

文章编号: 1000-0887(2004)09-0958-09

# 椭圆孔边裂纹对 SH 波的散射 及其动应力强度因子\*

刘殿魁<sup>1</sup>, 陈志刚<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001;

2. 暨南大学 土木工程系, 广州 510632)

(我刊原编委唐立民推荐)

**摘要:** 采用复变函数和 Green 函数方法求解具有任意有限长度的椭圆孔边上的径向裂纹对 SH 波的散射和裂纹尖端处的动应力强度因子。取含有半椭圆缺口的弹性半空间水平表面上任意一点承受时间谐和的出平面线源荷载作用时的位移解作为 Green 函数, 采用裂纹“切割”方法, 并根据连续条件建立起问题的定解积分方程, 得到动应力强度因子的封闭解答。讨论了孔洞的存在对动应力强度因子的影响。

**关键词:** 孔边裂纹; SH 波散射; Green 函数; 动应力强度因子(DSIF); 复变函数; 积分方程

中图分类号: O347.3 文献标识码: A

## 引 言

含有空穴、缺口等缺陷的材料和工程构造物, 在外荷载作用下孔洞边缘会出现应力集中现象, 裂纹极易由此产生并扩展形成非裂纹缺陷与裂纹缺陷组合而成的复合缺陷。在裂纹对弹性波散射问题的研究中, 裂纹总是以直线或圆弧的形式出现<sup>[1~3]</sup>。而在以往有关断裂的研究中, 这类复合缺陷常简化为单一的 Griffith 直线裂纹, 并被认为是偏于安全的简化。实际上, 含有这类复合缺陷的材料在受力时, 非裂纹缺陷必然要影响由其边缘萌生的裂纹尖端场的特性, 但关于这方面的理论研究很少见到。G. C. Sih 采用复变函数方法给出了对称的孔边径向共线裂纹的 II 型静态应力强度因子的解析解<sup>[4]</sup>; 刘殿魁、刘宏伟采用 Green 函数法研究了 SH 波对任意长度圆形孔边径向共线裂纹尖端的动应力强度因子<sup>[5]</sup>。

本文在线弹性断裂动力学的范畴内, 采用复变函数和 Green 函数方法研究任意有限长度的椭圆孔边上径向共线裂纹对 SH 波的散射和裂纹尖端的动应力强度因子的求解。取含有半椭圆缺口的弹性半空间水平表面上任意一点承受时间谐和的出平面线源荷载作用时的位移解

\* 收稿日期: 2002\_05\_20; 修订日期: 2004\_04\_24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59578003)

作者简介: 刘殿魁(1937—), 男, 教授, 博士生导师(Tel/Fax: + 86\_451\_82519264; E\_mail: rainy95@sina.com);

陈志刚(联系人, Tel: + 86\_20\_85222190; 13929560236; Fax: 86\_20\_85220732; E\_mail: tchzg@jnu.edu.cn)。

作为 Green 函数, 从椭圆孔对 SH 散射问题出发, 沿  $x$  轴将介质剖分为两部分, 利用裂纹“切割”方法在孔边构造裂纹, 即在剖分面上在欲出现孔边裂纹的区域加置与椭圆孔对 SH 波散射产生应力相对应的大小相等、方向相反的出平面荷载, 从而构造出孔边裂纹。在剖分面其余区域上加置未知的出平面荷载并根据裂纹面以外区域的连续条件建立起问题的定解积分方程, 并将其离散为含 II 型动应力强度因子的线性代数方程组。最后给出了孔边径向裂纹动应力强度因子的计算结果, 讨论了椭圆孔的存在对动应力强度因子的影响, 并指出在动力问题中将复合缺陷的非裂纹部分简化为 Griffith 直线裂纹的方法并不总是偏于安全的。

## 1 Green 函数

### 1.1 Green 函数的控制方程和边界条件

本文采用的 Green 函数是一个具有半椭圆缺口的弹性半空间在其水平表面上任意一点承受时间谐和的出平面线源荷载作用时的位移解, 如图 1 所示。位移函数  $G$  与时间的依赖关系为  $e^{-i\omega t}$ , 应满足控制方程

