

# 对应不同类型变分原理的旋转 薄壳轴对称单元

张社光 陈万吉

(上海市应用数学和力学研究所) (大连工学院工程力学研究所)

(唐立民推荐, 1985年3月20日收到)

## 摘 要

本文在一定范围内, 统一考察基于不同变分原理建立的有限元模型中, 泛函约束条件的不同对单元性态的影响. 文中以旋转薄壳轴对称单元(简称 TSR 单元)为例, 采用相同的曲边单元几何描述, 推导了七种 TSR 杂交单元和二种 TSR 位移协调元, 它们分别对应于三类杂交变分原理及最小势能原理. 通过单刚列式分析和波纹壳等数值算例比较, 分析了不同模型的性能异同和应用上的适应性与局限性; 讨论了两类模型间的相互关系; 指出了 TSR 杂交位移元的一个发散条件, 并推荐了二种性能较理想的 TSR 单元.

## 一、引 言

变分原理是建立有限元模型的理论依据之一. 除基于极值原理的位移协调模型、平衡模型外, 近二十年来, 应用 Lagrange 乘子法, 不同程度地放松泛函约束条件, 得到了完全的或各类不完全的广义变分原理, 以及相应的不同形式的有限元模型. 例如: Jonse<sup>[1]</sup>(1964) 为放松单元间的位移连续条件, 引入  $L$  乘子, 推导了单元模型; 卞学锁<sup>[2]</sup>(1964) 通过引入单元边界的位移协调函数和单元域内的平衡应力函数, 首创了基于修正的余能原理的杂交应力模型; 董平<sup>[3]</sup>(1970)、Atluri<sup>[4]</sup>(1971)、Wolf<sup>[5]</sup>(1973) 分别由不同的变分原理出发, 给出了各自的单元模型; 唐立民<sup>[6]</sup>(1979) 运用多变量有限元的概念, 通过离散单元应变, 建立了拟协调模型, 后经文[7]的工作, 导出了这种模型同 Hu-Washizu 原理的联系. 钱伟长<sup>[8]</sup>(1983) 提出了高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理, 在这前后, 国内外有关文献[9,10]分别构造了与之相应的有限元模型. 目前, 可供建立单元模型的变分原理已有多种形式, 新形式的泛函仍在被继续提出, 因此, 有必要在一定范围内, 统一研究对应不同类型变分原理的有限元模型, 了解约束条件对单元性态的影响, 以便针对具体问题, 选择较理想的单元类型, 提高有限元分析的计算效率, 在一定程度上还可避免重复性研究和应用上的盲目性.

考虑到旋转薄壳轴对称单元作为一维问题, 便于构造多种模型进行比较, 同时作为壳体, 具有较复杂的基本方程, 便于考察单元域内约束条件的放松与满足对单元性态的影响. 因此本文选择此类单元作为比较对象. 所构造的单元均采用相同的几何描述和相同的单元节点位移参数. 所考察的单元性能主要包括: 收敛性, 求解精度和效率, 刚体位移描述以及模型间的相互联系.

## 二、基本方程的矩阵表示

文献[11]中的基本方程经整理后可得:

## 1、几何方程:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R_s} \\ \frac{\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r} \\ d & 1 \\ \frac{\sin\phi}{r} & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\text{简记为: } \varepsilon = E_1(\nabla)u \quad (2.2)$$

其中:  $E_1(\nabla)$  为由 (2.1) 式定义的几何方程微分算子矩阵,  $\varepsilon = \{\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \chi_s, \chi_\theta\}^T$ ,  $u = \{U, W\}^T$  分别为应变列向量和位移列向量.

