应用数学和力学，第7卷第7期（1986年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

乘法双准周期解析函数的一些引理*

路见可

（武汉大学，1985年9月25日收到）

摘要

本文证明乘法双准周期解析函数即使在区域边界上实部等于零，本身仍可能不恒为零，且指出了出现这种情况的条件，并用实例说明确实存在这种情况。最后并讨论了乘数不事先指定时问题的一般解。

一、引　言

设 $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$，$L_0$ 为基本胞腔 S_0（以 $\pm\omega_1\pm\omega_2$ 为顶点的平行四边形）内部的一条 Liapunov 封闭曲线，取定反时针向为正向。把 L_0 及其周期合同曲线之併记为 L，它所围的无限连通外域记为 S^-。

所谓 S^- 中的双准周期解析函数 $f(z)$ 是指[1]：它在 S^- 中全纯，且满足条件

$$f(z+2\omega_j)=f(z)+a_j \qquad (j=1,2) \tag{1.1}$$

或者

$$f(z+2\omega_j)=b_jf(z) \qquad (b_j\neq 0;\quad j=1,2) \tag{1.2}$$

其中 a_j，b_j 均为常数；前者称为加法双准周期的，后者称为乘法双准周期的，a_j 和 b_j 分别称为加数和乘数。

对于 S^- 中的双周期解析函数 $f(z)$，如果满足边界条件

$$\mathrm{Re}f(t)=0 \qquad (t\in L_0,\ 从而对\ t\in L) \tag{1.3}$$

则由最大模原理，立即可知 $f(z)$ 恒为一虚常数。这一事实在求解双周期的以及加法双准周期的解析函数的 Dirichlet 问题时起着重要作用[2,3]。

现在要问：对于 S^- 中乘法双准周期的解析函数 $f(z)$，如果满足条件(1.3)，但当然已设 $b_j=\beta_j$ $(j=1,2)$ 均为实数且不同时为1，是否仍能导致 $f(z)\equiv 0$ 于 S^- 中？无疑这一问题对于求解乘法双准周期解析函数的 Dirichlet 问题会有重要的作用。这时由于 $f(z)$ 在 S^- 中一般无界，最大模原理已无法应用，所以不能运用前法讨论。事实上可以证明，上述问题答案是否定的。本文将说明正确的答案，并用实例表明确实存在上述问题有非零解的情况。当 β_1，β_2 不事先指定时，这里也给出了问题的一般解。

* 周焕文推荐。本文为中国科学院科学基金资助课题。

二、基 本 引 理

本节中来证明以下的基本引理[1)]。

引理 1 设乘数 $\beta_1, \beta_2(\neq 0)$都是实数，且不同时为 1，则满足零边界条件(1.3)的 S^-中乘法双准周期解析函数的 Dirichlet 问题，或者只有零解，或者有唯一的非零解（允许有一个任意实常数系数），且它根本没有零点。

证 设原问题有一个非零解 $f(z)$。我们来证明，$f(z)$在整个闭区域$\overline{S^-}$上没有零点。

为此，我们将L_0所围的外域共形映照到单位圆周 $l: |w|=1$ 的外域，并使无穷远点不变。设映照函数为 $z=\varphi(w)$。于是 $f(\varphi(w))=F(w)$ 在 $|w|>1$ 中边界 l 附近全纯，且在 l 上其实部为零。可见 $F(w)$ 可解析开拓到$|w|<1$ 的边界 l 附近，于是 $F(w)$ 在 l 上解析。由此可知，$F(w)$如果在 l 上有零点，其阶数必为整数，且个数有限。设其总数（连同阶数计算在内）为M。

设基本胞腔 S_0 的边界曲线为Γ，它与L_0之间所围区域S_0^-在映照 $z=\varphi(w)$ 之下成为单位圆周 l 和Γ的原象 γ 之间所围的区域的象。设 $F(w)$ 在这区域中零点的总数（连同阶数计算在内）为N。不失一般性，可以认为 $f(z)$ 在 Γ 上没有零点，于是 $F(w)$在 γ 上也没有零点。

由推广的幅角原理知[4]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l+\gamma}\frac{F'(w)}{F(w)}dw=\frac{1}{2}M+N \tag{2.1}$$

其中 l 上的积分部分要理解为 Cauchy 主值积分。但

$$\int_\gamma \frac{F'(w)}{F(w)}dw=\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

而 $f'(z)/f(z)$ 已是双周期的，所以此积分为零。

另一方面，如果在 l 上 $F(w)$ 的每一零点左右各去掉一个充分小的 ε 长的弧后余下的部分记为 l_ε，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{F'(w)}{F(w)}dw=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_\varepsilon}d\log F(w) \tag{2.2}$$