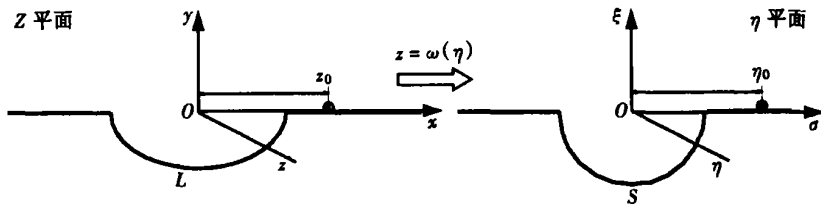


图 1 线源荷载作用的半空间

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k^2 G = 0, \quad (1)$$

其中  $k = \omega / C_s$ ,  $C_s = \sqrt{\mu / \rho}$  为介质的剪切波速,  $\omega$  为位移函数的圆频率,  $\rho$ ,  $\mu$  分别为介质的密度和剪切模量, 在各向同性介质中, 应力和位移的关系为

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial G}{\partial y}. \quad (2)$$

引入复变量  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ 。在复平面  $Z$  内, 控制方程(1)和(2)式分别为

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{k^2}{4} G = 0, \quad (3)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left[ \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right], \quad \tau_{yz} = i\mu \left[ \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right]. \quad (4)$$

在求解非圆孔洞引起弹性波散射问题时, 可将  $Z$  平面上的非圆边界  $L$  的外域(或内域)保角映射为  $\eta$  平面上边界为  $S$  的一个单位圆的外域(或内域)。引入保角映射函数

$$z = \omega(\eta), \quad \eta = Re^{i\theta}.$$

将映射函数代入方程(3)得

$$\frac{1}{\omega'(\eta)} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} + \frac{k^2}{4} G = 0. \quad (5)$$

在复平面内引入曲线坐标量  $r$ ,  $\theta$  则有

$$\begin{cases} \tau_{rz} = \mu \left[ \frac{\partial G}{\partial z} e^{i\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} e^{-i\alpha} \right], \\ \tau_{\theta z} = i\mu \left[ \frac{\partial G}{\partial z} e^{i\alpha} - \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} e^{-i\alpha} \right], \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\alpha$  为孔边界  $L$  上的法向角, 在映射中代换为

$$e^{i\alpha} = \frac{\eta\omega'(\eta)}{R|\omega'(\eta)|}, \quad e^{-i\alpha} = \frac{\overline{\eta\omega'(\eta)}}{R|\omega'(\eta)|}. \quad (7)$$

边界条件可表述为

$$\begin{cases} \tau_{rz} = 0, \text{ 在孔边 } S \text{ 的法向方向, 即 } \eta = e^{i\theta} \text{ 时 } (R = 1), \\ \tau_{\theta z} = \delta(z - z_0), \text{ 在 } \theta = 0, \pi \text{ 上,} \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\delta$  为 Dirac\_Delta 函数,  $z_0$  为线源荷载作用点。

## 1.2 Green 函数的导出

在上述边界条件约束下, 满足控制方程(1)的基本解应包括两部分运动: 水平面线源荷载的扰动和半椭圆形缺口所激发的散射波。在一个完整的弹性半空间上,  $z_0$  处的线源荷载产生的波场为

$$G^{(i)} = \frac{i}{2\mu} H_0^{(1)}(k|z - z_0|), \quad (9)$$

其中  $H_0^{(1)}(\cdot)$  为第一类 Hankel 函数。引入映射函数  $z = \omega(\eta)$  得到映射平面  $\eta$  上的入射波的表达式为:

$$G^{(i)} = \frac{i}{2\mu} H_0^{(1)}(k|\omega(\eta) - \omega(\eta_0)|), \quad (10)$$

其中  $\eta_0$  为线源荷载作用点  $z_0$  在映射平面上的像。对于由半椭圆缺口所激发且满足水平界面应力自由条件的散射波, 应具有如下形式<sup>[6]</sup>

$$G^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \cdot \left\{ \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m + \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{-m} \right\}, \quad (11)$$