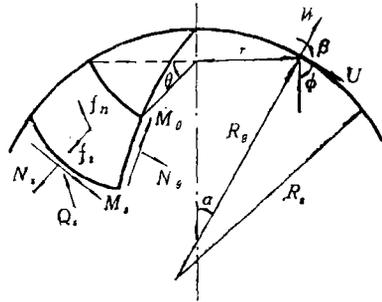


图 1

## 2、平衡方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r & -\frac{\sin\phi}{r} & \frac{1}{rR_s} \frac{d}{ds} r & -\frac{\sin\phi}{rR_s} \\ -\frac{1}{R_s} & -\frac{\cos\phi}{r} & \frac{1}{r} \frac{d^2}{ds^2} r & -\frac{1}{r} \frac{d}{ds} \sin\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_s \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\text{简记为: } E(\nabla)\sigma + \bar{f} = 0 \quad (2.4)$$

其中:  $E(\nabla)$  为由 (2.3) 式定义的平衡微分算子矩阵,  $\sigma = \{N_s, N_\theta, M_s, M_\theta\}^T$  和  $\bar{f} = \{f_s, f_n\}^T$  分别为内力列向量和体力列向量.

## 3、物理方程:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \frac{Et}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & & \\ \mu & 1 & & \\ & & \frac{t^2}{12} & \frac{\mu t^2}{12} \\ & & \frac{\mu t^2}{12} & \frac{t^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$



$$q^e = \{U_i, W_i, \beta_i, U_j, W_j, \beta_j\}^T \quad (3.6)$$

#### 四、模型分类 泛函表达式 单刚列式

表 1 中, I、II、III、IV 为泛函类型序号, 分别对应无约束泛函、含物理约束泛函、含平衡或协调约束泛函以及最小势能泛函。

将表 1 中所定义的场变量代入相应的泛函表达式中, 积分得到如下矩阵:

$$\left. \begin{aligned} H &= \int_{V_e} N^T A N dV & H_1 &= \int_{V_e} P^T a P dV \\ W &= \int_{V_e} [E(\nabla) P]^T F dV & D &= \int_{V_e} P^T N dV \\ W_1 &= \int_{\partial V_e} [E_2(\nu) P]^T F dB & G &= \int_{\partial V_e} [E_2(\nu) P]^T L dB \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$T \text{ 为广义位移参数 } \alpha \text{ 到单元节点位移参数 } q^e \text{ 的变换矩阵, 满足: } \alpha = T^{-1} q^e \quad (4.2)$$

#### 五、单元模型编号及场变量选取

单元模型编号及场变量选取, 见表 2。

#### 六、单刚列式分析

1、在第 I 类和第 II 类模型中, 设位移  $u$  及边界位移  $\tilde{u}$  均按节点参数插值, 应变  $\epsilon$  和应力  $\sigma$  的插值函数矩阵  $N$ 、 $P$  分别取为如下形式:

$$N = \text{diag}[\Phi_r, \Phi_r, \Phi_r, \Phi_r] \quad (6.1a)$$

$$P = \text{diag}[\Phi_i, \Phi_i, \Phi_i, \Phi_i] \quad (6.1b)$$

其中:  $\Phi_r = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r]$ ,  $\Phi_i = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i]$  ( $r, i = 1, 2, \dots$ ),  $\phi_i (i = 1, 2, \dots)$  为插值基函数。同时, 设弹性矩阵  $A$  及弹性柔度矩阵  $a$  在单元内为常数阵, 则有下列结论成立:

a)、 $r \geq i$  时,  $K_{MIB} = K_{MIA}$  (6.2)

b)、 $r \geq i$  时, 模型 MIB 的物性关系在单元内成立。

c)、 $r = i$  时,  $K_{MIA} = K_{MIB}$  (6.3)

d)、当 a)、c) 同时成立时, 第 I 类与第 II 类单元模型的单刚列式相等。

e)、若取  $N = \text{diag}[\Phi_{r_1}, \Phi_{r_1}, \Phi_{r_2}, \Phi_{r_2}]$  (6.4a)

$$P = \text{diag}[\Phi_{i_1}, \Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \Phi_{i_2}] \quad (6.4b)$$

