应用数学和力学，第7卷第9期（1986年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多台系统同步开发的可靠性增长*

周 源 泉

（北京强度与环境研究所，1985年9月11日收到）

摘　　要

本文将AMSAA 模型推广到多台系统进行同步开发的情况，给出了 Weibull 过程参数的最大似然(ML)估计及平均无故障工作时间(MTBF) 的区间估计．而Crow[1] 的公式则是本文结果的特例。

一、引　　言

对可修复的复杂系统，Duane 发现[3]，在研制试验阶段（或称开发期），它的累积失效率的对数与累积开发时间 t 的对数，呈很好的线性关系。记$(0,\ t]$内系统的失效数为 $N(t)$，则累积失效率为 $N(t)/t$。Duane 假设：

$$\ln[N(t)/t]\doteq\ln\alpha+(\beta-1)\ln t$$

故

$$N(t)=\alpha t^{\beta}+\varepsilon(t)$$

式中　$\varepsilon(t)$是均值为0的误差。

Crow 用下述概率模型来描述 Duane 可靠性增长假设：

1．系统在开发期$(0,\ t]$内出现的失效次数是含均值函数 $\nu(t)=E[N(t)]=\alpha t^{\beta}$ 及瞬时强度$\lambda(t)=dE[N(t)]/dt=\alpha\beta t^{\beta-1}$的非齐次 Poisson 过程：

$$P\{N(t)=n\}=\frac{[\nu(t)]^{n}}{n!}\exp[-\nu(t)]\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

$\{N(t),\ t>0\}$ 叫 Weibull 过程。

2．若系统于 t_0 定型，之后对系统不再作改进。定型后系统的寿命服从指数分布，则$\lambda(t_0)=\alpha\beta t_0{}^{\beta-1}$，系统的 MTBF 为$M(t_0)=[\alpha\beta t_0{}^{\beta-1}]^{-1}=[\lambda(t_0)]^{-1}$

上述模型的统计推断工作主要是由 AMSAA (Army Material Systems Analysis Activity) 的 Crow 进行的，故称为 AMSAA 模型。Crow[1]对单台系统可靠性增长的 Weibull 过程，给出了参数α及β的ML估计及定型时的MTBF的区间估计。

在实际的研制试验中，往往对多台同型系统同步进行可靠性增长试验，这时Crow 的结果[1]不能照搬。本文将AMSAA模型推广到多台同型系统同步进行可靠性增长试验的情况，给出了Weibull过程参数的ML估计及定数、定时截尾场合的MTBF 的区间估计。

* 吴望一推荐。

二、定数截尾数据的区间估计

将k个同型可修系统同步作可靠性增长试验，当诸系统的失效数之总和等于预定的次数n时，所有投试的系统同时停试，这称为k个系统可靠性增长的定数截尾试验。第i个系统在$(0,\ t]$内的失效次数为$N_i(t)$，第i个系统的第j次失效的观测时间为t_{ij}，$i=\overline{1,\ k}, j=\overline{1,\ n_i}$，$n_i$是第$i$个系统在停试前观测到的失效数，且$n=\sum_{i=1}^{k} n_i$，记截尾时间为$t_n$，则$t_n=\max_{i,j} t_{ij}$。

观测$\{t_{ij},\ i=\overline{1,\ k}, j=\overline{1,\ n_i};\ N_i(t_n)=n_i,\ i=\overline{1,\ k}\}$的似然函数为：

$$
\begin{aligned}
&f(t_{ij}, i=\overline{1,\ k}, j=\overline{1,\ n_i};\ N_i(t_n)=n_i,\ i=\overline{1,\ k}) \\
&=\prod_{i=1}^{k}\left[\prod_{j=1}^{n_i}\left(\alpha\beta t_{ij}^{\beta-1}\exp\left[-\int_{t_{i,j-1}}^{t_{ij}}\lambda(t)dt\right]\right)\right]\exp\left[-\int_{t_{in_i}}^{t_n}\lambda(t)dt\right] \\
&=[\alpha\beta]^n\exp[-k\alpha t_n^{\beta}]\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i} t_{ij}^{\beta-1}\right)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

则α、β的ML估计$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\hat{\alpha}=n/t_n^{\hat{\beta}} \\
&\hat{\beta}=n\Big/\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{t_n}{t_{ij}}
\end{aligned}\right\}
\tag{2.2}
$$

系统于定型时t_n的MTBF $M(t_n)$的ML估计为：

$$
\hat{M}(t_n)=(\hat{\alpha}\hat{\beta}t_n^{\hat{\beta}-1})^{-1}=kt_n/n\hat{\beta}
\tag{2.3}
$$