其中  $A_m$  为待定的未知系数, 由半椭圆表面上应力自由的边界条件决定, 即

$$\tau_{rz}^{(i)} + \tau_{rz}^{(s)} = 0 \quad (12)$$

将(10)、(11)式代入(6)式, 求得入射波  $G^{(i)}$  和散射波  $G^{(s)}$  产生的应力, 经整理边界条件(12)可表示为

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \varepsilon_m - \varepsilon = 0, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = & \left[ H_{m-1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \cdot \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{m-1} - \right. \\ & \left. H_{m+1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \cdot \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{-(m+1)} \right] \cdot \eta\omega'(\eta) - \\ & \left[ H_{m+1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \cdot \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{m+1} - \right. \\ & \left. H_{m-1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \cdot \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{-(m-1)} \right] \cdot \overline{\eta\omega'(\eta)}, \\ \varepsilon = & -\frac{i}{2\mu} H_1^{(1)}(k|\omega(\eta) - \omega(\eta_0)|) \times \\ & \left[ \frac{\overline{\omega(\eta) - \omega(\eta_0)}}{|\omega(\eta) - \omega(\eta_0)|} \cdot \eta\omega'(\eta) + \frac{|\omega(\eta) - \omega(\eta_0)|}{|\omega(\eta) - \omega(\eta_0)|} \cdot \overline{\eta\omega'(\eta)} \right]. \end{aligned}$$

满足边界条件(13)的散射波的待定系数  $A_m$ , 可按下式确定

$$\int_0^\pi \varepsilon_n \left( \sum_{m=0}^{\infty} A_m \varepsilon_m - \varepsilon \right) d\theta = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

使边界上产生误差的绝对值最小, 通过精度控制截取有限项, 将其化为求解未知系数  $A_m$  的代数方程组, 从而得到含半椭圆缺口弹性半空间的 Green 函数为

$$G = G^{(i)} + G^{(s)} = \frac{i}{2\mu} H_0^{(1)}(k|z - z_0|) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cdot H_m^{(1)}(k|z|) \left\{ \left[ \frac{z}{|z|} \right]^m + \left[ \frac{z}{|z|} \right]^{-m} \right\}. \quad (15)$$

## 2 定解积分方程

孔边径向裂纹对 SH 波的散射模型如图 2 所示。直角坐标系的原点与椭圆形孔洞的中心重合, 在  $x$  轴上含有长度分别为  $a_1, a_2$  的共线裂纹, 其中  $a_1, a_2$  均为有限值。在出平面问题中, 位移分量仅有沿垂直于画面方向的出平面位移。鉴于孔洞和裂纹都要对 SH 波产生散射, 现在对其分别考虑, 并采用裂纹“切割”的办法, 由孔洞对 SH 波散射的结果和求得的 Green 函数构造出椭圆孔和孔边裂纹对 SH 波散射的解答。

### 2.1 椭圆孔对 SH 波的散射

首先考虑 SH 波入射到含有椭圆孔的无限大线弹性均匀介质。关于时间谐和的出平面入射位移场  $w^{(i)}$  在复平面内可以写成(以下省略时间因子  $e^{-i\omega t}$ )

$$w^{(i)} = w_0 \exp[ ik(z e^{-i\alpha_0} + z e^{i\alpha_0})/2 ], \quad (16)$$

其中  $w_0$  为入射波幅值,  $\alpha_0$  为入射角,  $k$  为介质的剪切波数。引入映射函数  $z = \omega(\eta)$ , 式(16)变换为:

$$w^{(i)} = w_0 \exp[ ik(\omega(\eta) e^{-i\alpha_0} + \overline{\omega(\eta)} e^{i\alpha_0})/2 ], \quad (17)$$

入射波作用于椭圆孔产生的散射波场为

$$w^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(s)} H_m^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \cdot \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m, \quad (18)$$

其中系数  $A_m^{(s)}$  由孔边应力自由的边界条件求出, 即  $\tau_{rz}^{(t)} = \tau_{rz}^{(i)} + \tau_{rz}^{(s)} = 0$ 。具体确定方法同(11)式。 $x$  轴上的应力可以写成

