

孤波在非线性弹性杆中的传播

庄蔚 杨桂通

(太原工业大学数力系, 1985年5月5日收到)

摘要

本文利用逆散射方法, 对非线性弹性杆中的应变孤波^{[1], [2]}进行了详细分析, 阐明了孤波特性和其对固体结构的影响, 并给出了某些定量的结果。

一、基本假设和基本方程

考虑非线性弹性无限长的均质、等截面圆杆, 其单位长度质量为 ρ , 如图 1 所示。

由于结构的轴对称性, 采用柱坐标系 (r, θ, x) , 假定杆承受轴对称单向拉、压突加载荷, 平截面假设仍然成立, 并在推导运动方程的过程中作出以下四条基本假设:

- 1、受载过程中无限长杆处于单轴应力状态, $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$;
- 2、变形计入横向效应影响, 即考虑 $\epsilon_r = -\nu\epsilon_x$. 利用几何方程容易得到 $u_r = r\epsilon_r = -\nu r\partial u/\partial x$;

- 3、推导杆中纵波运动方程使用 Hamilton 原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} (\tilde{T} - \tilde{W}) dt = 0$, 其中 \tilde{T} 为杆单元的动能 $\tilde{T} = \int_{x_1}^{x_2} T dx$, \tilde{W} 为杆单元的应变能 $\tilde{W} = \int_{x_1}^{x_2} W dx$;

- 4、材料服从非线性弹性本构方程 $\sigma_x = E\epsilon_x + a_n E\epsilon_x^n$, 式中第一项表示线弹性应力, 第二项表示非线性弹性应力, 图 2 为 $n=2$ 时 $\sigma_x - \epsilon_x$ 曲线。

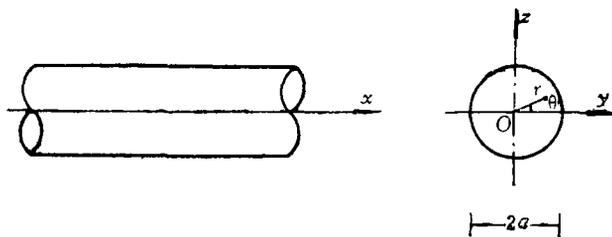


图 1

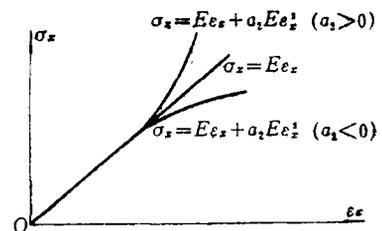


图 2

E 为材料的弹性模量, a_n 与 n 均为材料常数, $a_n < 0$ 为软非线性材料, 多数金属都属于此, $a_n > 0$ 为硬非线性材料, 橡胶、聚合物、少数金属符合这种本构关系。文中着重讨论软

非线性材料 ($a_2 < 0$) 的情况.

由于计入了横向效应, 杆中单位长度内的动能包括纵向运动动能和横向运动动能两项

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{4} \rho \omega a^2 v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)^2 \quad (1.1)$$

其中 $\omega = \pi a^2$.

根据单轴应力假设, 单位长度内的应变能为

$$W = \frac{1}{2} \omega E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{n+1} \omega E a_n \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n+1} \quad (1.2)$$

利用 Hamilton 原理的变分表达式, 容易得到计入横向效应后非线性弹性杆中的纵波运动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \left[1 + n a_n \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n-1} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} v^2 a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \quad (1.3)$$

(1.3) 式中常系数 E/ρ 是线弹性纵波波速的平方, 通常记为 c_0^2 .

如果在非线性弹性本构方程中令 $a_n = 0$, 即考虑线弹性本构方程 $\sigma_x = E \varepsilon_x$, 同时忽略横向效应, 认为 $\varepsilon_r = 0$, (1.3) 式就简化成线性弹性细杆中的纵波运动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

在 (1.3) 式中令

$$c_0^2 = E/\rho, \quad \alpha = n a_n, \quad \beta = v^2 a^2 / 2 \quad (1.5)$$

并作变换

$$\xi = x - c_0 t, \quad \tau = \alpha t \quad (1.6)$$

则 (1.3) 式化为

$$c_0^2 u_{\xi\xi} - 2c_0 \alpha u_{\tau\xi} + \alpha^2 u_{\tau\tau} - c_0^2 (1 + \alpha u_{\xi}^{n-1}) u_{\xi\xi} - \beta (c_0^2 u_{\xi\xi\xi\xi} - 2c_0 \alpha u_{\tau\xi\xi\xi} + \alpha^2 u_{\tau\tau\xi\xi}) = 0 \quad (1.7)$$

