应用数学和力学，第7卷第8期（1986年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一种机器人的反馈跟踪控制系统*

张洪涛　　黄　琳

（北京大学力学系，1985年5月29日收到）

摘　要

本文对包括机器人在内的一类系统，指明了于跟踪控制所必需的反馈信息；结合速度控制和加速度控制，提出了使机器人跟踪并抓住空间做任意运动的物体的反馈控制方法，其与别种方法的不同之处在于：该方法能用于机器人手爪的方位不能事先确定的场合；数值模拟结果表明：所提出方法行之有效。

一、引　言

始于六十年代的机器人学正在世界上引起愈来愈大的关注。有关机器人控制方面的著作和论文也已经有很多，其中心是如何控制机器人的手爪，使之完成给定的任务。鉴于不同情况和要求，已经提出了各种控制方法，诸如点位控制[2,6]，速度控制[3,6]，加速度控制[4]，力控制等[5]，还有从工程观点出发提出的适用于工业机器人的控制方法[1]。所有这些方法都要求手爪有一个目标状态，因此应用范围必然受到限制，这是因为在有些场合下，比如机器人抓取空间任意运动的物体，手爪的目标状态根本无法确定。本文试图就这个问题做一些探讨。

二、问题的提出

假定所涉及的机器人是一其相邻两构件组成五类运动副的（即两构件的相对运动只有一个自由度）刚体开放链。设空间有一运动物体，我们将它简化为一个质点p^*。我们希望测量p^*的某些运动参数，诸如位置、速度、加速度（分别记为$p^*,\dot{p}^*,\ddot{p}^*$），用这些参数作为反馈来控制机器人，使手爪抓住p^*。并且我们试图寻求这样的反馈规律，其形式不随p^*的运动方式改变。那么一个首要问题是：为了得到满足要求的反馈控制律，需要测量p^*的哪些运动参数，即需要采集哪些有关p^*的信息？在回答这个问题之前，先引入一些符号。

设有$x(t)\in\mathbf{R}^n$，$x^{(i)}$为$x(t)$的第i阶导数，记

$$x(k,j)\triangleq(x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(j)})\qquad(0\leqslant k\leqslant j)$$

---

* 朱照宣推荐。

中国科学院科学基金资助的课题。

易得

$$\frac{d}{dt}[x(k,j)]=x(k+1,j+1) \tag{2.1}$$

下面我们在更广的意义上回答本节提出的问题。

三、一类反馈跟踪系统

设有系统

$$x^{(l)}=\tilde{f}(x,x^{(1)},\cdots,x^{(l-1)})+P(x)u, \qquad y=g(x)$$

或利用第二节中的符号写成

$$x^{(l)}=\tilde{f}[x(0,l-1)]+P(x)u, \quad y=g(x) \tag{3.1a,b}$$

其中$u\in\mathbf{R}^n$为系统的控制或输入，$y\in\mathbf{R}^m$为系统的输出，$x\in\mathbf{R}^n$为中间变量，$P(x)$对所有x来讲为$n\times n$可逆矩阵。

设y的所在空间中有动点$y^*(t)\in\mathbf{R}^m$。我们欲求反馈控制u，使系统(3.1)的输出y跟踪y^*。问能否找到只包含y^*的$l-1$阶以下的导数作为反馈的控制

$$u=\tilde{h}[x(0,l-1),y^*(0,l-1)] \tag{3.2}$$

使闭环系统

$$x^{(l)}=\tilde{f}[x(0,l-1)]+P(x)\tilde{h}[x(0,l-1),y^*(0,l-1)]$$

$$\triangleq f[x(0,l-1),y^*(0,l-1)] \tag{3.3a}$$

$$y=g(x) \tag{3.3b}$$

能对所有的y^*进行输出跟踪，即$\forall y^*(t)$，有

$$\forall x^{(i)}(0)=x_i, \qquad i=0,1,\cdots,l-1$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists T>0$$