为了给出$M(t_n)$的区间估计、需要建立下面三个定理。

定理 1
$$
2\beta\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{t_n}{t_{ij}}\sim\chi^2_{2(n-1)}
\tag{2.4}
$$

且t_n与$y_{ij}=t_{ij}/t_n\ (i=\overline{1,\ k}, j=\overline{1,\ n_i},\ y_{ij}\neq 1)$相互独立。

证
$$
\begin{aligned}
&f(t_{ij}, i=\overline{1,\ k}, j=\overline{1,\ n_i}\mid N_i(t_n)=n_i,\ i=\overline{1,\ k}) \\
&=\frac{f(t_{ij}, i=\overline{1,\ k}, j=\overline{1,\ n_i};\ N_i(t_n)=n_i,\ i=\overline{1,\ k})}{P\{N_i(t_n)=n_i,\ i=\overline{1,\ k}\}} \\
&=(\beta/t_n)^n\prod_{i=1}^{k}\left[n_i!\prod_{j=1}^{n_i}(t_{ij}/t_n)^{\beta-1}\right]
\end{aligned}
$$

作变换：

$$
\begin{cases}
y_{ij}=t_{ij}/t_n\ (i=\overline{1,\ k}, j=\overline{1,\ n_i},\ y_{ij}\neq 1) \\
t_n=t_n
\end{cases}
$$

变换的雅可比行列式为$J=t_n^{n-1}$，则

$$
\begin{aligned}
&g(y_{ij},\ i=\overline{1,\ k}, j=\overline{1,\ n_i},\ y_{ij}\neq 1;\ t_n\mid N_i(t_n)=n_i,\ i=\overline{1,\ k}) \\
&=\frac{\beta}{t_n}\left(\prod_{i=1}^{k}n_i!\right)\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}\left(\beta y_{ij}^{\beta-1}\right)\quad (y_{i_1 j}\neq 1)
\end{aligned}
$$

故 $y_{ij}(i=\overline{1, k}, j=\overline{1, n_i}, y_{ij}\neq 1)$与$t_n$相互独立.

对任一个i，上述密度中的因子 $n_i!\prod_{j=1}^{n_i}(\beta y_{ij}^{\beta-1})$ 恰与n_i个（若 $i=l$ 时，$t_{ln_l}=t_n$，因子中的 n_i 要改为 n_l-1）相互独立的密度为 $\beta y^{\beta-1}$ 的随机变量的顺序统计量的联合密度相等[4]，故 $-\beta\ln y_{ij}(i=\overline{1, k}, j=\overline{1, n_i}, y_{ij}\neq 1)$是$n-1$个相互独立的标准指数分布随机变量，则

$$2\beta\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{t_n}{t_{ij}}\sim\chi^2_{2(n-1)}$$ 证毕.

由(2.4)式，$E((n-1)\hat{\beta}/n)=\beta$，故$\beta$的无偏估计为

$$\bar{\beta}=\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{t_n}{t_{ij}}} \tag{2.5}$$

β的置信度为γ的置信区间为：

$$P\left\{\bar{\beta}\frac{\chi^2_{2(n-1),(1-\gamma)/2}}{2(n-1)}<\beta<\bar{\beta}\frac{\chi^2_{2(n-1),(1+\gamma)/2}}{2(n-1)}\right\}=\gamma \tag{2.6}$$

式中$\chi^2_{f,\gamma}$是自由度为f的χ^2-分布的γ-下侧分位数.

定理2 $t_n\sim f(x)=\Gamma(x|n, k\alpha, \beta)$

$$\triangleq\frac{\beta(k\alpha)^n}{\Gamma(n)}x^{n\beta-1}\exp[-k\alpha x^\beta]\qquad(x>0) \tag{2.7}$$

$\Gamma(x|n, k\alpha, \beta)$叫广义伽玛分布. 当$k=1$，有

$$f(x)=\Gamma(x|n, \alpha, \beta)=\frac{\beta\alpha^n}{\Gamma(n)}x^{n\beta-1}\exp[-\alpha x^\beta]\quad(x>0) \tag{2.8}$$

它恰是 Weibull 过程第n次失效时间的概率密度

证 先证(2.8)式，设单台系统的观测的失效时间为：

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$$

首次观测失效时间t_1的密度为$f_1(t_1)=\alpha\beta t_1^{\beta-1}\exp[-\alpha t_1^\beta]$，即(2.8)式在$n=1$时成立.