再令

$$\mu' = \frac{4\beta}{\alpha c_0^2} \quad (1.8)$$

设材料是弱非线性的, $\alpha^2 \ll 1$, 所考虑的杆也比较细, 计入一阶弥散量, 即 β 为小量, 则用 μ' 表示 β , 略去 (1.7) 式中 α 的二次以上项可以得到

$$2c_0 \alpha u_{\tau\xi} + c_0^2 \alpha u_{\xi}^{n-1} u_{\xi\xi} + \frac{1}{4} \mu' \alpha c_0^4 u_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad (1.9)$$

再作变换

$$v = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{2}{c_0} \xi \quad (1.10)$$

(1.9) 式化为广义 K-dV 方程

$$v_{\tau} + v^{n-1} v_y + \mu' v_{yyy} = 0 \quad (1.11)$$

当 $n=2$ 时得到 K-dV 方程

$$v_{\tau} + v v_y + \mu' v_{yyy} = 0 \quad (1.12)$$

根据变换 (1.6) 式有 $\partial/\partial x = \partial/\partial \xi$, 可知 $v = \partial u/\partial \xi$ 代表杆中应变, 因此 (1.11) (1.12) 两式都表示在上述假设基础上, 非线性弹性杆中应变必须满足的方程.

二、孤波与孤立子

本文仅讨论非线性弹性本构方程 $\sigma_x = E\varepsilon_x + a_n E\varepsilon_x^n$ 中 $n=2$ 的情况, 即考虑二次非线性弹性本构方程

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + a_2 E\varepsilon_x^2 \quad (2.1)$$

此时非线性弹性杆中的应变满足 K-dV 方程 (1.12).

由于处理软非线性的普通金属材料, $a_2 < 0$, 为便于计算, 先作下列变换

$$v \rightarrow -v, \quad y \rightarrow -y, \quad \tau \rightarrow \tau \quad (2.2)$$

且令 $\mu = -\mu'$, 从而 (1.12) 式化为

$$v_\tau + vv_y + \mu v_{yyy} = 0 \quad (1.12)'$$

其中 $\mu > 0$.

(一) 稳态解

假设杆中满足方程 (1.12)' 的应变为

$$v = v(\eta), \quad \eta = y - C\tau \quad (2.3)$$

把 (2.3) 式代入 (1.12)' 式有

$$-Cv_\eta + vv_\eta + \mu v_\eta v_\eta = 0 \quad (2.4)$$

将上式积分得到

$$3\mu v_\eta^2 = -v^3 + 3Cv^2 + 6Av + 6B \quad (2.5)$$

其中常数 C, A, B 取决于未扰动时杆的应变状态和扰动性质及其大小. 若记 $f(v) = -v^3 + 3Cv^2 + 6Av + 6B$, 考虑三次方程 $f(v) = 0$ 存在三个实根 i, j, k 的情况 ($i \geq j \geq k$), 则 $f(v) = (i-v)(v-j)(v-k)$. 通过对 (2.5) 式中系数 C, A, B 进行各种讨论, 得到杆中可能形成孤波两种情形:

1、 $A=B=0$

此时杆中没有初应变, 由于拉伸或压缩扰动引起的稳态应变波为

$$v(y, \tau) = \mp v_a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{v_a}{-12\mu'}} \left(y + \frac{v_a}{3} \tau + \eta_0 \right) \right] \quad (2.6)$$

上式表示杆中传播的压缩孤波和拉伸孤波 (见图 3).

根据 (2.1) 式可以得到应变孤波到达以后杆中的应力分布, 其最大值为

$$[\sigma_x]_{\max} = E v_a (\mp 1 + a_2 v_a) \quad (2.7)$$

利用应变位移关系还可得出杆中的质点运动速度, 最大值为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\max} = \mp c_0 v_a \left(-1 + \frac{a_2 v_a}{3} \right) \quad (2.8)$$

2、 $A \neq 0, B \neq 0$ 及 $j = k$

此时杆中存在初应变, 但扰动的绝对值大于初应变的绝对值, 杆中的应变波为

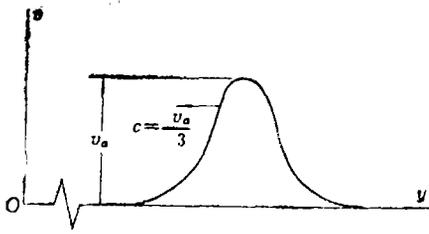


图 3

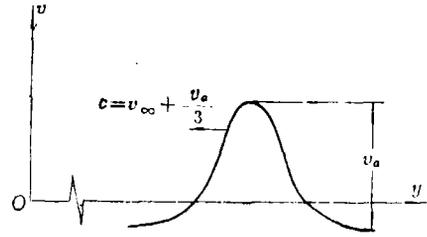


图 4

$$v(y, \tau) = -v_{\infty} \mp v_a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{-\frac{v_a}{12\mu'}} \left[y + \left(v_{\infty} + \frac{v_a}{3} \right) \tau + \eta_0 \right] \right] \quad (2.9)$$