使

$$(\forall t>T \longrightarrow \|g(x)-y^*(t)\|<\varepsilon)? \tag{3.4}$$

假设$g(x)$对x l次连续可微，则经过简单的运算，可得

$$y=g(x)$$

$$y^{(1)}=g_1[x(0,1)]\triangleq \frac{d}{dt}g(x)$$

$$y^{(2)}=g_2[x(0,2)]\triangleq \frac{d}{dt}g_1[x(0,1)]$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(l-1)}=g_{l-1}[x(0,l-1)]\triangleq \frac{d}{dt}g_{l-2}[x(0,l-2)]$$

$$y^{(l)}=g_l[x(0,l-1),\ y^*(0,l-1)]\triangleq \frac{d}{dt}g_{l-1}[x(0,l-1)]$$

由此引出如下微分方程组

$$x^{(l)}=f[x(0,l-1),y(0,l-1)], \quad y^{(l)}=g_l[x(0,l-1),y(0,l-1)] \tag{3.5}$$

我们将给问题(3.4)予否定的回答。

记

$$\Gamma=\{(x_0,x_1,\cdots,x_{l-1},y_0,y_1,\cdots,y_{l-1})\mid$$
$$g(x_0)\neq y_0, g_i(x_0,x_1,\cdots,x_i)=y_i,\quad i=1,2,\cdots,l-1\}$$

定理3.1 假设方程(3.5)满足解的存在唯一性，且

$$\exists\gamma=(x_0,\cdots,x_{l-1},y_0,\cdots,y_{l-1})\in\Gamma$$

使(3.5)在初始条件

$$x^{(i)}(0)=x_i,\qquad y^{(i)}(0)=y_i \tag{3.6a,b}$$

下解的存在区间为$[0,+\infty)$，记解为$\tilde{x}(t)$，$\tilde{y}(t)$，则运动$y^*\triangleq\tilde{y}$不能被系统(3.3)所跟踪。

证明 将$y^*\triangleq\tilde{y}$代入(3.3a)，由解的唯一性，在初始条件(3.6a)下方程(3.3a)的解就是$\tilde{x}(t)$，即

$$x(t)\triangleq\tilde{x}(t)$$

因此系统的输出为

$$y(t)=g(x(t))\equiv g(\tilde{x}(t))$$

则有

$$y(0)=g(\tilde{x}(0))=g(x_0)\neq y_0=\tilde{y}(0)=y^*(0)$$
$$y^{(1)}(0)=g_1[x(0,1)(0)]=g_1(x_0,x_1)=y_1=\tilde{y}^{(1)}(0)=y^{*(1)}(0)$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^{(l-1)}(0)=g_{l-1}[x(0,l-1)(0)]=g_{l-1}(x_0,x_1,\cdots,x_{l-1})$$
$$=y_{l-1}=\tilde{y}^{(l-1)}(0)=y^{*(l-1)}(0)$$
$$y^{(l)}(t)\equiv g_l[x(0,l-1)(t),y^*(0,l-1)(t)]$$
$$\equiv g_l[\tilde{x}(0,l-1)(t),\tilde{y}(0,l-1)(t)]$$
$$\equiv\tilde{y}^{(l)}(t)\equiv y^{*(l)}(t)$$

因此

$$g(x(t))-y^*(t)\equiv y(t)-y^*(t)\equiv y(0)-y^*(0)=g(x_0)-y_0\neq0$$
$$\longrightarrow\|g(x(t))-y^*(t)\|\equiv\|g(x_0)-y_0\|>0$$

这就是说，系统(3.3)的输出和y^*的距离始终保持在$\|g(x_0)-y_0\|$，当然不可能跟踪。

定理3.1证毕。

令 $\Omega=\{y\mid\exists x\in\mathbf{R}^n,y=g(x)\}\subset\mathbf{R}^m$

定理3.1中不为(3.3)所跟踪的运动y^*存在于$\mathbf{R}^m$中，但可能跑出Ω，这样的y^*自然不能被跟踪。我们希望能在Ω中找到y^*。为此，假设

存在常向量$\Delta\in\mathbf{R}^n$和实常数$\alpha>0$，使

$$\|g(x+\Delta)-g(x)\|\geqslant\alpha,\forall x\in\mathbf{R}^n$$

用$\tilde{g}(x)\triangleq g(x+\Delta)$取代以前的$g(x)$，类似地可以得到$\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,\cdots,\tilde{g}_{l-1},\tilde{g}_l$和方程

$$x^{(l)}=f[x(0,l-1),y(0,l-1)],\quad y^{(l)}=\tilde{g}_l[x(0,l-1),y(0,l-1)] \tag{3.7}$$

