应用数学和力学，第7卷第11期（1986年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

小参数常微分方程守恒型差分格式的一致收敛性*

林 鹏 程

（福州大学计算机科学系，1985年5月26日收到）

摘 要

本文考虑自共轭常微分方程奇异摄动边值问题，构造一族带拟合因子的差分格式，给出差分格式解一致收敛于微分方程解的充分条件，由此提出几个具体格式，在条件较弱的情况下，给出较高的一致收敛阶。

一、引 言

考虑自共轭常微分方程奇异摄动问题

$$\left.\begin{aligned}&Lu(x)\equiv-\varepsilon(p(x)u'(x))'+q(x)u(x)=f(x)\quad(x\in(0,1))\\&u(0)=A,\ u(1)=B\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中，$p(x)$，$q(x)$，$f(x)$是跟ε无关的光滑函数，$\varepsilon>0$是小参数。$p(x)$和$q(x)$满足

$$p(x)\geqslant\alpha>0,\ q(x)\geqslant\beta>0\qquad(x\in[0,\ 1])\tag{1.2}$$

Doolan, Miller, Schilder 在他们合著的专书[1]中，构造过一个差分格式

$$\left.\begin{aligned}&L^hu_j\equiv-\varepsilon\sigma_i\delta(p(x_i)\delta u_i)+q(x_i)u_i=f(x_i)\quad(1\leqslant i\leqslant N-1)\\&u_o=A,\ u_N=B\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

其中
$$\sigma_i(\rho)=\frac{\rho^2}{4}\frac{q(x_i)}{p(x_i)}\mathrm{sh}^{-2}\frac{\rho}{2}\frac{\sqrt{q(x_i)}}{\sqrt{p(x_i)}}\qquad\left(\rho=\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\tag{1.4}$$

在条件(1.2)及$p'(x)\geqslant0$的假设下，证明(1.3)，(1.4)的解一阶一致收敛于(1.1)的解。此外，他们又构造一个指数型拟合因子的守恒型差分格式：

$$\left.\begin{aligned}&L^hu_i\equiv-\varepsilon\delta(\sigma_i(\rho)p(x_i)\delta u_i)+\left\{q\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+q\left(x_i-\frac{h}{2}\right)\right\}u_i/2=f(x_i)\\&\qquad\qquad(1\leqslant i\leqslant N-1)\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

$$u_o=A,\ u_N=B$$

其中
$$\sigma_i(\rho)=\frac{\rho^2}{4}\frac{q(x_i)}{p(x_i)}\mathrm{sh}^{-2}\frac{\rho}{2}\frac{\sqrt{q(x_i)}}{\sqrt{p(x_i)}}\qquad\left(\rho=\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\tag{1.4$'$}$$

说可以通过对$u(x_i)-u_i$的“古典估计”和“非古典估计”，证明(1.3)，(1.4)的解一阶一致

* 苏煜城推荐。

收敛于(1.1)的解（没有证明）。

本文在(1.2)的条件下，构造一族带拟合因子σ_i的守恒型差分格式，导出σ_i所要满足的充分条件，使得相应的差分格式一致收敛，从而给出几个指数型拟合因子的差分格式，其中包含了格式(1.3)，(1.4)。证明此时差分格式解以$O(h)$一致收敛于问题(1.1)的解，且在$p(x)$和$q(x)$满足一定条件时，以$O(h^2)$一致收敛，改进了Doolan等人的结果。

二、微分方程(1.1)的解及其性质

引理 1 设$v(x)$是[0，1]上的光滑函数，算子L由(1.1)和(1.2)所确定，则

(i)若$v(x)$满足$v(0)\geqslant 0$，$v(1)\geqslant 0$，$Lv(x)\geqslant 0$，$x\in(0,1)$，有$v(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$。

(ii) $|v(x)|\leqslant c\{|v(0)|+|v(1)|+\max\limits_{0\leq x\leq 1}|Lv(x)|\}$

定理 1 设$u(x)$是(1.1)的解，则

$$u(x)=v_0\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+w_0\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+z(x) \tag{2.1}$$

其中v_0，w_0分别为，$x=0$，$x=1$两端的边界层函数，

$$v_0\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=p_1\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$w_0\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=q_1\exp\left(-\frac{\sqrt{r(1)}(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