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(t)} = \tau_{xz}^{(i)} + \tau_{xz}^{(s)} = & -\frac{ikw_0}{2} \exp[ ik(\omega(\eta) e^{-i\alpha_0} + \overline{\omega(\eta)} e^{i\alpha_0})/2 ] \left[ \frac{\eta \omega'(\eta)}{R |\omega(\eta)|} e^{-i\alpha_0} - \frac{\overline{\eta \omega'(\eta)}}{R |\omega(\eta)|} \right] + \\ & \frac{iHk}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(s)} \cdot \left\{ H_{m-1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \cdot \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{m-1} \cdot \frac{\eta \omega'(\eta)}{R |\omega(\eta)|} + \right. \\ & \left. H_{m+1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \cdot \left[ \frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{m+1} \cdot \frac{\overline{\eta \omega'(\eta)}}{R |\omega(\eta)|} \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

### 2.2 孔边裂纹对 SH 波的散射

根据已经得到的含孔的无限大介质中 SH 波的入射波场和散射波场, 可以按裂纹“切割”的方式构造出含有长度分别为  $a_1$  和  $a_2$  的孔边径向共线裂纹的材料对 SH 波散射的模型。其构造过程是: 沿  $x$  轴将材料剖开, 在欲出现裂纹的区间的上下剖面施加一对出平面反力, 其大小为  $-[\tau_{xz}^{(i)} + \tau_{xz}^{(s)}]$ , 则这些区间段的上(或下)剖面的合力均为零, 即可看作裂纹; 同时为了

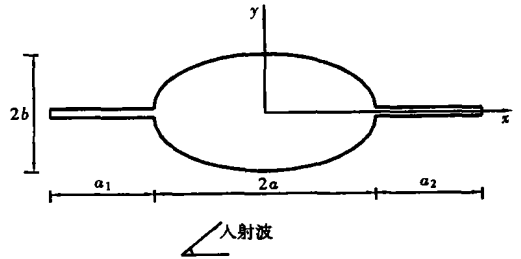


图 2 孔边径向裂纹模型

满足剖面上裂纹以外区域的应力和位移的连续条件, 在其上下剖面的相应区域施加一对待求得平面外力系  $f^-$  和  $f^+$ 。显然, 剖面上的应力连续条件是自然满足的, 即

$$\tau_{\theta}^{(i)+} + f^+ (r_0, \theta_0) = \tau_{\theta}^{(i)-} + f^- (r_0, \theta_0) \quad (\text{在 } \theta_0 = 0, \pi \text{ 上}) \quad (20)$$

利用已求得的 Green 函数, 并注意到上下剖面的位移分量及应力分量有对等关系, 则可以得到以剖面上位移分段连续条件为约束, 建立未知外力系  $f(r_0, \theta_0)$  的定解积分方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_1} f(r_0, \pi) \cdot G(r, \pi, r_0, \pi) dr_0 + \int_{\Gamma_2} f(r_0, 0) \cdot G(r, \pi, r_0, 0) dr_0 = \\ \int_{C_1} \tau_{\theta}^{(i)} \cdot G(r, \pi, r_0, \pi) dr_0 + \int_{C_2} \tau_{\theta}^{(i)} \cdot G(r, \pi, r_0, 0) dr_0 \\ \int_{\Gamma_1} f(r_0, \pi) \cdot G(r, 0, r_0, \pi) dr_0 + \int_{\Gamma_2} f(r_0, 0) \cdot G(r, 0, r_0, 0) dr_0 = \\ \int_{C_1} \tau_{\theta}^{(i)} \cdot G(r, 0, r_0, \pi) dr_0 + \int_{C_2} \tau_{\theta}^{(i)} \cdot G(r, 0, r_0, 0) dr_0 \end{array} \right. \quad (21)$$

其中  $f$  代表待求的附加外力系,  $G$  代表 Green 函数,  $\tau_{\theta}^{(i)}$  由式(19)给出, 各积分区间分别为:

$$\Gamma_1 = [a + a_1, \infty), \quad \Gamma_2 = [a + a_2, \infty), \quad C_1 = [a, a + a_1], \quad C_2 = [a, a + a_2] \quad \bullet$$