对于预拉情形, $v_{\infty} > 0$, (2.9) 式表示预拉应变杆中因较大扰动引起的压缩、拉伸应变孤波 (见图 4)。

由于应变孤波导致的杆中最大应力和最大质点速度分别为

$$[\sigma_x]_{\max} = E(\mp v_a - v_{\infty})[1 + a_2(\mp v_a - v_{\infty})] \quad (2.10)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\max} = \mp c_0 v_a \left[1 - a_2 \left(v_{\infty} + \frac{v_a}{3} \right) \right] \quad (2.11)$$

从(2.6), (2.9)两式中可以看出孤波传播过程中的特性以及材料性质与孤波特性之间的关系:

(1) 孤波的传播速度 c 与无穷远处均匀应变 v_{∞} 有关, 与波幅 v_a 成线性关系, 这是非线性波的特点, 波幅愈大的波传播速度愈大。

(2) 波宽 $2\pi\sqrt{-12\mu'/v_a}$ 与波幅 v_a 的平方根成反比, 大波幅孤波的波宽窄。

(3) 波宽还正比于 $-\mu'$ 的平方根, μ' 表征着弥散。由(1.8)式知, μ' 取决于材料性质和波导的几何特征, 这正表明孤波是由于材料的非线性 (a_2) 和杆的横向效应引起的弥散相互抑制而导致的。

(4) 波幅 v_a 和无穷远处的均匀应变 v_{∞} 无关。

从(2.7), (2.8), (2.10), (2.11)四式还能看到: 当应变孤波通过时, 杆中最大应力取决于材料的非线性系数 a_2 , 最大质点速度取决于材料的声速 c_0 和非线性系数 a_2 , 因此对于不同材料的非线性弹性杆, 孤波导致的应力水平也不相同。

孤波是由于非线性效应导致的波形突陡、弥散效应引起的波形摊平两种因素相互抑制而形成的一种稳定传播的脉冲状行波, 一旦由于初扰动在固体介质中形成了孤波, 尽管初扰动的强度不足以使扰动源处的材料发生破坏, 但随着孤波稳定的长距离传播, 可能在介质的缺陷处引起破坏, 这是动态设计和动态破坏分析中值得注意的因素之一。

(二) 初值问题的解

这里用逆散射方法^{[3],[4],[5]}求解了两个 K-dV 方程的初值问题, 并分析了在稳态解中不能得到的一些性质。

1、单孤波问题

$$\left. \begin{aligned} v_{\tau} + vv_{\eta} + \mu v_{\eta\eta\eta} &= 0 \\ v_0(y) &= 12\mu^{1/3} \operatorname{sech}^2(\mu^{-1/3}y) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

利用变换

$$v \rightarrow -6\mu^{1/3}w, \quad y \rightarrow \mu^{1/3}z, \quad \tau \rightarrow \tau \quad (2.13)$$

得到问题(2.12)的另一种表达式

$$\left. \begin{aligned} w_\tau - 6ww_z + w_{zzz} &= 0 \\ w_0(z) &= -2\operatorname{sech}^2 z \end{aligned} \right\} \quad (2.12)'$$

根据逆散射方法的步骤, 首先求解以问题(2.12)'中初始条件为势的 Schrödinger 方程的特征值问题, 此时只有一个离散的特征值 $k_1=1$, 由特征函数可以得到各散射参数, 用它们去求解一个线性积分方程, 最后得到(2.12)'的解

$$w(z, \tau) = -2\operatorname{sech}^2(z - 4\tau) \quad (2.14)$$

或者

$$v(y, \tau) = -12(-\mu')^{1/3}\operatorname{sech}^2[(-\mu')^{-1/3}y + 4\tau] \quad (2.14)'$$

上式表示应变孤波, 为了解其渐近性, 考察解的远场结构, 对于特征值 $k_1=1$, 令 $\varphi = (-\mu')^{-1/3}y + 4k_1^2\tau$, 让 $|\tau| \rightarrow \infty$, 对(2.14)'式取极限得到

$$\lim_{\substack{|\tau| \rightarrow \infty \\ \varphi \text{ 固定}}} v(y, \tau) = -12(-\mu')^{1/3}\operatorname{sech}^2\varphi \quad (2.15)$$

从远场结构表达式(2.15)可知, 由于初始扰动 $v_0(y) = -12(-\mu')^{1/3}\operatorname{sech}^2[(-\mu')^{-1/3}y]$ 的作用, 在杆中形成了一个单孤波(前面讨论的稳态解即为该初值问题的渐近形式), 它在传播过程中波形、强度始终不变, 可能在杆中具有缺陷的部位造成破坏. 因此, 材料本身的缺陷是单孤波传播时引起杆件破坏的主要原因.