这里$r(x)=q(x)/p(x)$，$|p_1|\leqslant c$，$|q_1|\leqslant c$，而$z(x)$满足

$$|z^{(i)}(x)|\leqslant c\left\{1+\varepsilon^{-\frac{i}{2}+\gamma}\left[\exp\left(-\frac{\sqrt{\sigma}\,x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\exp\left(-\frac{\sqrt{\sigma}\,(1-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]\right\}\quad x\in[0,1] \tag{2.2}$$

其中 $0<\sigma<\min\limits_{0\leq x\leq 1}q(x)/p(x)$，而$\gamma$由下式确定

$$\gamma=\begin{cases}1 & (\text{当}p'(0)=q'(0)=p'(1)=q'(1)=0\text{ 时})\\ 1/2 & (\text{当上述条件不成立时})\end{cases} \tag{2.3}$$

为方便起见，以下我们称条件$p'(0)=q'(0)=p'(1)=q'(1)=0$为条件(I)。

这节的证明详见[2]。

三、差分格式一致收敛的充分条件

将区间[0，1]分成N等分，步长$h=1/N$，网格点$x_i=ih(0\leqslant i\leqslant N)$。对微分问题(1.1)，构造如下的守恒型差分格式：

$$\left.\begin{aligned}L^h h_i\equiv &-\varepsilon\delta\left(\sigma_i(\rho)p(x_i)\,\delta u_i\right)+\frac{1}{2}\left[q\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right.\\ &\left.+q(x_i-h/2)\right]u_i=f(x_i)\qquad(1\leqslant i\leqslant N-1)\\ u_0=A,&\ \ u_N=B,\quad \rho=h/\sqrt{\varepsilon}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中$\sigma_i(\rho)$为待定的拟合因子，本节我们将讨论$\sigma_i(\rho)$要满足什么条件，才使差分格式一致收敛？

引理 2 如果(3.1)中的 $\sigma_i(\rho)>0$，则对满足 $v_0\geqslant 0$，$v_N\geqslant 0$，$L^h v_i\geqslant 0$ $(1\leqslant i\leqslant N-1)$ 的 v_i 有 $v_i\geqslant 0$ $(0\leqslant i\leqslant N)$.

证明 将(3.1)写成向量矩阵形式 $\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{f}$，其中 $\mathbf{A}$ 的非零元为

$$\begin{cases} a_{0,0}=a_{N,N}=-1 \\ a_{i,i}=-\varepsilon(\sigma_{i+\frac{1}{2}}p_{i+\frac{1}{2}}+\sigma_{i-\frac{1}{2}}p_{i-\frac{1}{2}})-(q_{i+\frac{1}{2}}+q_{i-\frac{1}{2}})/2 \\ a_{i,i+1}=\varepsilon\sigma_{i+\frac{1}{2}}p_{i+\frac{1}{2}} \\ a_{i,i-1}=\varepsilon\sigma_{i-\frac{1}{2}}p_{i-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

右端项为 $\mathbf{f}=\{-v_0,\ -L^h v_1,\ \cdots,\ -L^h v_{N-1},\ -v_N\}$，$\mathbf{v}=\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_N\}^T$。由假设知 $\mathbf{A}\mathbf{v}=\mathbf{f}\leqslant 0$，$a_{ij}\geqslant 0$ $(i\neq j)$，$a_{ii}<0$，$\sum\limits_{j=0}^{N}a_{ij}=-\dfrac{1}{2}(q_{i+\frac{1}{2}}+q_{i-\frac{1}{2}})<0$，因而 $\mathbf{A}$ 是 M 矩阵，故 $\mathbf{A}^{-1}<0$，从而 $\mathbf{v}\geqslant 0$，证毕。

我们将(3.1)的解分解成

$$u_i=v_i+w_i+z_i \tag{3.2}$$

定义截断误差为

$$\tau_i(u)=L^h u(x_i)-L^h u_i \tag{3.3}$$

则

$$\tau_i(u)=\tau_i(v)+\tau_i(w)+\tau_i(z) \tag{3.4}$$

于是估计 $\tau_i(u)$ 就转化为分别估计 $\tau_i(v)$，$\tau_i(w)$ 和 $\tau_i(z)$。

我们从估计 $\tau_i(z)$ 入手。

$$\tau_i(z)=\varepsilon\delta((1-\sigma_i)p(x_i)\delta z(x_i))+\varepsilon[(p(x_i)z'(x_i))'-\delta(p(x_i)\delta z(x_i))]$$
$$+\left[\frac{1}{2}q\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{2}q\left(x_i-\frac{h}{2}\right)-q(x_i)\right]z(x_i) \tag{3.5}$$