### 2.3 动应力强度因子(DSIF)

上述定解积分方程属于半无限域上含弱奇异性的第一类 Fredholm 积分方程, 其奇异性表现为 Green 函数的像点与源点重合时, 被积核函数呈对数奇异性。此外在裂纹尖端点, 应力场有平方根奇异性, 考察本文工作可以推知附加外力系  $f$  在裂纹尖端点也具有平方根奇异性。当引入动态强度因子  $k_{III}$ , 可得关系式

$$k_{III} = f \cdot \sqrt{2(r - a - A)} \quad (A = a_1, a_2) \quad (22)$$

为使定解积分方程组中直接包含动应力强度因子  $k_{III}$ , 对式(21)中的被积函数作如下的代换

$$f \cdot G = [f \cdot \sqrt{2(r - a - A)}] \cdot [G / \sqrt{2(r - a - A)}] \quad (23)$$

由通过代换后的定解积分方程组可以直接给出  $k_{III}$  的数值结果。具体求解积分方程组的方法很多, 本文采用弱奇异积分方程组直接离散法, 结合散射波的衰减特性, 把积分方程组转化为线性代数方程组, 用 Gauss 消元法求解出在一系列离散点上的待求函数值, 裂纹尖端点对应的值即为动应力强度因子  $k_{III}$ 。

在复平面上, 沿  $\alpha_0$  方向入射的时间谐和波  $w^{(i)}$  在入射方向产生的应力最大幅值为

$$\tau_0 = |\tau_{rz}^{(i)}| = \mu k w_0 \quad (24)$$

在应用中通常定义一个无量纲的动应力强度因子  $k_3$

$$k_3 = |k_{III} / (\tau_0 Q)|, \quad (25)$$

它是动应力强度因子  $k_{III}$  与相应的静态应力强度因子  $k_{III}^{(s)} = \tau_0 Q$  的比值。其中,  $Q$  是一个特征尺寸, 具有长度的平方根的量纲。通常许多动力问题对应的静态问题的应力强度因子难以给出显式表达, 本文建议, 对于直线裂纹,  $Q$  可取为裂纹长度  $A$  的平方根; 对于对称的孔边径向共线裂纹,  $Q$  可取 G. C. Sih 在研究此类裂纹受无穷远出平面静力剪切荷载作用时给出的一个解析的表达式

$$Q = \sqrt{(A + a)^4 - a^4} / \sqrt{(A + a)^3} \quad (26)$$

### 3 算例和分析

本文研究中将含椭圆孔介质的外域映射为映射平面上单位圆外域的映射函数形式为

$$z = \omega(\eta) = R \left[ \eta + \frac{m}{\eta} \right], \quad R = \frac{a+b}{2}; \quad m = \frac{a-b}{a+b}.$$

给出了椭圆孔和圆孔在有不同长度的孔边裂纹时, 动应力强度因子对于无量纲波数的变化, 并与已有的解答进行了比较。

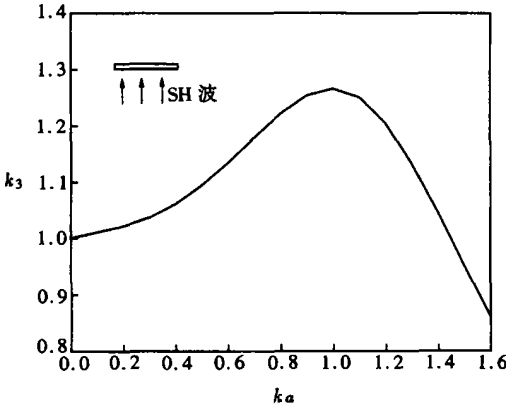


图3 SH波垂直入射含有长度为2A直线裂纹的均匀介质时, 无量纲 DSIF 随 ka 的变化

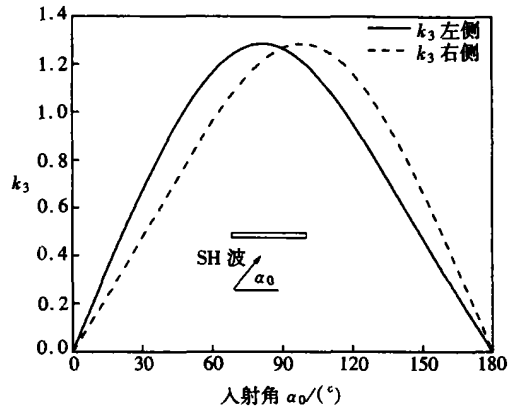


图4 SH波以不同角度入射含有长度为2A直线裂纹的均匀介质, DSIF的变化(ka = 1.0)

