例 1　$a=10$m，$R=33$m，$h=0.3$m，$E=3.3\times10^5$kg/cm^2，$\nu=0.2$，容重 $\gamma=0.0025$ kg/cm^3，上边界$\phi_1=-15°$，边界自由，下边界$\phi_2=90°$，边界固定夹紧。

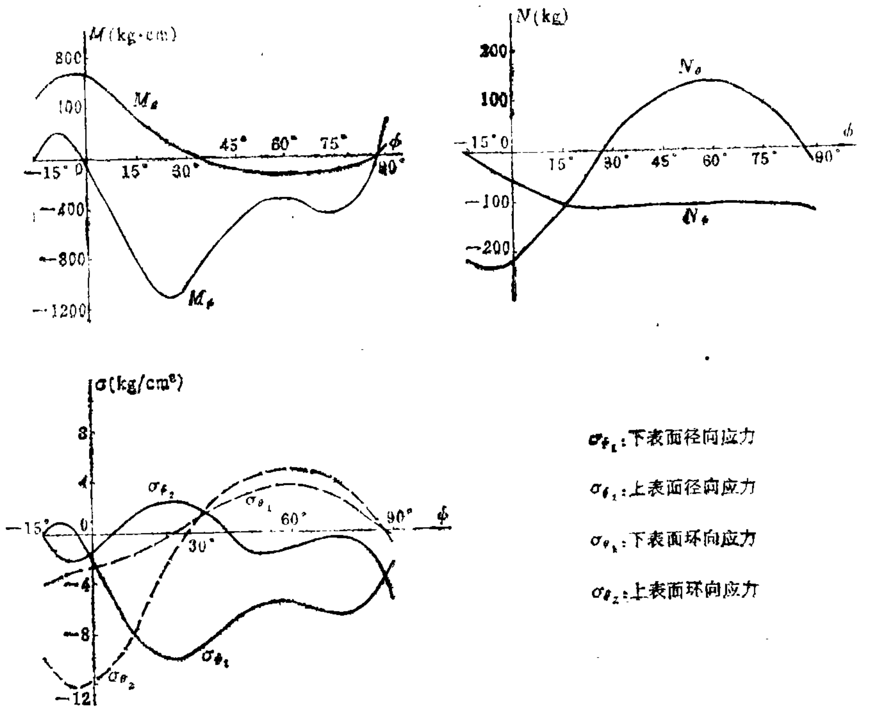
算例 2　上边界 $\phi_1=0$，边界自由，下边界 $\phi_2=90°$，边界固定夹紧，其余量同算例1.

算例 1 和算例 2 的内力及应力计算结果分别在图 3，图 4 中示出，位移由图 5 示出。

算例 1 表明，$\sigma_{\phi\max}$在大约$\phi=22.5°$处，下表面为压应力，上表面为拉应力，其值为$\sigma_{\phi\max上}=2.6$kg/cm^2，$\sigma_{\phi\max下}=10.1$kg/cm^2，由于$|\sigma_{\phi\max下}|\gg\sigma_{\phi\max上}$，这对于作为屋顶结构是有利的。$\sigma_\theta$在$\phi$约为60°处，上下表面均出现拉应力的极值，其值约 4～6 kg/cm^2。

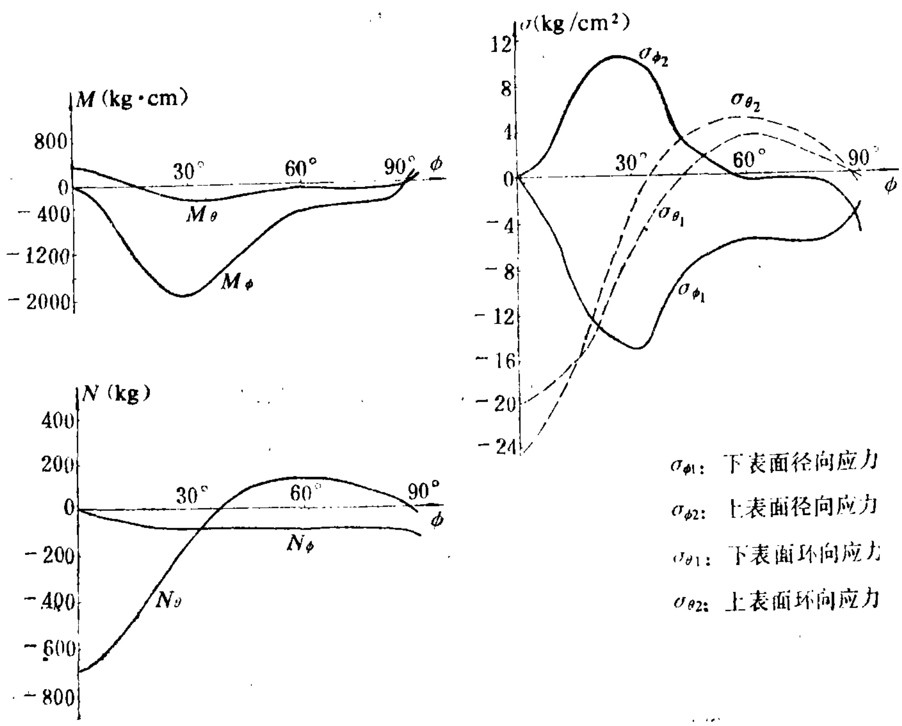
算例 2 表明，在大约$\phi=30°$处，σ_ϕ有极值。下表面为压应力，上表面为拉应力，其值均较算例 1 大。σ_θ仍在$\phi=60°$附近出现最大拉应力，其值约4～6kg/cm^2，在$\phi=0$，即上边界处出现最大压应力，其值约20～25kg/cm^2。