通过Taylor展开，我们得到

$$\frac{1}{2}\left[q\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+q\left(x_i-\frac{h}{2}\right)\right]-q(x_i)=\frac{h^2}{16}\left[q''(\eta_1)+q''(\eta_2)\right] \tag{3.6}$$

其中 $\eta_1\in(x_i,\ x_i+h/2)$，$\eta_2\in(x_i-h/2,\ x_i)$。

$$\delta(p(x)\delta z(x))=\frac{1}{h}\left\{p\left(x+\frac{h}{2}\right)\left[z'(x)+\frac{h}{2}z''(x)+\frac{h^2}{3!}z^{(3)}(\xi_1)\right]\right.$$
$$\left.-p\left(x-\frac{h}{2}\right)\left[z'(x)-\frac{h}{2}z''(x)+\frac{h^2}{3!}z^{(3)}(\xi_2)\right]\right\}$$
$$=\delta p(x)\cdot z'(x)+\frac{1}{2}\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)+p\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]z''(x)$$
$$+\frac{h}{6}\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)z^{(3)}(\xi_1)+p\left(x-\frac{h}{2}\right)z^{(3)}(\xi_2)\right]$$
$$=(p(x)z'(x))'+\frac{h^2}{48}p^{(3)}(\xi_3)z'(x)+\frac{h^2}{16}p''(\xi_4)z''(x)$$
$$+\frac{h}{6}\left[p\left(x+\frac{h}{2}\right)z^{(3)}(\xi_1)+p\left(x-\frac{h}{2}\right)z^{(3)}(\xi_2)\right]$$

其中 $\xi_1\in(x,\ x+h)$，$\xi_2\in(x-h,\ x)$，ξ_3，$\xi_4\in\left(x-\dfrac{h}{2},\ x+\dfrac{h}{2}\right)$。因此我们得到

$$|\delta(p(x_i)\delta z(x_i)-(p(x_i)z'(x_i))'|\leqslant c[h^2(\max|z'|+\max|z''|)+h\max|z'''|] \tag{3.7a}$$

如果将它展开到$z^{(4)}$项，则

$$\delta(p(x)\delta z(x))=\frac{1}{h}\Big\{p\Big(x+\frac{h}{2}\Big)\Big[z'(x)+\frac{h}{2}z''(x)+\frac{h^2}{3!}z^{(3)}(x)+\frac{h^3}{4!}z^{(4)}(\xi_1)\Big]$$

$$-p\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big[z'(x)-\frac{h}{2}z''(x)+\frac{h^2}{3!}z^{(3)}(x)-\frac{h^3}{4!}z^{(4)}(\xi_2)\Big]\Big\}$$

$$\doteq\delta p(x)\cdot z'(x)+\frac{1}{2}\Big[p\Big(x+\frac{h}{2}\Big)+p\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big]z''(x)$$

$$+\frac{h}{6}\Big[p\Big(x+\frac{h}{2}\Big)-p\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big]z^{(3)}(x)$$

$$+\frac{h^2}{24}\Big[p\Big(x+\frac{h}{2}\Big)z^{(4)}(\xi_1)+p\Big(x-\frac{h}{2}\Big)z^{(4)}(\xi_2)\Big]$$

$$=(p(x)\cdot z'(x))'+\frac{h^2}{48}p^{(3)}(\xi_3)z'(x)+\frac{h^2}{16}p''(\xi_4)z''(x)$$

$$+\frac{h^2}{6}p'(\xi_5)z^{(3)}(x)+\frac{h^2}{24}\Big[p\Big(x+\frac{h}{2}\Big)z^{(4)}(\xi_1)+p\Big(x-\frac{h}{2}\Big)z^{(4)}(\xi_2)\Big]$$

其中 $\xi_1\in(x,\ x+h)$，$\xi_2\in(x-h,\ x)$，ξ_3，ξ_4，$\xi_5\in(x-h/2,\ x+h/2)$。

所以
$$|\delta(p(x_i)\delta z(x_i))-(p(x_i)z'(x_i))'|\leqslant ch^2\sum_{j=1}^{4}\max|z^{(j)}(x)| \tag{3.7b}$$