1) 图3和图4给出的是孔径  $a$  和  $b$  趋于零, 而孔边裂纹 ( $A = a_1 = a_2$ ) 退化为长度为  $2A$  的直线型裂纹时的分析结果。J. F. Loeber 和 G. C. Sih<sup>[7]</sup> 曾采用积分变换建立对偶方程的办法, 给出了此问题的解答。图3给出SH波垂直入射含有长度为  $2A$  的直线型裂纹的均匀介质时, 无量纲 DSIF 随无量纲波数  $ka$  的变化。DSIF 的最大值约为 1.27, 与文献[7]中的图2相吻合。图4给出  $ka = 1.0$ , SH波以不同的角度入射含有长度为  $2A$  的直线型裂纹介质时, 角度变化对 DSIF 的影响。当SH波水平入射孔边裂纹时(沿  $x$  轴的正向或负向), 从定解积分方程组可以直接推导出来 DSIF 的值为零。

2) 图5表示入射角  $\alpha_0 = \pi/2$  时, SH波作用于对称的圆孔 ( $a = b$ ) 边裂纹, DSIF 的准静力值 ( $ka = 0.01$ ) 对特征尺寸比率  $A/a$  的变化规律, 如图中实线所示。图中所示点划线为 G. C. Sih<sup>[4]</sup> 给出的静力解, 二者是一致的。同时也给出了将圆孔看作直线型裂纹的一部分而得到的长度为  $2(a + A)$  的直线型裂纹的静态应力强度因子, 如图中的虚线所示, 其定义为

$$k_{III}^{(s)} / \sqrt{a} = \sqrt{a + A} / \sqrt{a} = \sqrt{1 + A/a}.$$

为了便于比较, 纵坐标给出的不是标准的无量纲 DSIF。由图可见, 圆孔的存在使孔边裂纹的应力强度因子降低, 且在  $A/a < 1$  时尤为显著; 但随着裂纹长度的相对增加, 圆孔的影响越来越小, 直至可以忽略, 即准静力时的结果与“将非裂纹缺陷简化为 Griffith 直线裂纹是偏于安全的”的假设并不矛盾。

3) 图6、图7给出SH垂直入射孔边裂纹, 取两组不同的入射频率和椭圆长短轴之比为不同值时, DSIF对比率  $A/a$  的变化。同时也给出将孔视为直线型裂纹的一部分而得到的长度为  $2(a + A)$  的直线型裂纹的动应力强度因子。由图可见, 尽管随着裂纹长度的相对增加孔的影响越来越小, 但孔边裂纹动应力强度因子既可能大于又可能小于简化后的直线型裂纹的动

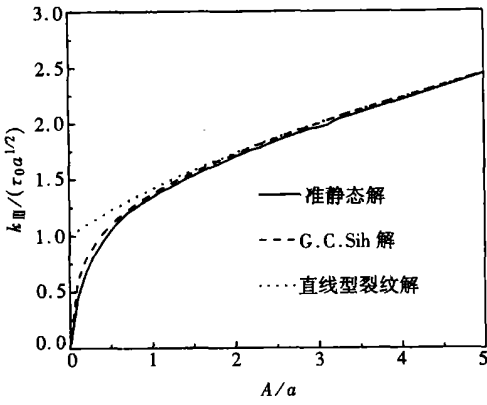


图 5 SH 波垂直入射含孔边裂纹的均匀介质时, 准静力解 ( $ka = 0.01$ ) 与 G. C. Sih 的解析静力解的比较

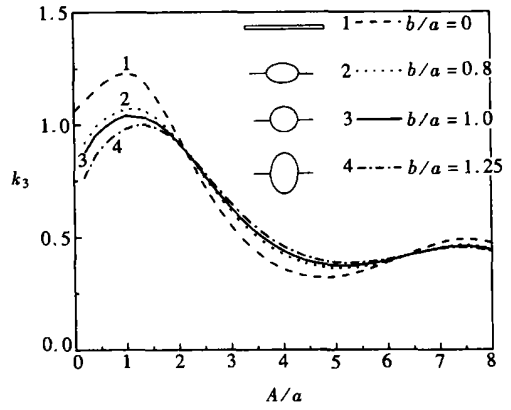


图 6 SH 波垂直入射含孔边裂纹的均匀介质时, DSIF 随  $A/a$  的变化 ( $ka = 0.5$ )