令 $\tilde{\Gamma}=\{\tilde{\gamma}\mid\tilde{\gamma}=(x_0,x_1,\cdots,x_{l-1},y_0,y_1,\cdots,y_{l-1})$

$$y_0=\tilde{g}(x_0),\quad y_i=\tilde{g}_i(x_0,x_1,\cdots,x_i),\quad i=1,2,\cdots,l-1\}$$

定理3.2 设方程(3.7)满足解的存在和唯一性，且

$$\exists\tilde{\gamma}=(x_0,x_1,\cdots,x_{l-1},y_0,\cdots,y_{l-1})\in\tilde{\Gamma}$$

使方程(3.7)在初始条件

$$x^{(i)}(0)=x_i,\quad y^{(i)}(0)=y_i$$

下具有存在区间为$[0,+\infty)$的解$\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)$，则运动$y^*(t)\triangleq\tilde{y}(t)$不能被系统(3.3)跟踪，且$y^*(t)\in\Omega$。

证明 类似于定理3.1的证明，我们可以得到：

当运动为y^*，$x^{(i)}(0)=x_i$时，(3.3)的输出y具有

$$\|y(t)-y^*(t)\|=\|g(\tilde{x}(t))-g(\tilde{x}(t)+\varDelta)\|\geqslant\alpha>0$$

且 $$y^*(t)\equiv\tilde{g}(\tilde{x}(t))\equiv g(\tilde{x}(t)+\varDelta)\in\Omega$$

证毕。

定理3.1和3.2说明，反馈控制u中仅包含y^*，$y^{*(1)}$，…，$y^{*(l-1)}$是不够的，还必须包含$y^{*(l)}$。

定理3.3 设(3.1)中的$g(x)$对任意$x\in\mathbf{R}^n$满足

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)=m$$

即$\partial g/\partial x$满行秩，则存在

$$u=\tilde{h}[x(0,l-1),y^*(0,l)]$$

使受控系统(3.1)能对所有的y^*进行跟踪。

证明 由$\partial g/\partial x\triangleq J$满行秩易知$JJ^T$可逆。

取实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$使代数方程

$$z^l+\lambda_1z^{l-1}+\lambda_2z^{l-2}+\cdots+\lambda_{l-1}z+\lambda_l=0$$

的所有根具负实部。另外记$J_1(x)\triangleq J^T(JJ^T)^{-1}$。

从(3.1b)易得

$$y^{(l)}=Jx^{(l)}+\tilde{r}[x(0,l-1)]$$

取

$$\begin{aligned}\tilde{h}[x(0,l-1),y^*(0,l)]=P^{-1}(x)\{&J_1(x)[y^{*(l)}+\lambda_1[y^{*(l-1)}-g_{l-1}[x(0,l-1)]]\\&+\lambda_2[y^{*(l-2)}-g_{l-2}[x(0,l-2)]]\\&+\cdots\\&+\lambda_l[y^*-g(x)]-\tilde{r}[x(0,l-1)]]-\tilde{f}[x(0,l-1)]\}\end{aligned}\tag{3.8}$$

则有(3.1)的输出$y=g(x)$满足

$$(y^{(l)}-y^{*(l)})+\lambda_1(y^{(l-1)}-y^{*(l-1)}+\cdots+\lambda_{l-1}(y^{(1)}-y^{*(1)})+\lambda_l(y-y^*)=0$$

因此

$$\lim_{t\to+\infty}\|y(t)-y^*(t)\|=0$$

证毕。

四、机器人的控制

设所讨论的机器人为一其相邻两构件形成五类转动运动副的（即相邻两构件的相对运动只有绕某一轴的转动）刚体开放链。假定机器人的机座在某一惯性空间中保持静止，从机座到手爪根部有N个可动刚体，它们的相对转角为

$$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N)^T\in\mathbf{R}^N$$

相应的力矩为

$$Q=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_N)^T\in\mathbf{R}^N$$

假定手爪质量可以忽略不计，手爪根部以上还有m个变量调节手爪的方位

$$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)^T\in\mathbf{R}^m$$

假定机器人位于一有势力场中，而且关节处无摩擦，这样一来，可对手爪根部以下N个刚体列出动力学方程。取Lagrange形式

$$A(\theta)\ddot{\theta}+B(\theta,\dot{\theta})=Q$$

其中$A(\theta)$为$N\times N$正定矩阵。上式可化为

$$\ddot{\theta}=-A^{-1}(\theta)B(\theta,\dot{\theta})+A^{-1}(\theta)Q \tag{4.1}$$