当条件(Ⅰ)满足时用(3.7b)，否则用(3.7a)，利用(2.2)，我们得到

$$|\delta(p(x_i)\delta z(x_i))-(p(x_i)z'(x_i))'|\leqslant c\varepsilon^{-1}h^{2\nu} \tag{3.8}$$

利用恒等式

$$\delta(g(x)\delta K(x))=g\Big(x+\frac{h}{2}\Big)\delta^2K(x)+\frac{K(x)-K(x-h)}{h^2}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}}g'(t)dt$$

和

$$|\delta^2 z(x_i)|\leqslant h^{-1}\int_{x_i-h}^{x_i+h}|z''(s)|ds$$

以及(2.2)，我们得到

$$|\delta((1-\sigma_i)p(x_i)\delta z(x_i))|$$

$$\leqslant c\Big|1-\sigma_{i+\frac{1}{2}}\Big|h^{-1}\int_{x_i-h}^{x_i+h}|z''(s)|ds+c[|1-\sigma_i|+|\sigma_i'|]\max|z'|$$

$$\leqslant c\Big|1-\sigma_{i+\frac{1}{2}}\Big|\begin{cases}1 & (\text{当(Ⅰ)成立})\\ h^{-1} & (\text{当(Ⅰ)不成立})\end{cases}+c[|1-\sigma_i|+|\sigma_i'|] \tag{3.9}$$

把(3.6)，(3.8)，(3.9)代入(3.5)得到

$$\Big|\tau_i(z)\Big|\leqslant\begin{cases}c\varepsilon\Big|1-\sigma_{i+\frac{1}{2}}\Big|+c\varepsilon|1-\sigma_i|+c\varepsilon|\sigma_i'|+ch^2+ch^2 & (\text{当(Ⅰ)成立})\\ c\varepsilon h^{-1}\Big|1-\sigma_{i+\frac{1}{2}}\Big|+c\varepsilon|1-\sigma_i|+c\varepsilon|\sigma_i'|+ch+ch^2 & (\text{当(Ⅰ)不成立})\end{cases} \tag{3.10}$$

由此得到

定理 2 如果(3.1)中的σ_i满足

$$\varepsilon|1-\sigma_{i+\frac{1}{2}}|\leqslant ch^2,\quad \varepsilon|1-\sigma_i|\leqslant ch^2,\quad \varepsilon|\sigma_i'|\leqslant ch^{2\nu} \tag{3.11}$$

则 $|\tau_i(z)|\leqslant ch^{2\nu}$

定理 3 如果(3.1)中的σ_i满足

$$\left|r(0)-4\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}(\rho)}{\rho^2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\leqslant ch^{2\nu} \tag{3.12}$$

$$\varepsilon|\sigma'(\theta x_i)|\left|\frac{1-\exp[\sqrt{r(0)}\rho]}{h}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\leqslant ch^{2\nu}\qquad(0<\theta<1) \tag{3.13}$$

则 $|\tau_i(v)|\leqslant ch^{2\nu}$

证明

$$\tau_i(v)=-\varepsilon\delta\left(\sigma_i p(x_i)\delta v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)+\varepsilon\left(p(x_i)v_0'\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)'+\frac{h^2}{16}[q''(\eta_1)+q''(\eta_2)]v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{3.14}$$

由于

$$\left(p(x_i)v_0'\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)'=\left[p(x_i)r(0)\varepsilon^{-1}-p'(x_i)\sqrt{r(0)}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right]v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\delta\left(\sigma_i p(x_i)\delta v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)&=\sigma_{i+\frac{1}{2}}\delta\left(p(x_i)\delta v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)+p_{i-\frac{1}{2}}\delta\sigma_i\delta v_0\left(\frac{x_{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\&=\sigma_{i+\frac{1}{2}}h^{-2}\left\{4p(x_i)\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}+hp'(x_i)\mathrm{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right\}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\sigma_{i+\frac{1}{2}}\bar{r}\\&\quad+p_{i-\frac{1}{2}}\sigma'(\theta x_i)\frac{1-\exp[\sqrt{r(0)}\rho]}{h}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中

$$\bar{r}=\frac{h^2}{8}p''(x_i)D_+D_-v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{h^2}{48}\left[p^{(3)}(\xi_1)D_+v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+p^{(3)}(\xi_2)D_-v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right] \tag{3.17}$$