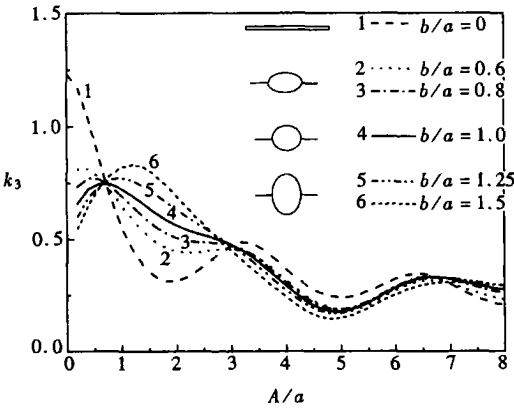


图 7 SH 波垂直入射含孔边裂纹的均匀介质时, DSIF 随  $A/a$  的变化 ( $ka = 1.0$ )

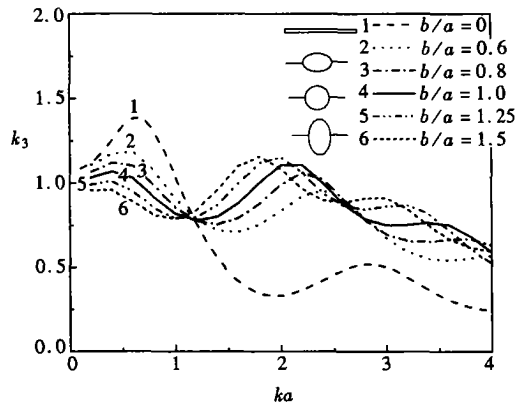


图 8 SH 波垂直入射含孔边裂纹的均匀介质时, DSIF 随  $ka$  的变化 ( $A/a = 0.5$ )

应力强度因子。此时,“将非裂纹缺陷简化为 Griffith 直线裂纹是偏于安全的”的假设并不总是成立,而与  $ka$  和  $A/a$  的大小有关。

4) 由图 6、图 7 亦可看出,在孔边裂纹长度不变情况下,随着椭圆  $b/a$  值的增大,孔对裂纹的动应力强度因子的影响越显著,当  $b/a < 1$  时,孔对裂纹影响趋向直线型裂纹,椭圆孔边裂纹的 DSIF 介于圆孔边裂纹和直线型裂纹之间。

5) 图 8、图 9 和图 10 给出 SH 垂直入射含椭圆孔边对称裂纹介质时,无量纲 DSIF 随无量纲波数  $ka$  的变化。可以看出无量纲 DSIF 一般随无量纲波数的增大而呈波动性的减少,且其峰值随比率  $A/a$  和  $b/a$  的减少而向后推迟,即裂纹尺寸相对于孔径尺寸越小,其峰值就相对于无量纲波数出现得越晚。由图 8 亦可以看出,在  $A/a = 0.5$  时,位于  $ka < 1.0$  的低频区域内孔边裂纹的 DSIF 小于直线形裂纹  $2(A+a)$  的动应力强度因子。

## 4 结 论

本文采用复变函数和 Green 函数方法求解孔边裂纹对 SH 波散射引起的动应力强度因子,与已有的结果尽可能做了比较。综述上述可以看出,入射波频率、入射角、裂纹尺寸、孔的形状

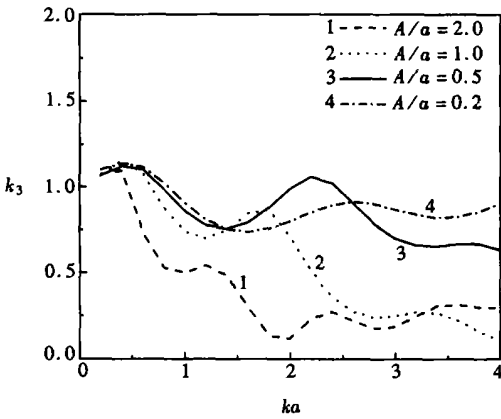


图9 SH波垂直入射含孔边裂纹的均匀介质时, DSIF随 $ka$ 的变化( $b/a = 0.8$ )