在 l_ε 的每一弧段上，$F(w)\neq 0$，而其实部为零，因此其虚部不变号。这样，$\arg F(w)$在其上为一常数值。由此可知，(2.2) 左边积分的实部必为零。再从(2.1)立即可知 $M=N=0$（实际上，(2.1)左边积分整个等于零）。这就证明了$F(w)$在 l 和 γ 间所围的闭区域上没有零点，从而也证明了$f(z)$在$\overline{S^-}$上没有零点。

今若 $g(z)$ 又是原问题的一个非零解，则可知 $g(z)/f(z)$ 是 S^-中的双周期全纯函数，且其虚部在L上恒等于零，故必为一实常数。

引理 1 证毕。

三、存在非零解的条件

本节中讨论：β_1, β_2 要满足怎样的条件，才能使原问题有非零解。函数 $f(z)$为原问题的

---

1) 引理 1 的证明中，吸取了黄孝军同志有益的思想。

非零解（不妨设 $\mathrm{Im}\, f(t)>0$ 于 L 上），当且仅当 $\psi(z)=\log[-if(z)]$（取定一分支）是以

$$a_j=\log\beta_j \qquad (j=1,2)$$

（其中对数为某一确定值）为加数（不同时为零）的加法双准周期解析函数的 Dirichlet 问题

$$\mathrm{Re}\{i\psi(t)\}=0 \qquad (t\in L_0) \tag{3.1}$$

的解。注意，虽然 β_j 为实数，a_j 仍可为复数；一般，应允许

$$a_j=\log\beta_j=\begin{cases}\ln|\beta_j|+2k_j\pi i & (\text{当}\beta_j>0)\\ \ln|\beta_j|+(2k_j+1)\pi i & (\text{当}\beta_j<0)\end{cases} \tag{3.2}$$

这里 $\ln|\beta_j|$ 已取定是实数值，k_j 为整数。记

$$A=\frac{1}{\pi i}(\omega_2a_1-\omega_1a_2), \qquad B=\frac{1}{\pi i}(a_2\eta_1-a_1\eta_2)$$

其中 $\eta_j=\zeta(\omega_j)$（$\zeta(z)$ 为 Weierstrass ζ 函数），则由[3]知，问题(3.1)的可解条件为

$$\mathrm{Re}\{c_{11}A+c_{12}B\}=\mathrm{Re}\{c_{21}A+c_{22}B\}=0 \tag{3.3}$$

其中 c_{jk} $(j,k=1,2)$ 为某些只与 S^- 的形状有关而和 β_j 或 a_j 无关的复常数（见[3]中(3.4)式）。因此，原问题的可解条件为

$$\mathrm{Im}\{c'_{11}\log\beta_1+c'_{12}\log\beta_2\}=\mathrm{Im}\{c'_{21}\log\beta_1+c'_{22}\log\beta_2\}=0 \tag{3.4}$$

其中已令

$$\begin{pmatrix}c'_{11} & c'_{12}\\ c'_{21} & c'_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2 & -\omega_1\\ -\eta_2 & \eta_1\end{pmatrix}$$

根据以上讨论，我们得到

引理 2 在引理 1 的假定下，(1.3)有非零解的充要条件是：可以适当选择 k_1，k_2 如(3.2)，使满足两个实的条件(3.4)。

四、非零解的例子

在二节中引理 1 从理论上证明乘法双准周期解析函数的零实部边界条件的 Dirichlet 问题即使实乘数不同时为 1 仍可能会有非零解，在三节中并给出了出现这种情况的条件。本节将用实例说明确实会出现这种情况。

设在 z 平面中 $w_1=a, w_2=bi$ $(a,b>0)$，而 L_0 为以 O 为中心、c 为半径的圆周，$c<\min(a,b)$。S_0^- 的右上角 1/4 的区域记为 g（图 1）。

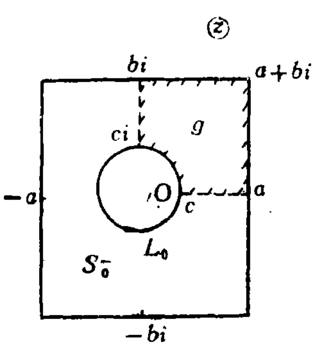

图 1

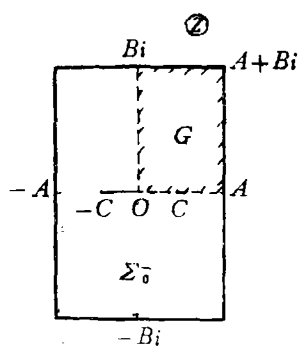

图 2

将区域 g 用函数 $Z=\omega(z)$ 共形映照到Z平面中的矩形区域G（图 2），使

$$a\longleftrightarrow A,\qquad a+bi\longleftrightarrow A+Bi$$
$$bi\longleftrightarrow Bi,\qquad ci\longleftrightarrow O$$