利用变换(1.6)和(1.10), 应变孤波表达式可以重新表为

$$v(X, T) = -12(-\mu')^{1/3}\operatorname{sech}^2(X - c_*T) \quad (2.16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} X &= 2(-\mu')^{-1/3}x/c_0, & T &= 2(-\mu')^{-1/3}t/c_0, \\ c_* &= [1 - 2\alpha(-\mu')^{1/3}]c_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

这样孤波表达式的物理意义就更加明显, 在广义坐标 X, T 下, 孤波以速度 c_* 传播, 对于软非线性材料而言, $\alpha = 2\alpha_2 < 0$, 因此孤波波速 c_* 大于弹性波速 c_0 .

2、两孤波相互作用问题

$$\left. \begin{aligned} v_\tau + vv_y + \mu v_{yyy} &= 0 \\ v_0(y) &= 36\mu^{1/3}\operatorname{sech}^2(\mu^{-1/3}y) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

在变换(2.1.3)下得到本问题的另一种表达形式

$$\left. \begin{aligned} w_\tau - 6ww_z + w_{zzz} &= 0 \\ w_0(z) &= -6\operatorname{sech}^2 z \end{aligned} \right\} \quad (2.18)'$$

以问题(2.18)'中初始条件为势的 Schrödinger 方程的特征值问题具有两个离散的特征值 $k_1=2, k_2=1$, 用从特征函数得到的散射参数求得问题(2.18)'的解

$$w(z, \tau) = -12 \frac{3 + 4\operatorname{ch}(8\tau - 2z) + \operatorname{ch}(64\tau - 4z)}{[\operatorname{ch}(36\tau - 3z) + 3\operatorname{ch}(28\tau - z)]^2} \quad (2.19)$$

或者

$$v(y, \tau) = -72(-\mu)^{1/3} \frac{3 + 4\operatorname{ch}[2(-\mu')^{-1/3}y + 8\tau] + \operatorname{ch}[4(-\mu')^{-1/3}y + 64\tau]}{\{\operatorname{ch}[3(-\mu')^{-1/3}y + 36\tau] + 3\operatorname{ch}[(-\mu')^{-1/3}y + 28\tau]\}^2} \quad (2.19)'$$

考虑(2.19)式所描述的应变波的远场结构,即分析当 $|z| \rightarrow \infty$ 时(2.19)式的渐近值,就能得到(2.19)式或(2.19)'式所包含的K-dV方程的另一个重要性质.

对特征值 $k_1=2$ 令 $\varphi=z-4k_1^2\tau$,让 $|\tau| \rightarrow \infty$,对(2.19)式求极限得到

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow -\infty \\ \varphi \text{ 固定}}} w_1(z, \tau) = -8 \operatorname{sech}^2(z-16\tau-\varphi_1) \quad (2.20)$$

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ \varphi \text{ 固定}}} w_1(z, \tau) = -8 \operatorname{sech}^2(z-16\tau-\varphi'_1) \quad (2.21)$$

其中 $\exp(-4\varphi_1)=3$, $\exp(4\varphi'_1)=3$.

对特征值 $k_2=1$ 令 $\varphi=z-4k_2^2\tau$,让 $|\tau| \rightarrow \infty$, (2.19)式的极限为

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow -\infty \\ \varphi \text{ 固定}}} w_2(z, \tau) = -2 \operatorname{sech}^2(z-4\tau-\varphi_2) \quad (2.22)$$

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow +\infty \\ \varphi \text{ 固定}}} w_2(z, \tau) = -2 \operatorname{sech}^2(z-4\tau-\varphi'_2) \quad (2.23)$$

其中 $\exp(2\varphi_2)=3$, $\exp(-2\varphi'_2)=3$.

(2.20)~(2.23)四式分别表示两个波幅、速度都不相同的应变孤波从 $-\infty$ 向 $+\infty$ 运动,结果仅使它们各自改变一个相位,而总的相位变化为零,这表明整个系统运动守恒.由初值问题决定的Schrödinger方程特征值问题,其每个离散的特征值都对应着一个孤波.解式(2.19)描述了两个服从K-dV方程的孤波在相互作用时形成的双波结构.