则对于  $r_1 \geq i_1$ ,  $r_2 \geq i_2$  同时成立的情况, 仍可推出上述结论, 且适用于板、平面及三维问题的类似情况。

$r < i$  的情况见第七节算例 1。

以下只给出结论 a) 的证明, 其余结论可作类似推证, 不再赘述。

**证明** 由表 1 中,  $K_{MIB}$  与  $K_{MIA}$  的列式知只需考察矩阵  $DH^{-1}D^T$  与  $H_1$  的关系。

由定义:  $D = \int_{V_e} P^T N dV = \text{diag}[D_{ir}, D_{ir}, D_{ir}, D_{ir}]$  (6.5)

表 1 模型分类 泛函表达式 单元刚度阵

类型	模型	泛函表达式	变分原理	约束条件	场变量	单元刚度阵
I	MIA	$\Pi_{MIA} = \sum_V \int_V \left[ -\frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon + \sigma^T \varepsilon + (E(\nabla)\sigma + f)^T u \right. \\ \left. + \lambda \left( \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon + \frac{1}{2} \sigma^T \alpha \sigma - \sigma^T \varepsilon \right) \right] dV \\ - \sum_S \int_S \partial V_c [E_2(\nu)\sigma]^T \tilde{u} dB + \int_{B\sigma} \bar{P}^T \tilde{u} dB$	更一般的广义变分原理	—	$\varepsilon = N\alpha$ $\sigma = P\beta$ $u = Fq$ $\tilde{u} = Lq$	$K_{MIA} = (G-W)^T [(1-\lambda)DH^{-1}D^T + \lambda H_1]^{-1} (G-W)$
	MIB	$\Pi_{MIB} = \Pi_{MIA}  _{\lambda=0}$	H-W变分原理	—	同上	$K_{MIB} = K_{MIA}  _{\lambda=0}$
	MIA	$\Pi_{MIA} = \Pi_{MIA}  _{\lambda=1}$	Reissner变分原理	$\varepsilon = \alpha\sigma$	$\sigma = P\beta$ $u = Fq$ $\tilde{u} = Lq$	$K_{MIA} = K_{MIA}  _{\lambda=1}$
II	MIB	$\Pi_{MIB} = \sum_V \int_V \left[ \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon + (E(\nabla)(A\varepsilon) + f)^T u \right] dV \\ - \sum_S \int_S \partial V_c [E_2(\nu)(A\varepsilon)]^T \tilde{u} dB + \int_{B\sigma} \bar{P}^T \tilde{u} dB$	同上	$\sigma = A\varepsilon$	$\varepsilon = N\alpha$ $u = Fq$ $\tilde{u} = Lq$	$K_{MIB} = (G-W)^T \cdot H^{-1} (G-W)$
	MIA	$\Pi_{MIA} = \sum_V \int_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon - f^T u \right) dV \\ - \sum_S \int_S \partial V_c [E_2(\nu)\sigma]^T (u - \tilde{u}) dB - \int_{B\sigma} \bar{P}^T \tilde{u} dB$	P. Tong 杂交变分原理	$\varepsilon = E_1(\nabla)u$	$u = Fa$ $\sigma = P\beta$ $\tilde{u} = Lq$	$K_{MIA} = G^T [WH^{-1}W^T]^{-1} G$
	MIB	$\Pi_{MIB} = \sum_V \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \alpha \sigma dV \\ - \sum_S \int_S \partial V_c [E_1(\nu)\sigma]^T \tilde{u} dB + \int_{B\sigma} \bar{P}^T \tilde{u} dB$	T. H. H. Pian 杂交变分原理	$E(\nabla)\sigma = 0$ $\varepsilon = \alpha\sigma$	$\sigma = P\beta$ $\tilde{u} = Lq$	$K_{MIB} = G^T H_1^{-1} G$
III	MIC	$\Pi_{MIC} = \sum_V \int_V \left[ \sigma^T \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon \right] dV \\ - \sum_S \int_S \partial V_c [E_2(\nu)\sigma]^T \tilde{u} dB + \int_{B\sigma} \bar{P}^T \tilde{u} dB$	Ref. [7]	$E(\nabla)\sigma = 0$	$\varepsilon = N\alpha$ $\sigma = P\beta$ $\tilde{u} = Lq$	$K_{MIC} = G^T [DH^{-1}D^T]^{-1} G$
	MVA	$\Pi_{MVA} = \sum_S \int_S \partial V_c \left[ \frac{1}{2} \varepsilon^T A \varepsilon - f^T u \right] dV - \int_{B\sigma} \bar{P}^T \tilde{u} dB$	最小势能原理	$\varepsilon = E_1(\nabla)u$ $\sigma = A\varepsilon$	$u = Fa$ $\tilde{u} = Lq$	$K_{MVA} = T^{-T} H T^{-1}$