实际上算例 1 为算例 2 的上边界伸出 15° 而构成。结果导致结构的柔韧性大为增加（图 5），最大位移$z_{\max}$由0.87cm增至2.1cm。但其应力的分布却趋于更为平缓，在研究环壳形屋顶结构时，注意到这种现象是有益的。



M (kg·cm)
N (kg)
σ (kg/cm²)
σ_{ϕ_1}：下表面径向应力
σ_{ϕ_2}：上表面径向应力
σ_{θ_1}：下表面环向应力
σ_{θ_2}：上表面环向应力

图 3



M (kg·cm)
N (kg)
σ (kg/cm²)
$\sigma_{\phi 1}$：下表面径向应力
$\sigma_{\phi 2}$：上表面径向应力
$\sigma_{\theta 1}$：下表面环向应力
$\sigma_{\theta 2}$：上表面环向应力

图 4

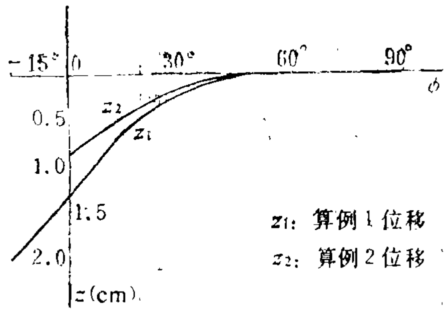


图 5

七、结　　语

本文结果可用于分析自重荷载下的轴对称环壳结构的应力和位移。计算表明，本文选用的 Fourier 级数形式特解收敛性较好。

本文引用的文[2]齐次解（35）限于$\alpha<1$的情形，因此本文解答适用于$\alpha<1$的环壳。

本文工作得到孙仁博同志的大力帮助，并承肖明心，欧茂才同志提出有益意见，作者深表感谢。

参 考 文 献

[1] Новожилов В. В.，《薄壳理论》，北京石油学院译，科学出版社（1959）。
[2] 钱伟长、郑思梁，轴对称圆环壳的一般解，应用数学和力学，1，3（1980）。
[3] 钱伟长，半圆弧波纹管的计算，清华大学学报，19，1（1979）。
[4] 黄黔、陈山林、钱伟长，关于轴对称环壳一般解的讨论，应用数学和力学 2，2（1981）。
[5] 陈山林，S型波纹管的轴对称应力和位移，成都科技大学学报，3（1982）。
[6] 王玳瑜、邹定祺，圆弧形波纹壳的应力和位移分析，重庆建筑工程学院学报，1（1983）。
[7] 王玳瑜、邹定祺、陈山林，圆弧形波纹膜片的计算，应用数学和力学，6，4（1985）。
[8] 钱伟长、吴明德，U型波纹管大挠度问题的摄动解法，应用数学和力学，4，5（1983）。
[9] 钱伟长、樊大钧、黄黔，环壳理论与直交异性板理论在计算三圆弧波纹膜片上比较，应用数学和力学，5，1（1984）。
[10] 徐芝纶，《弹性力学》下册，人民教育出版社（1979）。

The Ring Shells under Gravitative Loads

Wang Dai-yu　　Chen Shan-lin　　Wu Guo-ping

(Chongqing Institute of Architecture and Engineering, Chongqing)

Abstract

This paper gives Novozlov's equation (ref. [1]) in a simple style of ring shells with constant thickness under the action of dead loads. By means of Fourier series, the special solution of the equation is established. Using the results of the homogeneous solution in ref. [2], we find out the general solution of the problem, and derive the expressions of stress and displacement.

Two examples are given as the application of the above results.