图5表示初值问题(2.18)描述的两个应变孤波相互作用过程.两个波幅分别为-8和-2,波速分别为16和4的孤波随着时间发展从 $-\infty$ 向 $+\infty$ 运动.起初大波幅孤波位于小波幅孤波之后,以后逐渐追上小波幅孤波,在 $\tau=-0.4$ 到 $\tau=0.4$ 之间两波相遇而发生非线性相互作用,在 $\tau=0$ 时大波幅孤波吞没小波幅孤波,形成一个最大波幅为-6的双波结构,然后大波幅孤波逐渐超前小波幅孤波而去,两波的波幅、速度仍保持相互作用前的数值,只是各自的相位有所变化.由此而知:两个服从K-dV方程的孤波在相互作用之后互不影响,犹如物理学中微观粒子的性态,因此人们也把K-dV方程所描述的孤波称为孤立子.

另外,分析(2.19)~(2.23)5个表达式可知,构成双波结构的孤波,其最大波幅能超过双波结构的波幅,这也是孤波的特点之一.因此,杆中的最大应变并不在两孤波相互作用之处,即不在初始扰动时刻,而是在两孤波分离以后,大波幅孤波到达之时.

为了清楚地表示孤波的物理意义,用广义坐标 X, T 表示(2.19)'式的渐近形式(只考虑 $T \rightarrow +\infty$ 的情形):

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} v_1(X, T) = -48(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2(X-c'_1 T + \varphi'_1) \quad (2.24)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} v_2(X, T) = -12(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2(X-c'_2 T + \varphi'_2) \quad (2.25)$$

其中

$$c'_1 = [1-8\alpha(-\mu')^{1/3}]c_0, \quad c'_2 = [1-2\alpha(-\mu')^{1/3}]c_0 \quad (2.26)$$

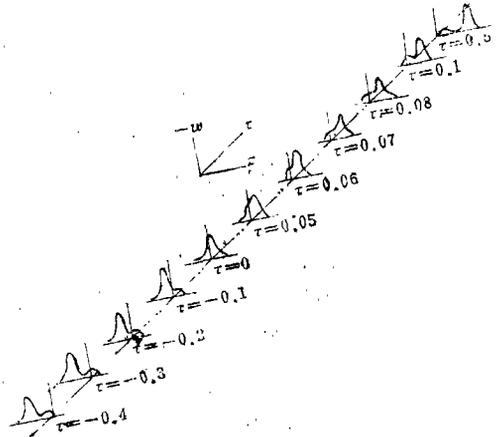


图 5

在广义坐标下, (2.19)' 式的远场结构表示了以波速 c'_1 传播的大波幅孤波和以波速 c'_2 传播的小波幅孤波, 对于软非线性材料, 同样有 $c'_1 > c_0$, $c'_2 > c_0$.

孤立子非线性相互作用的结果很值得注意, 因为双波结构的波幅不是两个孤立子波幅的简单线性迭加, 杆中最大应变发生在大波幅孤立子到达处, 由材料的本构方程 (2.1) 易知杆中最大应力也发生在这里, 这种现象对于指导动态设计非常重要.

三、非线性弹性杆与弹性细杆的比较

在讨论非线性杆中纵波的传播时, 以应变作为未知函数得到 K-dV 方程, 并用特殊初值获得了两个解析解——应变单孤波和应变双波结构. 对线弹性细杆而言, 杆中的位移、应变、应力均满足一维波动方程 (1.4), 为了与非线性杆的结果进行比较, 同样以应变作为基本未知函数, 考虑相同初始条件下的初值问题, 并比较两种情况下的应力分布、质点速度分布以及它们的最大值.

(一) 对于初始条件

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0) &= -12(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2[2(-\mu')^{-1/3}x/c_0] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) &= -48[1-2\alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{th}[2(-\mu')^{-1/3}x/c_0] \operatorname{sech}^2[2(-\mu')^{-1/3}x/c_0] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

1、非线性弹性杆中纵波传播的初值问题为

$$\left\{ \begin{aligned} v_x + vv_x + \mu' v_{yyy} &= 0 \\ v(y, 0) &= -12(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2[(-\mu')^{-1/3}y] \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

前面用逆散射方法求得其解为

$$v(X, T) = -12(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2(X - c_* T) \quad (3.3)$$

根据(2.1)式求得杆中的应力分布

$$\begin{aligned} \sigma_x(X, T) &= -12(-\mu')^{1/3} E \operatorname{sech}^2(X - c_* T) \\ &\quad + 144(-\mu')^{2/3} a_2 E \operatorname{sech}^4(X - c_* T) \end{aligned} \quad (3.4)$$

根据位移应变关系得到杆中的质点速度分布

$$\frac{\partial u}{\partial t}(X, T) = 12(-\mu')^{1/3} c_* \operatorname{sech}^2(X - c_* T) \quad (3.5)$$

2、弹性细杆中纵波传播的初值问题为

$$\left\{ \begin{aligned} v_{tt} = c_0^2 v_{xx}; \quad v(x, 0) &= -12(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2[2(-\mu')^{-1/3}x/c_0]; \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) &= -48[1-2\alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{th}[2(-\mu')^{-1/3}x/c_0] \operatorname{sech}^2[2(-\mu')^{-1/3}x/c_0] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