手爪根部的空间位置p由θ唯一确定

$$p=p(\theta) \tag{4.2}$$

手爪的方位n由θ和φ唯一确定

$$n=n(\theta,\varphi) \tag{4.3}$$

假定Q和$\dot{\varphi}$是可以直接调节的。

我们的控制策略为：测量空间中位于机器人手爪所及范围内一动质点p^*的运动参数，并将测量结果作为反馈得到Q和$\dot{\varphi}$使

i) p接近于p^*；

ii) n接近于p^*-p的方向。

取 $\Delta=(0,0,\cdots,0,\pi)^T\in\mathbf{R}^N$，则

$$\|p(\theta+\Delta)-p(\theta)\|=2l,\quad \forall\theta\in\mathbf{R}^N$$

这里l为手爪根部p以下第一个刚体的长度。因此$p(\theta)$满足定理3.2中$g(x)$所要求的条件，故我们必须测量动质点p^*的位置、速度和加速度。

设在跟踪过程中总有

$$J\triangleq\frac{\partial p}{\partial\theta}\in\mathbf{R}^{3\times N}\ \text{满行秩。}$$

由(4.2)得

$$\dot{p}=\frac{\partial p}{\partial\theta}\dot{\theta}=J\dot{\theta}$$

$$\ddot{p}=\frac{\partial p}{\partial\theta}\ddot{\theta}+\dot{J}\dot{\theta}=J\ddot{\theta}+h_1(\theta,\dot{\theta})$$

这里

$$h_1(\theta,\dot{\theta})=\left(\dot{\theta}^T\frac{\partial^2 p_1}{\partial\theta^2}\dot{\theta},\ \dot{\theta}^T\frac{\partial^2 p_2}{\partial\theta^2}\dot{\theta},\ \dot{\theta}^T\frac{\partial^2 p_3}{\partial\theta^2}\dot{\theta}\right)^T\in\mathbf{R}^3$$

取$\lambda_1,\mu_1\in\mathbf{R}$使代数方程

$$z^2+\lambda_1 z+\mu_1=0$$

的根具有负实部。由定理3.3可知，若取

$$\begin{aligned}Q&=Q(\theta,\dot{\theta},p^*,\dot{p}^*,\ddot{p}^*)\\&=A(\theta)[J^T(JJ^T)^{-1}(\ddot{p}^*+\lambda_1(\dot{p}^*-J\dot{\theta})\\&\quad+\mu_1(p^*-p(\theta))-h_1(\theta,\dot{\theta})]+B(\theta,\dot{\theta})\end{aligned} \tag{4.4}$$

则有

$$(\ddot{p}^*-\ddot{p})+\lambda_1(\dot{p}^*-\dot{p})+\mu_1(p^*-p)=0 \tag{4.5}$$

这样便实现了第一条策略——使p接近p^*。

记

$$n^*=n^*(\theta,p^*)\triangleq\frac{p^*-p(\theta)}{\|p^*-p(\theta)\|}$$

$$d_a=\|n^*-n\|$$

$$D=\frac{1}{2}\ d_a^2=\frac{1}{2}(n^*-n)^T(n^*-n)$$

$$\longrightarrow\dot{D}=-n^{*T}\dot{n}-n^T\dot{n}^*=-n^{*T}\left(\frac{\partial n}{\partial\theta}\ \dot{\theta}+\frac{\partial n}{\partial\varphi}\ \dot{\varphi}\right)-n^T\dot{n}^*$$

$$=-\left(n^{*T}\ \frac{\partial n}{\partial\varphi}\right)\dot{\varphi}-n^{*T}\ \frac{\partial n}{\partial\theta}\ \dot{\theta}-n^T\dot{n}^* \tag{4.6}$$

其中

$$\dot{n}^*=\left(\dot{p}^*-\ \frac{\partial p}{\partial\theta}\ \dot{\theta}\right)\Big/\|p^*-p(\theta)\|$$

$$-\left[(p^*-p(\theta))^T\left(\dot{p}^*-\ \frac{\partial p}{\partial\theta}\ \dot{\theta}\right)\Big/\|p^*-p(\theta)\|^3\right](p^*-p(\theta))$$