表 2 单元模型编号 单元场变量选取

类型	模型号	标识	$\varepsilon$	$\sigma$	$u$	$\bar{u}$
I	M1A1		$N = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}$	$P = \begin{bmatrix} 1 & s^2 & 0 \\ 1 & s^2 & 0 \\ 0 & 1 & s^2 \end{bmatrix}$	$F = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s^2 \end{bmatrix} T^{-1}$	$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	M1A1	△	—	同上	同上	同上
	M1A2	○	—	$P = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}$	同上	同上
II	M1A3	□	—	$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}$	同上	同上
	M1A1	⊗	$N = E_1(\nabla)F$	$P = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}$	$F = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & 0 \\ 0 & 1 & s^2 & s^3 \end{bmatrix}$	同上
	M1B1	⊙	—	Ref. [14]	—	同上
IV	M1C1	⊠	$N = \begin{bmatrix} 1 & s^2 & 0 \\ 1 & s^2 & 0 \\ 0 & 1 & s^2 \end{bmatrix}$	同上	—	同上
	M1A1	▲	$N = E_1(\nabla)F$	—	$F = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s^2 \end{bmatrix} T^{-1}$	—
	M1A2	▣	$N = E_1(\nabla)F$	—	$F = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & 0 \\ 0 & 1 & s^2 & s^3 \end{bmatrix} T^{-1}$	—

$$H = \int_V N^T A N dV = A_r \cdot \text{diag}[H_{rr}, H_{rr}, H_{rr}, H_{rr}] = A_r \bar{H} \quad (6.6)$$

$$H_1 = \int_V P^T a P dV = a_t \cdot \text{diag}[P_{tt}, P_{tt}, P_{tt}, P_{tt}] \quad (6.7)$$

其中:  $D_{i,r} = \int_V \Phi_i^T \Phi_r dV, H_{rr} = \int_V \Phi_r^T \Phi_r dV, P_{tt} = \int_V \Phi_t^T \Phi_t dV$  (6.8)

$$A_r = \frac{Et}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} I_{rr} & \mu I_{rr} & & \\ \mu I_{rr} & I_{rr} & & \\ & & \frac{t^2}{12} I_{rr} & \frac{\mu t^2}{12} I_{rr} \\ & & \frac{\mu t^2}{12} I_{rr} & \frac{t^2}{12} I_{rr} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$a_t = A_t^{-1} = \frac{1}{Et} \begin{bmatrix} I_{tt} & -\mu I_{tt} & & \\ -\mu I_{tt} & I_{tt} & & \\ & & \frac{12}{t^2} I_{tt} & -\frac{12\mu}{t^2} I_{tt} \\ & & -\frac{12\mu}{t^2} I_{tt} & \frac{12}{t^2} I_{tt} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$I_{rr}, I_{tt}$  分别为  $r \times r$  阶和  $t \times t$  阶单位阵。