在广义坐标 X, T 下其解为

$$\begin{aligned} v(X, T) &= -12(-\mu')^{1/3} [1 - \alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{sech}^2(X - c_0 T) \\ &\quad - 12\alpha(-\mu')^{2/3} \operatorname{sech}^2(X + c_0 T) \end{aligned} \quad (3.7)$$

由线弹性本构方程 $\sigma_x = E\varepsilon_x$ 求得杆中的应力分布

$$\begin{aligned} \sigma_x(X, T) &= -12E(-\mu')^{1/3} [1 - \alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{sech}^2(X - c_0 T) \\ &\quad - 12E\alpha(-\mu')^{2/3} \operatorname{sech}^2(X + c_0 T) \end{aligned} \quad (3.8)$$

杆中的质点速度分布

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(X, T) = & 12(-\mu')^{1/3}[1 - \alpha(-\mu')^{1/3}]c_0 \operatorname{sech}^2(X - c_0 T) \\ & - 12\alpha(-\mu')^{2/3}c_0 \operatorname{sech}^2(X + c_0 T) \end{aligned} \quad (3.9)$$

为比较非线性弹性杆和弹性细杆中最大应力和最大质点速度的具体数值，取钢的材料常数

$$\rho = 7.8(\text{g/cm}^3), \quad E = 21.0 \times 10^{11}(\text{dy/cm}^2)$$

$$c_0 = 51.9 \times 10^4(\text{cm/s}), \quad \nu = 0.29$$

并设非线性系数 $\alpha_2 = -0.005$ ，杆半径 $a = 2.0\text{cm}$ ，由此得到

$$\mu' = \frac{\nu^2 a^2}{\alpha_2 c_0^2} = -2.5 \times 10^{-10} (\text{s}^2)$$

从而在非线弹性杆中

$$\begin{aligned} [\sigma_x]_{\max} = & -12(-\mu')^{1/3}E[1 - 6\alpha(-\mu')^{1/3}] \\ = & -7.36 \times 10^{10}(1 + 1.75 \times 10^{-4}) (\text{dy/cm}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\max} = & 12(-\mu')^{1/3}c_0 \\ = & 1.82 \times 10^4(1 + 0.58 \times 10^{-4}) (\text{cm/s}) \end{aligned}$$

在弹性细杆中

$$\begin{aligned} [\sigma_x]_{\max} = & -12(-\mu')^{1/3}E[1 - \alpha(-\mu')^{1/3}] \\ = & -7.36 \times 10^{10}(1 + 0.29 \times 10^{-4}) (\text{dy/cm}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\max} = & 12(-\mu')^{1/3}[1 - 2\alpha(-\mu')^{1/3}]c_0 \\ = & 1.82 \times 10^4(1 + 0.58 \times 10^{-4}) (\text{cm/s}) \end{aligned}$$

图6、图7是(3.4)，(3.5)，(3.8)，(3.9)四个表达式的示意图。

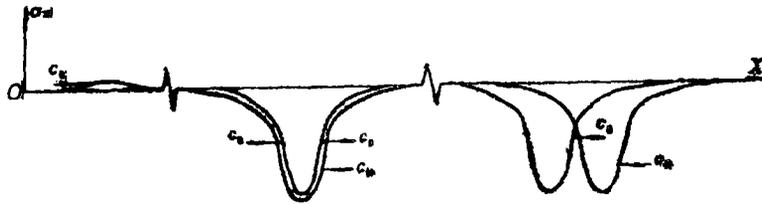


图 6

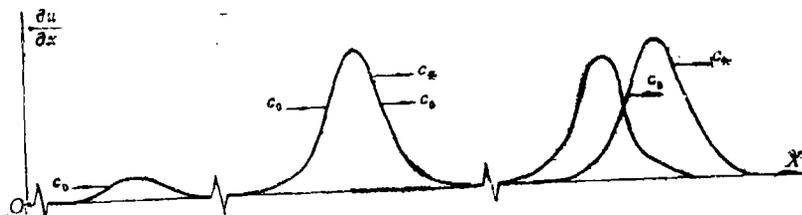


图 7

分析以上结果得出：在相同的应变扰动作用下，由于材料非线性和杆件横向效应的影响，非线性弹性杆中的最大应力略大于弹性细杆中的最大应力，波速也较大；另外，这两种

杆的最大质点速度（在扰动的初时刻达到）相等，但因两杆的控制方程不同，在以后的传播过程中非线性弹性杆中的最大质点速度要大于弹性细杆中的最大质点速度。

(二) 对于初始条件

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0) &= -36(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2 \left[(-\mu')^{-1/3} \frac{2}{c_0} x \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) &= -72 \{ [16 - 32\alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{sh}[4(-\mu')^{-1/3} x/c_0] \\ &\quad + 8[1 - 8\alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{sh}[8(-\mu')^{-1/3} x/c_0] \} / M^2 \\ &\quad + 72 \{ [6 - 36\alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{sh}[6(-\mu')^{-1/3} x/c_0] + [6 - 84\alpha(-\mu')^{1/3}] \\ &\quad \cdot \operatorname{sh}[2(-\mu')^{-1/3} x/c_0] \} \operatorname{sech}^2 [2(-\mu')^{-1/3} x/c_0] / M \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