设失效数为$n-1$时，(2.8)式成立，则

$$f_{n-1}(t_{n-1})=\frac{\beta\alpha^{n-1}}{\Gamma(n)}t_{n-1}^{(n-1)\beta-1}\exp[-\alpha t_{n-1}^\beta]$$

而 t_n-t_{n-1} 的密度为：

$$f_n(t_n-t_{n-1})=\alpha\beta t_n^{\beta-1}\exp[-\alpha(t_n^\beta-t_{n-1}^\beta)]$$

由卷积可得t_n的密度：

$$f(t_n)=\int_0^{t_n}f_{n-1}(t_{n-1})f_n(t_n-t_{n-1})dt_{n-1}$$

$$=\frac{\beta\alpha^n}{\Gamma(n)}t_n^{n\beta-1}\exp[-\alpha t_n^\beta]$$

(2.8)式得证.

对多台系统的情况，设第$l(1\leqslant l\leqslant k)$个系统的最后一次失效时间 $t_{ln_l}=t_n$，其密度为：

$$f_l(t_n)=\frac{\beta\alpha^{n_l}}{\Gamma(n_l)}t_n^{n_l\beta-1}\exp[-\alpha t_n^\beta] \tag{2.9}$$

其余的 $k-1$ 个系统有：$t_{in_i}<t_n(i=\overline{1,k},\ i\neq l)$，则 $t_{in_i}(i=\overline{1,k},\ i\neq l)$ 的密度为：

$$\frac{\beta\alpha^{n_i}}{\Gamma(n_i)}t_{in_i}^{n_i\beta-1}\exp[-\alpha t_{in_i}^{\beta}]\quad(i=\overline{1,k},\ i\neq l)$$

第 $i(i=\overline{1,k},\ i\neq l)$ 个系统在 $(t_{in_i},t_n]$ 内不再失效的概率为：$\exp[\alpha(t_{in_i}^{\beta}-t_n^{\beta})]$，$(i=\overline{1,k},\ i\neq l)$。则第 i 个系统 $(i=\overline{1,k},\ i\neq l)$ 的 t_n 的密度为：

$$f_i(t_n)=\int_0^{t_n}\frac{\beta\alpha^{n_i}}{\Gamma(n_i)}t_{in_i}^{n_i\beta-1}\exp[-\alpha t_{in_i}^{\beta}]\cdot\exp[\alpha(t_{in_i}^{\beta}-t_n^{\beta})]dt_{in_i}$$

$$=\frac{\alpha^{n_i}}{n_i!}t_n^{n_i\beta}\exp[-\alpha t_n^{\beta}]\qquad(i=\overline{1,k},\ i\neq l)\tag{2.10}$$

因 $P\{t_{in_i}=t_n,\ i=\overline{1,k}\}=k^{-1}$ 及随机数 n_i 满足：$0\leqslant n_i\leqslant n$ 与 $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$。故 k 个系统的总失效次数为预定值 n 且均于 t_n 截尾，则 k 个系统的 t_n 的联合密度为：

$$f(t_n)=k\sum_{\substack{0\leqslant n_i\leqslant n\\ \sum_{i=1}^{k}n_i=n}}\left[f_l(t_n)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{k}f_i(t_n)\right]$$

$$=\beta\alpha^n t_n^{n\beta-1}\exp[-k\alpha t_n^{\beta}]\cdot\frac{k}{(n-1)!}\sum_{\substack{0\leqslant n_i\leqslant n\\ \sum_i n_i=n}}(n-1)!\Big/\Big[(n_l-1)!\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{k}\Big]$$

$$=\frac{\beta(k\alpha)^n}{\Gamma(n)}t_n^{n\beta-1}\exp[-k\alpha t_n^{\beta}]$$

证毕。

系 $2k\alpha t_n^{\beta}\sim\chi^2_{2n}$

证 $\because\ t_n\sim f(x)=\Gamma(x|n,\ k\alpha,\ \beta)$

则 $$2k\alpha t_n^{\beta}\sim g(y)=f[x(y)]\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|=\Gamma(y|n,\ 1/2)$$

故 $$2k\alpha t_n^{\beta}\sim\chi^2_{2n}$$

定理3 $4n^2\cdot\hat{M}(t_n)/M(t_n)=Z\cdot S$

$Z\sim\chi^2_{2(n-1)}$，$S\sim\chi^2_{2n}$，且相互独立。

证 由(2.2)、(2.3)式，有

$$\hat{M}(t_n)=\frac{kt_n}{n^2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{t_n}{t_{ij}}$$

$$\therefore\quad 4n^2\cdot\hat{M}(t_n)/M(t_n)=\left(2\beta\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{t_n}{t_{ij}}\right)(2k\alpha t_n^{\beta})$$