由式(6.5)、(6.6)及(6.9)、(6.10)有:

$$DH^{-1}D^T = D\bar{H}^{-1}A_r^{-1}D^T = D\bar{H}^{-1}a_t D^T$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{Et} D\bar{H}^{-1} \begin{bmatrix} I_{rr}D_{i,r}^T & -\mu I_{rr}D_{i,r}^T & & \\ -\mu I_{rr}D_{i,r}^T & I_{rr}D_{i,r}^T & & \\ & & \frac{12}{t^2} [ I_{rr}D_{i,r}^T & -\mu I_{rr}D_{i,r}^T ] \\ & & -\mu I_{rr}D_{i,r}^T & I_{rr}D_{i,r}^T \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{Et} D\bar{H}^{-1} \begin{bmatrix} D_{i,r}^T I_{tt} & -\mu D_{i,r}^T I_{tt} & & \\ -\mu D_{i,r}^T I_{tt} & D_{i,r}^T I_{tt} & & \\ & & \frac{12}{t^2} [ D_{i,r}^T I_{tt} & -\mu D_{i,r}^T I_{tt} ] \\ & & -\mu D_{i,r}^T I_{tt} & D_{i,r}^T I_{tt} \end{bmatrix} \\ &= D\bar{H}^{-1}D^T a_t = a_t D\bar{H}^{-1}D^T \\ &= a_t \cdot \text{diag}[Q_{ii}, Q_{ii}, Q_{ii}, Q_{ii}] \end{aligned} \quad (6.11)$$

其中:  $Q_{ii} = D_{i,r} H_{rr}^{-1} D_{i,r}^T$ 。

只需考虑  $r > t$  的情况, 不妨设:  $r = t + s, s = 1, 2, \dots$ 。

将矩阵  $H_{rr}$  分块表示为:

$$H_{rr} = \int_V \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 \cdots \phi_1 \phi_t & \phi_1 \phi_{t+1} \cdots \phi_1 \phi_{t+s} \\ \vdots & \vdots \\ \phi_s \phi_1 \cdots \phi_s \phi_t & \phi_s \phi_{t+1} \cdots \phi_s \phi_{t+s} \\ \hline \phi_{s+1} \phi_1 \cdots \phi_{s+1} \phi_t & \phi_{s+1} \phi_{t+1} \cdots \phi_{s+1} \phi_{t+s} \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{t+s} \phi_1 \cdots \phi_{t+s} \phi_t & \phi_{t+s} \phi_{t+1} \cdots \phi_{t+s} \phi_{t+s} \end{bmatrix} dV$$

$$= \begin{bmatrix} X_{it} & Y_{is} \\ Y_{it}^T & Z_{ss} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

类似地:

$$D_{ir} = [X_{it}, Y_{is}], \quad P_{it} = [X_{it}] \quad (6.13)$$

$$\text{作变换: } D_{ir} = [X_{it}, Y_{is}] = I_{ir} H_{rr} \quad (6.14)$$

其中:  $I_{ir} = [I_{it}, 0_{is}]$ ,  $0_{is}$  为  $t \times s$  阶零矩阵

于是由式(6.12)至(6.14)有:

$$\begin{aligned} Q_{it} &= D_{ir} H_{rr}^{-1} D_{ir}^T \\ &= I_{ir} D_{ir}^T = [I_{it}, 0_{is}] \begin{Bmatrix} X_{it}^T \\ Y_{is}^T \end{Bmatrix} \\ &= [X_{it}^T] = P_{it} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\text{从而推出: } DH^{-1}D = H_1 \quad (6.16)$$

$$\text{亦即: } K_{MIB} = K_{MIA} \quad (6.17)$$

2、通过表1中的单刚列式和相应的矩阵定义,可分析得如下结果:

a)、第 I、II 类模型中的  $H$ 、 $H_1$  矩阵,可分块求逆,或可写为显式。 $\sigma$  (或  $\epsilon$ ) 在旋转壳对称轴处不存在奇异性。

b)、第 III 类模型中,  $K_{MIA}$  中的  $H$  阵是由单元位移函数经协调微分算子作用后,积分得到。因形成单刚的多项式形式的位移函数不能预先排除旋转壳刚体位移,故随网格加密,  $H$  阵愈接近奇异,因  $K_{MIA}$  中含  $H$  逆阵  $H^{-1}$ , 所以单刚将导致病态。后面将给出算例,验证此模型确实发散,因此,应用此模型于双曲壳体分析,应避免  $H$  阵求逆,如可采用一次求逆的单刚列式,即:  $K_{MIA} = G^T W_1^{-T} H W_1^{-1} G$ , 但对 TSR 模型,这将导致位移协调元。