$\xi_1\in(x_i,\ x_i+h/2)$，$\xi_2\in(x_i-h/2,\ x_i)$，$0<\theta<1$。经过整理得

$$\begin{aligned}\tau_i(v_0)&=p(x_i)\left\{r(0)-4\rho^{-2}\sigma_{i+\frac{1}{2}}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right\}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\&\quad+p'(x_i)\sqrt{\varepsilon}\left\{-\sqrt{r(0)}+\frac{\sigma_{i-\frac{1}{2}}}{\rho}\mathrm{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right\}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)-\bar{r}\varepsilon\sigma_{i-\frac{1}{2}}\\&\quad-\varepsilon p_{i-\frac{1}{2}}\sigma'(\theta x_i)\frac{1-\exp[\sqrt{r(0)}\rho]}{h}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{h^2}{16}[q''(\eta_1)+q''(\eta_2)]v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\end{aligned} \tag{3.18}$$

把(3.18)写成$\tau_i(v_0)=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5$，其中

$$\left.\begin{aligned}F_1&=p(x_i)\left[r(0)-4\rho^{-2}\sigma_{i+\frac{1}{2}}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right]v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\F_2&=-p'(x_i)\sqrt{\varepsilon}\left[\sqrt{r(0)}-\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}}{\rho}\mathrm{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right]v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\F_3&=-\bar{r}\varepsilon\sigma_{i+\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

$$F_4=-\varepsilon p(x_{i-\frac{1}{2}})\sigma'(\theta x_i)\frac{1-\exp\,[\sqrt{r(0)}\rho]}{h}v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$F_5=\frac{h^2}{16}[q''(\eta_1)+q''(\eta_2)]v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

由(3.12)直接得到

$$|F_1|\leqslant ch^{2\nu}$$

由于[1]

$$|z\coth z-1|\leqslant cz^k \qquad (1\leqslant k\leqslant 2,\ z>0) \tag{3.20}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left|\sqrt{r(0)}-\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}}{\rho}\operatorname{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$=\sqrt{\varepsilon}\left|\sqrt{r(0)}-\sigma_{i+\frac{1}{2}}\cdot 4\rho^{-2}\operatorname{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\cdot\frac{\rho}{2}\operatorname{cth}\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant\sqrt{\varepsilon}\left|r(0)-\sigma_{i+\frac{1}{2}}\cdot 4\rho^{-2}\operatorname{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\frac{\rho}{2}\operatorname{cth}\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{r(0)}\left|1-\frac{\rho}{2}\sqrt{r(0)}\operatorname{cth}\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,h^{2\nu}(1+\rho^k)+c\sqrt{\varepsilon}\,\rho^k\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right| \tag{3.21}$$

当$\nu=1/2$时上式中的k取1得

$$|F_2|\leqslant c\sqrt{\varepsilon}\,h(1+h/\sqrt{\varepsilon})+c\sqrt{\varepsilon}\,h/\sqrt{\varepsilon}\leqslant ch$$

当$\nu=1$时，由于$p'(0)=0$，所以$p''(x_i)=x_ip''(\xi_i)$，$\xi_i\in(0,\ x_i)$，把(3.21)中右端第1项k取1，第2项k取2得

$$|F_2|\leqslant cx_i\left[\sqrt{\varepsilon}\,h^2\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{h^2}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]$$

$$\leqslant ch^2+ch^2\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{\sqrt{r(0)}x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\leqslant ch^2 \tag{3.22}$$

由(3.17)知

$$|F_3|\leqslant c\varepsilon\left|4\sigma_{i+\frac{1}{2}}\operatorname{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}+h\sigma_{i+\frac{1}{2}}\operatorname{sh}\sqrt{r(0)}\rho\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant c\varepsilon\left\{\rho^2\left|4\sigma_{i+\frac{1}{2}}\rho^{-2}\operatorname{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}-r(0)\right|+r(0)\rho^2\right.$$

$$\left.+h\rho\left|\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}}{\rho}\operatorname{sh}\sqrt{r(0)}\rho-\sqrt{r(0)}\right|+h\rho\sqrt{r(0)}\right\}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant c\varepsilon\frac{h^2}{\varepsilon}\cdot h^{2\nu}+c\varepsilon\frac{h^2}{\varepsilon}+ch^2\sqrt{\varepsilon}\left[h^{2\nu}(1+\rho^k)+\rho^k\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\right]+ch^2\sqrt{\varepsilon}\leqslant ch^2 \tag{3.23}$$