式中, $M = \operatorname{ch}[6(-\mu')^{-1/3} x/c_0] + 3 \operatorname{ch}[2(-\mu')^{-1/3} x/c_0]$

1、非线性弹性杆中纵波传播的初值问题为

$$\left. \begin{aligned} v_{\tau} + vv_{\eta} + \mu' v_{\eta\eta\eta} &= 0 \\ v(y, 0) &= -36(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2 [(-\mu')^{-1/3} y] \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

其解在无穷远处是两个分离的孤立子，在正无穷处，它们分别为

$$v_1(X, T) = -48(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2(X - c_1' T + \varphi_1') \quad (3.12)$$

$$v_2(X, T) = -12(-\mu')^{1/3} \operatorname{sech}^2(X - c_2' T + \varphi_2') \quad (3.13)$$

利用(2.1)式求出较大的应变孤立子 $v_1(X, T)$ 引起的杆中应力分布

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_1(X, T) &= -48(-\mu')^{1/3} E \operatorname{sech}^2(X - c_1' T + \varphi_1') \\ &\quad + 48^2(-\mu')^{2/3} a_2 E \operatorname{sech}^4(X - c_1' T + \varphi_1') \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

杆中质点速度分布

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_1(X, T) = 48(-\mu')^{1/3} c_1' \operatorname{sech}^2(X - c_1' T + \varphi_1') \quad (3.15)$$

2、弹性细杆中纵波传播的初值问题

$$\left. \begin{aligned} v_{tt} &= c_0^2 v_{xx} \\ (3.10) \text{式} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

在广义坐标 X, T 下，以上问题的解为

$$\left. \begin{aligned} v(X, T) &= -36(-\mu')^{1/3} [1 - \alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{sech}^2(X - c_0 T) \\ &\quad - 36\alpha(-\mu')^{2/3} \operatorname{sech}^2(X + c_0 T) \\ &\quad + 4 \times 27\alpha(-\mu')^{2/3} [\operatorname{sech}^4(X - c_0 T) - \operatorname{sech}^4(X + c_0 T)] \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

由此引起的杆中应力分布

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(X, T) &= -36E(-\mu')^{1/3} [1 - \alpha(-\mu')^{1/3}] \operatorname{sech}^2(X - c_0 T) \\ &\quad - 36E\alpha(-\mu')^{2/3} \operatorname{sech}^2(X + c_0 T) \\ &\quad + 4 \times 27E\alpha(-\mu')^{2/3} [\operatorname{sech}^4(X - c_0 T) - \operatorname{sech}^4(X + c_0 T)] \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

杆中质点速度分布

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(X, T) &= 36(-\mu')^{1/3} [1 - \alpha(-\mu')^{1/3}] c_0 \operatorname{sech}^2(X - c_0 T) \\ &\quad - 36\alpha(-\mu')^{2/3} c_0 \operatorname{sech}^2(X + c_0 T) \end{aligned} \right\}$$

$$-4 \times 27\alpha(-\mu')^{2/3}c_0[\operatorname{sech}^4(X-c_0T) + \operatorname{sech}^4(X+c_0T)] \quad (3.19)$$

代入钢的材料常数有:

在非线性弹性杆中

$$\begin{aligned} [(\sigma_x)_1]_{\max} &= -48E(-\mu')^{1/3}[1-24\alpha(-\mu')^{1/3}] \\ &= -2.94 \times 10^{11}(1+7.00 \times 10^{-4}) \quad (\text{dy/cm}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_1 \right]_{\max} &= 48(-\mu')^{1/3}c_0' \\ &= 7.27 \times 10^4(1+2.33 \times 10^{-4}) \quad (\text{cm/s}) \end{aligned}$$

在弹性细杆中

$$\begin{aligned} [\sigma_x]_{\max} &= -36E(-\mu')^{1/3}[1-4\alpha(-\mu')^{1/3}] \\ &= -2.21 \times 10^{11}(1+1.16 \times 10^{-4}) \quad (\text{dy/cm}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\max} &= 36(-\mu')^{1/3}[1-4\alpha(-\mu')^{1/3}]c_0 \\ &= 5.46 \times 10^4(1+1.16 \times 10^{-4}) \quad (\text{cm/s}) \end{aligned}$$