$K_{MIB}$  中,  $H_1$  阵的形成需选取平衡应力场,这对旋转壳问题较棘手,文[14]中给出了平衡应力函数矩阵  $P$ 。因  $K_{MIB}$  中元素在  $\alpha = 0^\circ$  和  $\alpha = 90^\circ$  处存在奇异性,使此模型不能退化求解圆柱壳或圆板。同时,  $H_1$  阵需整体求逆,计算量较大。模型  $K_{MIC}$  同样存在上述问题。

c)、位移协调模型  $K_{MVA}$  的单刚列式简洁。因应力计算需通过几何方程,故对称轴处应力奇异。

## 七、数值结果比较

以上述列式分析为基础,有选择地进行各模型的数值比较。构造了以下单元: MIIA1, MIIA2 和 MIIA3 (拟协调元或广义杂交元)、MIIA1 (杂交位移元)、MIIA1 (杂交应力元)、MIIA1 (广义杂交应力元)、MIIA1 (位移协调元)、MIIA2 (含二个内部位移自由度的位移协调元) 以及含参数  $\lambda$  的 MIIA1 (对应泛函 MIIA 的广义杂交元)。

1、不同  $\lambda$  值对应的模型 MIIA1 的收敛情况 (图3)。

由图3可见,网格稍加密,各不同  $\lambda$  值对应的单元模型差别趋于消失,此时物性关系的放松对单元性质影响不大,与文[10]的结论一致。

2、浅球壳受均布外压作用。图4示出随网格加密, MIIA1 不收敛,与第六节2的结论相吻合图中还反映出 MIIA1 与 MIIA1 具有近乎相同的位移收敛率。

3、波纹壳受均布轴压作用,见图5。

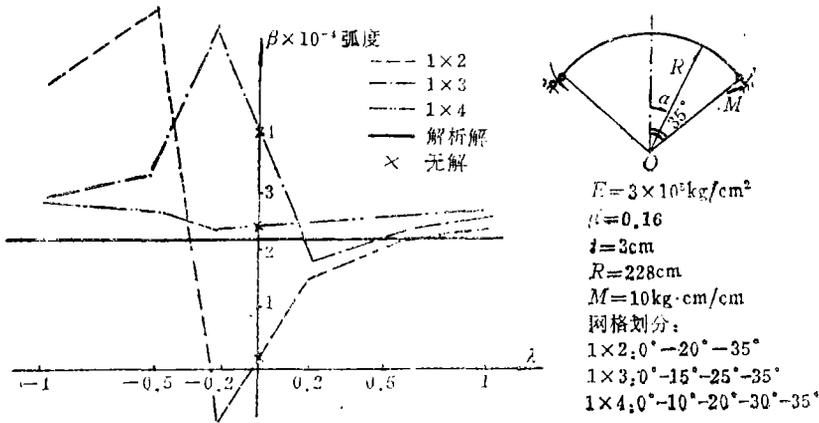


图3 模型 M I A1 对不同  $\lambda$  值 ( $\lambda \neq 0$ )  $\alpha = 35^\circ$  处转角  $\beta$  随网格加密的收敛情况