欲求$\dot{\varphi}=h(\theta,\dot{\theta},p^*,\dot{p}^*,\varphi)$使

$$\dot{D}+\lambda_2D=0,\qquad\lambda_2>0 \tag{4.7}$$

将(4.6)代入(4.7)，得

$$\left(n^{*T}\frac{\partial n}{\partial\varphi}\right)\dot{\varphi}=\lambda_2D-n^{*T}\ \frac{\partial n}{\partial\theta}\ \dot{\theta}-n^T\dot{n}^* \tag{4.8}$$

若
$$\left(n^{*T}\ \frac{\partial n}{\partial\varphi}\right)\neq0$$

则可取

$$h(\theta,\dot{\theta},p^*,\dot{p}^*,\varphi)$$

$$=\left(\frac{\partial n}{\partial\varphi}\right)^Tn^*\left\|\left(\frac{\partial n}{\partial\varphi}\right)^Tn^*\right\|^{-2}\left(\lambda_2D-n^{*T}\ \frac{\partial n}{\partial\theta}\ \dot{\theta}-n^T\dot{n}^*\right) \tag{4.9}$$

但当$n^*=n$时$n^*\partial n/\partial\varphi=0$。为此取$D_s>0$，当$D<D_s$时，令$\dot{\varphi}=0$。总之，取控制规律为

$$\dot{\varphi}=h(\theta,\dot{\theta},p^*,\dot{p}^*,\varphi)=\begin{cases}(4.9) & D\geqslant D_s\\ 0 & D<D_s\end{cases}$$

这样D满足

$$\dot{D}+\lambda_2D=0,\ \text{当}\ D\geqslant D_s$$

实现了第二条策略——使n接近p^*-p的方向。

因而，在控制

$$Q=Q(\theta,\dot{\theta},p^*,\dot{p}^*,\ddot{p}^*)$$

和
$$\dot{\varphi}=h(\theta,\dot{\theta},p^*,\dot{p}^*,\varphi)$$

作用下，手爪根部渐趋于被抓物体p^*，手爪的指向n将和p^*-p的方向的夹角最终小于

$$\alpha=\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{D_s}{2}}\right)$$

只要D_s取得足够小，总能满足所要求的精度。

由于控制为$(Q,\dot{\varphi})$，即直接改变的是$(\ddot{\theta},\dot{\varphi})$，故本文提出的控制方法可叫做速度—加速度控制，以区别于已有的速度控制和加速度控制[3,4,6]。

五、例　　子

将第四节中所述速度—加速度控制用于一手臂有六自由度，手爪有三自由度的机器人(如图1)。

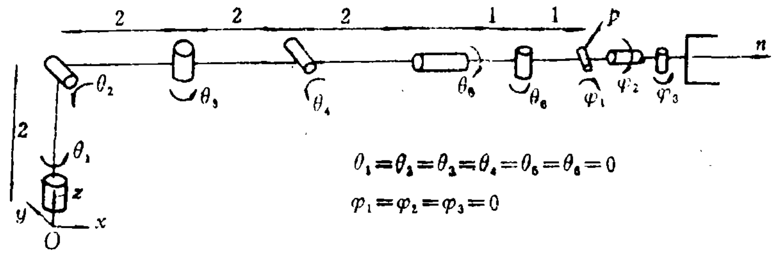

图 1

被抓物体做圆周运动：

$$x=4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right),\quad y=4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right),\quad z=4$$

$t=0$时，$\theta_1=0$，$\theta_2=0$，$\theta_3=\frac{\pi}{4}$，$\theta_4=\frac{\pi}{4}$，$\theta_5=\frac{\pi}{4}$，$\theta_6=\frac{\pi}{2}$；$\varphi_1=0$，$\varphi_2=0$，$\varphi_3=0$；