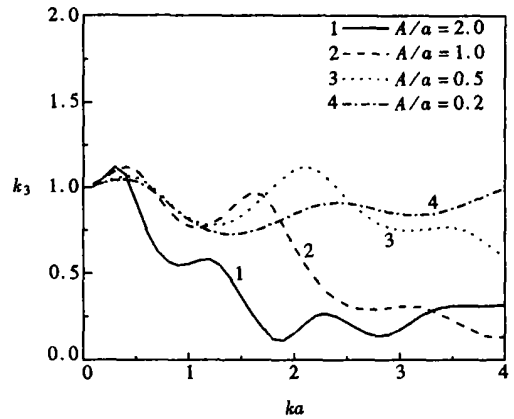


图10 SH波垂直入射含孔边裂纹的均匀介质时, DSIF随 $ka$ 的变化( $b/a = 1.0$ )

和尺寸等因素都影响裂纹尖端场的动应力强度因子。与长度为 $2(a+A)$ 的直线型裂纹对比, 孔洞的存在确实影响孔边裂纹 DSIF 的大小, 其影响不仅与无量纲数  $A/a$  和  $ka$  有关, 还应考虑孔洞形状的影响。当  $A/a < 1$  时, 孔边裂纹准静力应力强度因子明显小于将圆孔作为直线型裂纹的一部分而得到的结果。但随着无量纲波数的增加, 孔边裂纹 DSIF 呈现出不同于静态时的特性, 它并不总是小于将孔看作直线型裂纹的一部分而得到的长度为  $2(a+A)$  的直线型裂纹的动应力强度因子, 而是围绕直线型裂纹 DSIF 值呈现出波动性。这表明, 在动力分析中, 当孔边裂纹长度与孔径尺寸为同一数量级时, 将孔缺陷看作直线型裂纹的一部分会引起一定偏差, 将材料内部的缺陷一律简化为直线型裂纹并不总是偏于安全的。

### [参 考 文 献]

- [1] Sih G C. Mechanics of Fracture[M]. Leyden: Noordhoff, 1973.
- [2] Sih G C. Mechanics of Fracture[M]. Leyden: Noordhoff, 1977.
- [3] 王铎, 汪越胜. 界面动力学研究近况[J]. 上海力学, 1993, 14(4): 1—15.
- [4] Sih G C. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1965, 32(1): 51—58.
- [5] 刘殿魁, 刘宏伟. 孔边裂纹对 SH 波的散射及其动应力强度因子[J]. 力学学报, 1999, 31(3): 292—298.
- [6] LIU Dian\_kui, GAI Bing\_zheng, TAO Gui\_yuan. Applications of the method of complex function to dynamic stress concentration[J]. Wave Motion, 1982, 4(4): 293—304.
- [7] Loeber J F, Sih G C. Diffraction of anti-plane shear waves by a finite crack[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1968, 44(1): 90—98.



## Scattering of SH\_Wave by Cracks Originating at an Elliptic Hole and Dynamic Stress Intensity Factor

LIU Dian\_kui<sup>1</sup>, CHEN Zhi\_gang<sup>2</sup>

( 1. School of Civil Engineering, Harbin Engineering University,  
Harbin 150001, P. R. China;

2. Department of Civil Engineering, Jinan University,  
Guangzhou 510632, P. R. China )

**Abstract:** The method of complex function and the method of Green's function are used to investigate the problem of SH\_wave scattering by radial cracks of any limited length along the radius originating at the boundary of an elliptical hole, and the solution of dynamic stress intensity factor at the crack tip was given. A Green's function was constructed for the problem, which is a basic solution of displacement field for an elastic half space containing a half elliptical gap impacted by anti-plane harmonic linear source force at any point of its horizontal boundary. With division of a crack technique, a series of integral equations can be established on the conditions of continuity and the solution of dynamic stress intensity factor can be obtained. The influence of an elliptical hole on the dynamic stress intensity factor at the crack tip was discussed.

**Key words:** crack originating at elliptical hole; SH\_wave scattering; Green's function; dynamic stress intensity factor (DSIF); complex function; integral equation