由定理1，

$$S\triangleq2\beta\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{t_n}{t_{ij}}\sim\chi^2_{2(n-1)}$$

由定理 2 的系，

$$Z \triangleq 2k\alpha t_n^{\beta} \sim \chi^2_{2n}$$

由定理 1 知，S与Z相互独立。

此定理表面上与 Crow[2]或 Lee and Lee[5]的结果形式相同，事实上，[2]、[5]是对单台系统的 Weibull 过程给出的，即其结果是本定理在$k=1$时的特例。由定理3即得$M(t_n)$的置信区间：

$$P\{\rho_1\hat{M}(t_n)<M(t_n)<\rho_2\hat{M}(t_n)\}=\gamma \tag{2.11}$$

式中ρ_1，ρ_2在$n\leqslant100$及不同γ下之值可见Crow[1]的表1。当$n>100$时，ρ_1，ρ_2的近似值$\tilde{\rho}_1$，$\tilde{\rho}_2$分别为[1]：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\rho}_1&=\left[1+\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot u_{(2+\gamma)/2}\right]^{-1}\\ \tilde{\rho}_2&=\left[1-\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot u_{(1+\gamma)/2}\right]^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

式中u_δ是标准正态分布的δ-F侧分位数。

三、定时截尾数据的区间估计

将k个同型可修系统同步作可靠性增长试验，当各系统的累积试验时间恰为预定值T即停试，称为k个系统可靠性增长的定时截尾。第i个系统在$(0,\ t]$内的失效次数记为$N_i(t)$，在$(0,\ T]$内第i个系统的观测的失效次数为n_i，其失效的观测时间依次为：

$$0=t_{i0}<t_{i1}<t_{i2}<\cdots<t_{in_i}<T \qquad (i=\overline{1,k}\text{且}\sum_{i=1}^{k}n_i=n)$$

观测$\{t_{ij},\ i=\overline{1,\ k},j=\overline{1,n_i};\ N_i(T)=n_i,\ i=\overline{1,\ k}\}$的似然函数为：

$$\begin{aligned}&f(t_{ij},i=\overline{1,\ k},j=\overline{1,n_i};\ N_i(T)=n_i,\ i=\overline{1,\ k})\\ &=(\alpha\beta)^n\exp[-k\alpha T^{\beta}]\left(\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}t_{ij}^{\beta-1}\right)\end{aligned} \tag{3.1}$$

则α、β的ML估计$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$为：

$$\left.\begin{aligned}\hat{\alpha}&=n/T^{\hat{\beta}}\\ \hat{\beta}&=n\Big/\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{T}{t_{ij}}\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

若系统在T定型，则系统的MTBF $M(T)$的ML估计为：

$$\hat{M}(T)=(\hat{\alpha}\hat{\beta}T^{\hat{\beta}-1})^{-1}=kT/n\hat{\beta} \tag{3.3}$$

为了建立$M(T)$的非随机化最优置信区间，需要下述几个定理：

定理 4
$$2\beta\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{T}{t_{ij}}\sim\chi^2_{2n} \tag{3.4}$$

证 其证明方法同定理1，周延昆在一个内部报告中已给出了这个结果。

$$f(t_{ij},i=\overline{1,\ k},j=\overline{1,n_i}\,|\,N_i(T)=n_i,\ i=\overline{1,\ k})$$

$$=\left(\frac{\beta}{T}\right)^n\prod_{i=1}^{k}\left[n_i!\prod_{j=1}^{n_i}(t_{ij}/T)^{\beta-1}\right]$$

作变换 $y_{ij}=t_{ij}/T(i=\overline{1,k},j=\overline{1,n_i})$，变换的雅可比行列式 $J=T^n$，故

$$g(y_{ij},i=\overline{1,k},j=\overline{1,n_i}\mid N_i(T)=n_i,\ i=\overline{1,k})$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\left[n_i!\prod_{j=1}^{n_i}(\beta y_{ij}^{\beta-1})\right]$$

故 $-\beta\ln y_{ij}\ (i=\overline{1,k},j=\overline{1,n_i})$ 是 n 个相互独立的标准指数分布，则

$$2\beta\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{T}{t_{ij}}\sim\chi^2_{2n}$$