$$\dot{\theta}_j=0,\ j=1,2,3,4,5,6;\ \dot{\varphi}_i=0,\ i=1,2,3$$

取$D_s=0.0018$，$\lambda_1=3$，$\mu_1=2$，$\lambda_2=2$，且有

$$(\ddot{p}^*-\ddot{p})+3(\dot{p}^*-\dot{p})+2(p^*-p)=0$$

$$\dot{D}+2D=0,\quad 当D\geqslant D_s$$

采样时间为0.05秒。

数值模拟结果表明，所提出方法行之有效。

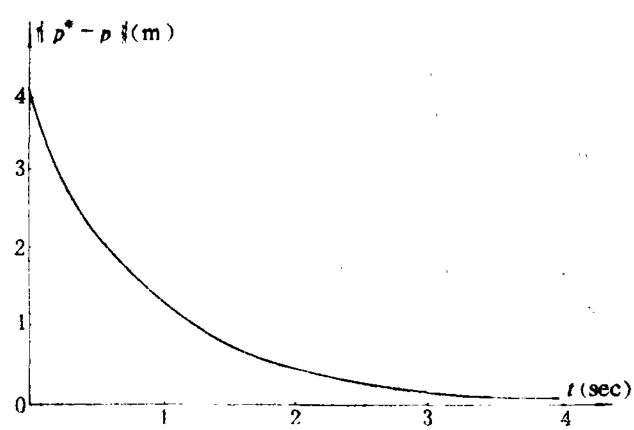

图 2

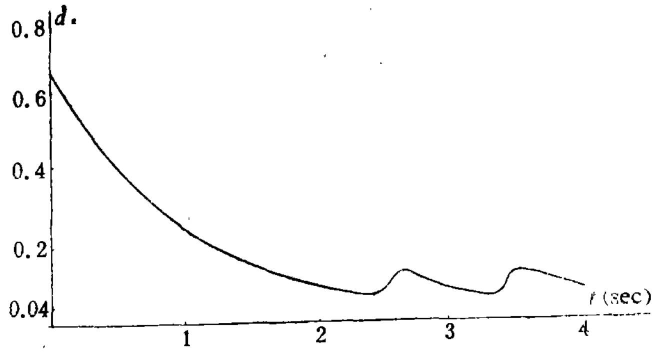

图 3

根据计算结果画出$\|p^*-p\|\sim t$图(见图2)和$d_a\sim t$图(见图3)。从图可见，手爪根部p渐趋于被抓物体p^*，而d_a最后总在0.1以下(当$t>2.5$)，这样p^*-p和手爪指向n的夹角小于6°。

关节处控制力矩Q和控制速度φ在此没有列出。

六、结 论

1. 本文证明了形如

$$x^{(l)}=f(x,x^{(1)},\cdots,x^{(l-1)})+P(x)u,\quad y=g(x)$$

的系统，若要用反馈控制使输出跟踪y^*，控制u中必须包含$y^{*(l)}$。

2. 本文结合机器人的速度控制和加速度控制，提出了用于跟踪空间任意运动物体的速度—加速度控制。与现有其它方法相比，此方法的优点是：它能够用于手爪方位不能事先确定的场合。

3. 本文对一手爪有三自由度，手臂有六自由度的操作机器人数值模拟了抓取作圆周运动物体的过程。模拟结果表明：速度—加速度控制法行之有效。

参 考 文 献

[1] Vukobratovic, M. and V. Potkonjak, *Scientific Fundamentals of Robotics 2: Control of Manipulation Robots, Theory and Application*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1982).

[2] Whitney, D. E., The mathematics of coordinated control of prostheses arms and manipulators, *J. Dynamic Syst., Measurement, and Control, Trans. ASME*, Dec. (1972).

[3] Whitney, D. E., Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses, *IEEE Trans. Man-Mach. Syst.*, 10, 2, June (1969).

[4] Luh, J. Y. S., M. W. Walker and R. Paul, Resolved acceleration control of mechanical manipulators, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 25, 3, June (1980).

[5] Wu, Chi Haur and R. Paul, Resolved motion force control of robot manipulators, *IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics*, 12, 3, May/June (1982).

[6] 波波夫, E. П.(苏),《操作机器人动力学与算法》, 遇立基等译, 机械工业出版社 (1983).

A Feedback Tracking System for Robot

Zhang Hong-tao   Hwang Ling

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

The feedback information necessary for tracking is specified for a class of systems including robots. A feedback control method is proposed by which a robot can track and grasp an arbitrarily moving object in space. It differs from the other methods in that it remains effective when orientation of the claw is impossible to be known in advance. Its validity is verified by digital simulation.