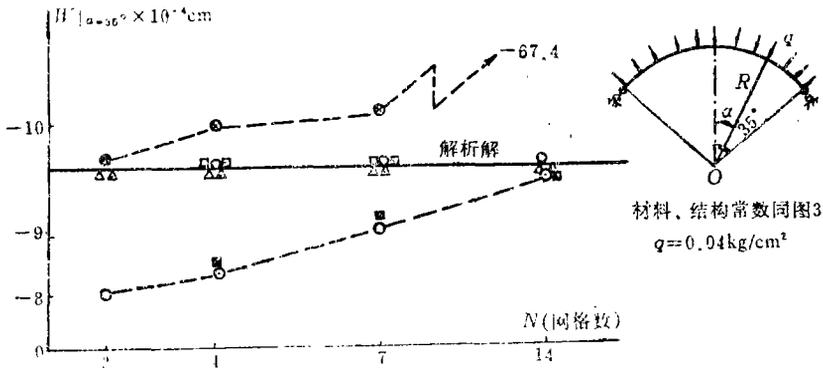


图4 简支球壳受法向均布压力作用、 $W|_{\alpha=35^\circ}$  的收敛情况

各模型在波纹壳计算上表现出明显差别，其中以 M IV A2, M II A3 和 M III B1 为一组，M IV A1, M II A1 和 M II A2 为另一组，在 36 个等分网格下，前一组的内力解已基本达到精度，而后一组的偏差仍很大。考察距壳顶端第三个单元的单刚特征值看到，模型 M II A3, M IV A2 和 M III B1 的最小特征值量级分别为  $10^{-5}$ ,  $10^{-3}$  和  $10^{-1}$ ，而模型 M IV A1, M II A1 和 M II A2 的相应的特征值量级均为  $10^0$ 。同时，第二组模型的膜力分布跳跃很大。这个算例中，以 M II A3 的效率最高，既不存在较繁的数值积分（如 M IV A1, M IV A2）也不存在矩阵求逆（如 M III B1）。

### 八、结 语

- 1、基于第 I、II 类杂交变分原理的 TSR 单元，在场变量的一定选取方式下（第六节 1）可以统一。
- 2、在 TSR 杂交单元中，以放松微分约束（平衡或协调）的单元模型有较大的实用意义。