图 8、图 9 是 (3.14), (3.15), (3.18), (3.19) 四个表达式的示意图。

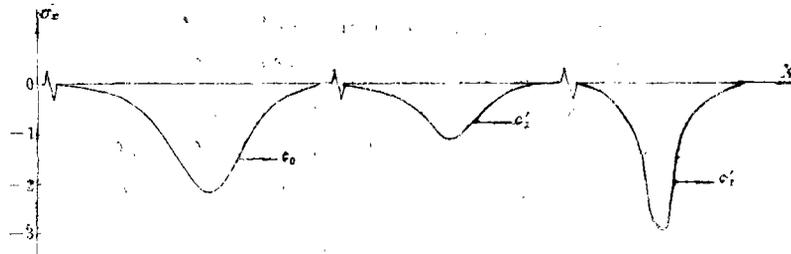


图 8

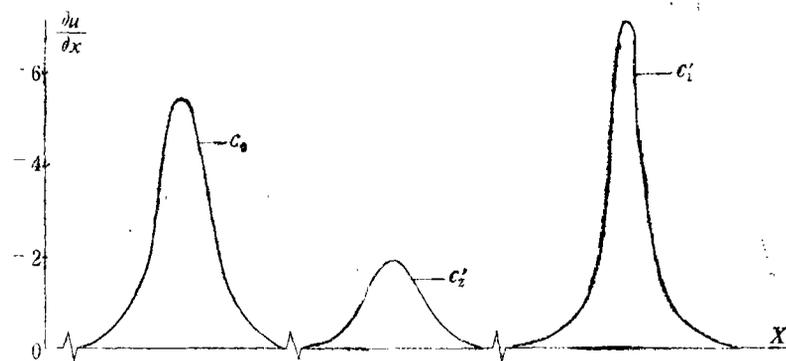


图 9

以上最大值分析都是当右行波传播到无穷远处进行的。这时由相同的初始条件(3.10)式导致的非线性弹性杆中最大应力和最大质点速度都比弹性细杆中的相应值大得多,原因是非线性弹性杆中的应变双波结构在无穷远处已经分裂成两个应变孤立子,其中一个孤立子的幅值大于初时刻双波结构的幅值,而弹性细杆中传播的是稳定行波,所以两种情况下应变幅值有较大差别,相应地最大应力和最大质点速度也有较大差别。

四、非线性弹性杆中的应变N-孤子与弹性细杆中的应变行波

在对非线性弹性杆中应变孤波和弹性细杆中应变行波进行了分析比较的基础上,利用K-dV方程的N-孤子初值问题及其渐近性质的理论^[6]对前面的结论作了推广,比较了非线性弹性杆中的应变N-孤子和相应初始条件下弹性细杆中的应变行波,得到两点推论:

1、在相同的初始激励下,非线性弹性无限长杆中应变N-孤子的传播速度 $c_n(n=1,2,\dots,N)$ 不小于线弹性无限长细杆中应变纵波的传播速度 c_0 。

2、在K-dV方程的N-孤子解中,至少有一个孤立子的波幅不小于N重孤子的波幅。

这两个推论对研究非线性弹性杆中孤波的性态有一定的意义,是一般性结论。

K-dV方程的推导不局限于弱非线性弹性材料,对计入弥散效应的一般非线性弹性杆也能导出该方程。

本文在写作过程中曾得到杨绍瑞同志详细校阅和有益的建议,在此特致衷心的感谢。作者还向对本文提出合理补充和修改意见的张善元同志表示深深的谢意。

参 考 文 献

- [1] Nariboli, G. A. and A. Sedov, Burgers's-Korteweg-De Vries equation for viscoelastic rods and plates, *J. Math Anal Appl*, **32** (1970).
- [2] 朱位秋, 弹性杆中的非线性波, 固体力学学报, **2** (1980).
- [3] Bhatnager, P. L., *Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive System*, Clarendon Press, Oxford (1979).
- [4] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, (1974).
- [5] [日]谷内俊弥、西原功修,《非线性波动》,原子能出版社(1981).
- [6] Miki Wadati and Morikazu Toda, The exact N-soliton solution of the korteweg-De Vries equation, *J. Ply. Soc. Jap.*, **32**, 5 (1972).

The Propagation of Solitary Waves in a Nonlinear Elastic Rod

Zhuang Wei Yang Gui-tong

(Department of Mathematics and Mechanics, Taiyuan University
of Technology, Taiyuan)

Abstract

In this paper, the inverse scattering method is used to analyse strain solitary waves in a nonlinear elastic rod^[1], properties of solitary waves and their influence on solid structures are discussed in detail, some quantitative results are given.