证毕。

由定理 4 可得 $W=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\frac{T}{t_{ij}}$，在给定 n 下的密度

$$f(w\mid n)=\Gamma(w\mid n,\ \beta)\triangleq\frac{\beta^n}{\Gamma(n)}w^{n-1}\exp[-\beta w]\tag{3.5}$$

定理5 $M(T)$ 的置信度为 γ 的非随机化最优置信区间为：

$$P\{\pi_1\hat{M}(T)<M(T)<\pi_2\hat{M}(T)\}\geqslant\gamma\tag{3.6}$$

式中 $\pi_1=n^2/\gamma_2$，$\pi_2=n^2/\gamma_1$，γ_1、γ_2 由下式确定：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=n}^{\infty}\frac{\gamma_1^{j-\frac{1}{2}}}{j!(j-1)!I_1(2\sqrt{\gamma_1})}=\frac{1-\gamma}{2}\\&\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_2^{j-\frac{1}{2}}}{j!(j-1)!I_1(2\sqrt{\gamma_2})}=\frac{1-\gamma}{2}\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

$I_1(\cdot)$ 是变形的一阶 Bessel 函数。

证 记 $N(T)=\sum_{i=1}^{k}N_i(T)=N$，则

$$f(n,\ w\mid N>0)=f(w\mid n)P\{N=n\}/P\{N>0\}$$

$$=\frac{\frac{\beta^n}{\Gamma(n)}w^{n-1}\exp[-\beta w]\sum_{\substack{0\leqslant n_i\leqslant n\\ \sum_i n_i=n}}\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{(\alpha T^\beta)^{n_i}}{n_i!}\exp[-\alpha T^\beta]\right]}{1-\exp[-k\alpha T^\beta]}$$

$$=\frac{\frac{\beta^n}{\Gamma(n)}w^{n-1}\exp[-\beta w]\cdot\frac{k^n}{n!}(\alpha T^\beta)^n\exp[-k\alpha T^\beta]}{1-\exp[-k\alpha T^\beta]}$$

$$=\frac{(\phi w)^n\exp[-\beta w-\phi/\beta]}{n!(n-1)!w(1-\exp[-\phi/\beta])}\qquad(n=1,\ 2,\cdots)$$

式中 $\phi=k\alpha\beta T^\beta$。

在给定观测 $W=w$ 及 $N>0$ 下，有条件密度：

$$f(j|w,\ N>0)=\frac{(\phi w)^{j-1/2}}{j!(j-1)!}\Big/\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\phi w)^{j-1/2}}{j!(j-1)!}$$

$$=(\phi w)^{j-1/2}/[j!(j-1)!I_1(2\sqrt{\phi w})]$$

故 ϕw 的非随机化最优置信区间由(3.7)式给出：

$$P\{\gamma_1<\phi w<\gamma_2\}\geqslant\gamma$$

因 $$\phi w=n^2\hat{M}(T)/M(T)$$

故 $$P\left\{\frac{n^2}{\gamma_2}\hat{M}(T)<M(T)<\frac{n^2}{\gamma_1}\hat{M}(T)\right\}\geqslant\gamma$$

即得(3.6)式。与n、γ 相应的π_1、π_2值可见Crow[1]的表2。当$n>100$时，π_1，π_2 的近似公式为：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\pi}_1&=n^2\Big/\left(n+\frac{v^2}{4}+\sqrt{\frac{v^4}{16}+\frac{nv^2}{2}}\right)^2\\ \tilde{\pi}_2&=n^2\Big/\left(n+\frac{v^2}{4}-\sqrt{\frac{v^4}{16}+\frac{nv^2}{2}}\right)^2\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

式中$v=u_{(1+\gamma)/2}$

定理5中令$k=1$，即得Crow[1]关于定时截尾数据区间估计的结果。

参 考 文 献

[1] Crow, L. H., *Technometrics*, 24 (1982), 67—72.
[2] Crow, L. H., *ADA*-044788 (1977).
[3] Duane, J. T., *IEEE trans. on Aerospace* and *Electronic System*, 2 (1964), 563-566.
[4] Fisz, M., 《概率论及数理统计》，上海科技出版社 (1962), 341.
[5] Lee, L. and S. K. Lee, *Technometrics*, 20 (1978), 41—45.

Reliability Growth for Multi-System Simultaneous Development

Zhou Yuan-quan

(Beijing Institute of Structure and Environment Engineering, Beijing)

Abstract

In this paper the AMSAA model for multi-system simultaneous development is discussed. The maximum likelihood (ML) estimates of the parameters and the confidence intervals of the (MTBF) for Weibull process are presented. Crow's formulae[1] are the special examples for this paper.