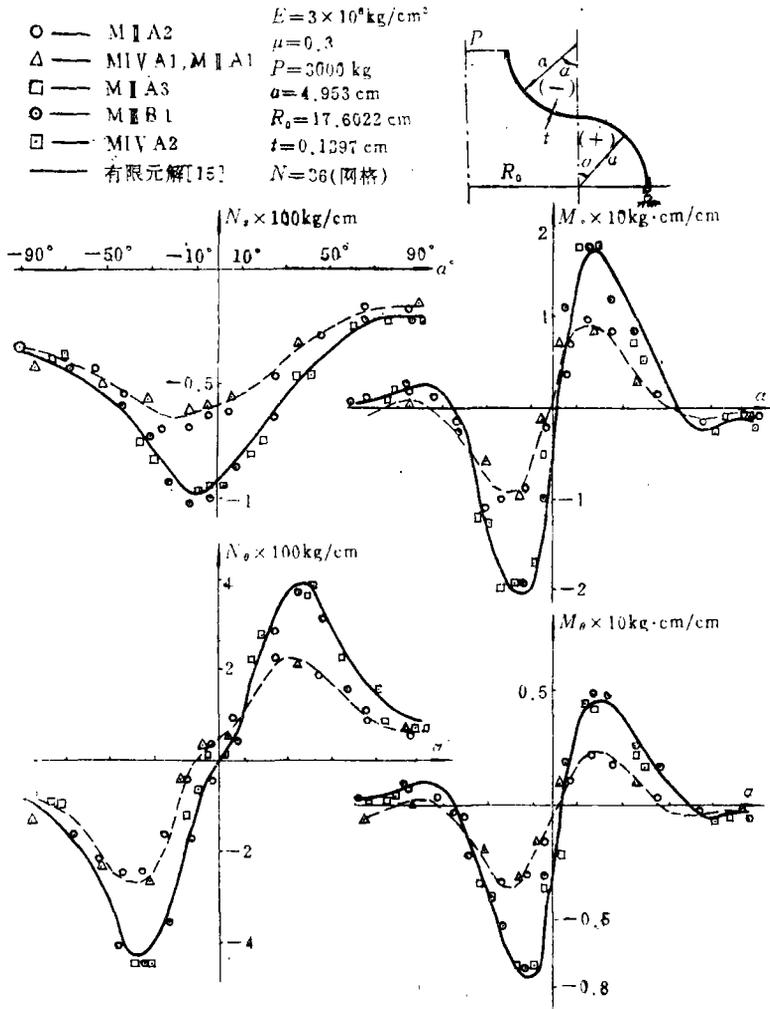


图5 波纹壳、膜力 $N_s$ ,  $N_o$ 和弯矩 $M_s$ ,  $M_o$ 分布

3、在TSR位移协调元中，通过引入内部位移参数提高面内位移 $U$ 的插值阶次所构造的单元M I V A2展示了良好的性态。

4、TSR单元的刚体位移描述对解答的影响与结构参数、载荷工况以及位移插值函数等因素有关，有待进一步探讨。

5、关于TSR单元的选择，当面内位移 $U$ 取为线性插值时，可选择较M I V A1稍好的单元M I A2或应用M I A3计算与第七节3类似的问题。当对单元的求解精度和适应性均要求较高时，可采用单元M I V A2或其它高阶元。

作者对唐立民教授的悉心指导深表谢意。

## 参 考 文 献

- [1] Jonse, R. E., A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis, *AIAA*, 2, 5 (1964), 821—826.
- [2] Pian, T.H. H., Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution, *AIAA*, 2 (1964), 1333—1336.
- [3] Tong, P., New displacement hybrid finite element model for solid continua, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 2 (1970), 78—83.
- [4] Atluri, S., A new assumed stress hybrid finite element model for solid continua, *AIAA*, 9, 8 (1971), 1647—1649.
- [5] Wolf, J. P., Generalized hybrid stress finite-element model, *AIAA*, 11, 3 (1973), 386—387.
- [6] 唐立民, 有限元法中的若干问题, 大连工学院学报, 2 (1979).
- [7] 陈万吉, 广义杂交元, 力学学报, 6 (1981), 582—591.
- [8] 钱伟长, 高阶拉氏乘子和弹性力学中更一般的变分原理, 应用数学和力学, 4, 2 (1983), 137—150.
- [9] Day, M. L. and T. Y. Y. Yang, A mixed variational principle for finite element analysis, *Int. J. Num. Mech. Eng.* 18, 8 (1982), 1213—1230.
- [10] 陈万吉, 更一般的杂交广义变分原理及有限元模型, 应用数学和力学, 7, 5 (1986).
- [11] 徐芝纶, 《弹性力学》下册, 人民教育出版社, 212—230.
- [12] Jonse, R. E. and D. R. Strome, Direct stiffness method of analysis of shells of revolution utilizing curved element, *AIAA*, 4, 9 (1966), 1519—1525.
- [13] Cook, R. D., 《有限元分析的概念和应用》, 科学出版社 (1974), 189—190.
- [14] 张社光, 大连工学院硕士学位论文, (1984).
- [15] 谢志成、付承涌、郑思梁, 有曲率突变的轴对称壳(波纹壳)的有限元解, 应用数学和力学, 2, 1 (1981), 113—130.

## Axisymmetrical Elements of Thin Shell of Revolution Corresponding to Different Types of Variational Principles

Zhang She-guang

*(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)*

Chen Wan-ji

*(Institute of Engineering Mechanics, D. I. T., Dalian)*

### Abstract

The purpose of this paper is to investigate, to some extent, the influence of variational constraints on the finite element properties, which are based on different types of variational principles. Taking axisymmetrical elements of thin shell of revolution (abbreviated as TSR element) as comparative elements, and with the same geometrical description, we derive seven kinds of TSR hybrid elements and two kinds of TSR conforming elements corresponding to three types of hybrid variational principles and potential energy principle respectively. By analysing the element stiffness formulations and comparing the numerical calculations, such as corrugated shell, we discuss the differences in properties of different models, and the adaptability, limitation as well as relationship between two types of models. We also point out a divergence case of TSR hybrid displacement element, and suggest two kinds of more acceptable TSR elements.