适当调整G的模数即 B/A的大小，这总是可以办得到的。这时 c 必对应于线段 OA 上的某点 C $(0<C<A)$。

利用对称原理，可把 $Z=\omega(z)$ 解析延拓到整个 S_0^- 上，使其象成为以$\pm A\pm Bi$为顶点的矩形，但要挖去一直线段$-C\leqslant X\leqslant C$，记为Σ_0^-。再次利用对称原理，把 $Z=\omega(z)$ 解析延拓为双周期区域S^-到Σ^-的共形映照，这里 Σ^- 是Σ_0^-双周期延拓结果的区域。于是$\omega(z)$ 成为 S^-中的双周期单叶函数。

考虑 Σ^-中的乘法双准周期解析函数

$$F(Z)=i\exp[\pi Z/B]$$

它的乘数是

$$\beta_1=\exp[2\pi A/B]\qquad(\beta_2=1)\tag{4.1}$$

且 $\operatorname{Re}F(Z)=0$ 于线段$-C\leqslant X\leqslant C$上。

函数

$$f(z)=Di\exp[\pi\omega(z)/B]\tag{4.2}$$

就是 S^-中的乘法双准周期解析函数，其中D是一任意实常数。它是满足条件

$$\operatorname{Re}f(t)=0\qquad(|t|=c)$$

且以（4.1）为乘数的双准周期解析函数的一般解。这就是我们所要的例子。

注意，在这个例子中，很明显应取

$$\log\beta_1=2\pi A/B,\quad \log\beta_2=2\pi i$$

可见这时（3.2）中的 $k_1=0$，$k_2=1$。

五、乘数不事先指定的情况

前此的讨论，都已事先指定了实乘数 β_1，β_2。本节将讨论同一问题，但乘数不要求事先指定。

这时，在（3.2）中每取定一组整数 k_1，k_2，求解(3.4)，便可得出一组 $\ln|\beta_1|,\ln|\beta_2|$，从而获得原问题的一个解。为了说明这时问题一般解的结构，我们进行如下。

先在（3.2）中取定 $k_1=1$，$k_2=0$。这时，对于加法双准周期问题（3.1）来说，相当于已给定 a_1，a_2 的虚部。故由[3]知，可以求出唯一的一组实数 $\ln|\beta_1'|$，$\ln|\beta_2'|$ 使（3.3）或即（3.4）成立，且这时加法问题有唯一解 $\psi_1(z)$满足（3.1）（可相差一实任意常数项）。对于原乘法双准周期问题而言，这时有唯一解（可有一实任意常数因子）

$$f_1(z)=i\exp[\psi_1(z)]$$

其乘数为

$$\beta_1=-|\beta_1'|,\quad \beta_2=|\beta_2'|$$

同样，在(3.2)中取 $k_1=0$，$k_2=1$，则又可得(3.4)的唯一解组$\ln|\beta_1''|$，$\ln|\beta_2''|$，相应加法问题有唯一解 $\psi_2(z)$，原问题有唯一解

$$f_2(z)=i\exp[\psi_2(z)]$$

其乘数为

$$\beta_1=|\beta_1''|,\quad \beta_2=-|\beta_2''|$$

因此，原乘法问题的一般解为

$$f(z)=Di\exp\{k_1\psi_1(z)+k_2\psi_2(z)\} \tag{5.1}$$

其中 k_1，k_2 为任意整数，D为一任意实常数；这时，乘数为

$$\left.\begin{aligned}\beta_1&=(-1)^{k_1}|\beta_1'|^{k_1}|\beta_1''|^{k_2}\\ \beta_2&=(-1)^{k_2}|\beta_2'|^{k_1}|\beta_2''|^{k_2}\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

因此我们有

引理 3 乘法双准周期解析函数满足条件（1.3）的 Dirichlet问题，如果对其实乘数不事先指定，则恒可解，且一般解以（5.1）给出，其乘数以（5.2）给出；一般解中除显然地有一实常数因子外，还倚赖于两个独立的整数，而乘数也倚赖于这两个整数。

注 本文结果对求解双周期解析函数的 Hilbert 问题也极为有用，当在另文讨论。

参 考 文 献

[1] 路见可，双准周期 Riemann 边值问题，数学物理学报，**1**，1（1981），13—30.

[2] 路见可，双周期解析函数的 Dirichlet 问题，数学物理学报，**4**，1（1984），9—16.

[3] 路见可，关于双准周期解析函数的 Dirichlet 问题，数学物理学报，**5**，2（1985）.

[4] 路见可，推广的留数定理及其应用，武汉大学学报（自然科学版），3（1978），1—8.

Some Lemmas on Doubly Quasi-Periodic Analytic Functions in Multiplication

Lu Jian-ke

(Wuhan University, Wuhan)

Abstract

In this paper, some lemmas on doubly quasi-periodic analytic functions in multiplication are proved. Such functions may not be identical to zero even if their real parts vanish on the boundary. Conditions in which this case appears are also obtained. A concrete example is given to show that this case actually exists. Finally, the general solution of the considered Dirichlet problem of doubly quasi-periodic analytic functions with zero real parts on the boundary is obtained, provided the multipliers are not prescribed.