再由条件(3.13)

$$|F_4|\leqslant ch^{2\nu} \tag{3.24}$$

又

$$|F_5|\leqslant ch^2 \tag{3.25}$$

于是就得到了

$$|\tau_i(v)|\leqslant ch^{2\nu} \tag{3.26}$$

完全类似地可以证明

定理 4 如果(3.1)中的σ_i满足

$$\left|r(1)-4\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}(\rho)}{\rho^2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(1)}\rho}{2}\right|\left|w_0\left(\frac{1-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\leqslant ch^{2\nu} \tag{3.27}$$

$$\varepsilon\left|\sigma'(\theta' x_i)\right|\left|\frac{1-\exp\left[-\sqrt{r(1)}\rho\right]}{h}\right|\left|w_0\left(\frac{1-x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\leqslant ch^{2\nu}\quad(0<\theta'<1) \tag{3.28}$$

则 $|\tau_i(w)|\leqslant ch^{2\nu}$.

根据引理 2 及定理 2～4，我们得到

定理 5 如果(3.1)中的$\sigma_i>0$且满足(3.11)，(3.12)，(3.13)，(3.27)，(3.28)，则

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant ch^{2\nu}$$

其中$u(x_i)$和u_i分别为(1.1)和(3.1)的解，而ν由(2.3)式确定.

四、指数型拟合因子

根据上节的讨论，本节我们将给出两类具体的拟合因子，它满足上节的充分条件(3.11)～(3.13)，(3.27)，(3.28)，因而这些差分格式的解一致收敛于微分问题的解.

Ⅰ、变数拟合因子

首先考虑

$$\sigma_i(\rho)=\frac{r(x_i)\rho^2}{4}\mathrm{sh}^{-2}\frac{\sqrt{r(x_i)}\rho}{2} \tag{4.1}$$

[1]曾提到这种拟合因子，在条件(1.2)及$p'(x)\geqslant0$的假设下，叙述而没有证明，含(4.1)拟合因子的差分格式(3.1)的解一阶一致收敛于(1.1)的解，现在我们去掉$p'(x)\geqslant0$的条件，来验证(4.1)满足定理 2～4 的条件(3.11)～(3.13)，(3.27)，(3.28).

由

$$|1-z^2\mathrm{sh}^{-2}z|\leqslant cz^2\qquad(z>0) \tag{4.2}$$

立即得出(4.1)满足(3.11)的$\varepsilon|1-\sigma_{i+\frac{1}{2}}|\leqslant ch^2$，$\varepsilon|1-\sigma_i|\leqslant ch^2$. 又设

$$s(x)=\frac{r(x)\rho^2}{4}\mathrm{sh}^{-2}\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2} \tag{4.3}$$

则 $s(x_i)=\sigma_i(\rho)$，直接计算得

$$s'(x)=\frac{r'(x)}{r(x)}s(x)\left[1-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\mathrm{cth}\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right] \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}s''(x)=s(x)\Bigg\{&\left(\frac{r'(x)}{r(x)}\right)^2\left[1-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\mathrm{cth}\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right]^2\\&-\left(\frac{r'(x)}{r(x)}\right)^2\left[1-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\mathrm{cth}\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{r'(x)}{r(x)}\right)^2\Bigg[s(x)\\&-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\mathrm{cth}\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\Bigg]+\frac{r''(x)}{r(x)}\left[1-\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\mathrm{cth}\frac{\sqrt{r(x)}\rho}{2}\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.5}$$

因此

$$|s'(x)|\leqslant c\rho^k s(x)\quad(1\leqslant k\leqslant2) \tag{4.6}$$

$$|s''(x)|\leqslant c\rho^2 s(x) \tag{4.7}$$

又 $0<s(x)\leqslant1$

故
$$\varepsilon|\sigma_i|\leqslant c\varepsilon\rho^2\sigma_i(\rho)\leqslant ch^2$$
即(4.1)满足(3.11).

利用(4.6), (4.7), 有

$$\left|r(0)-4\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}(\rho)}{\rho^2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|=\frac{4}{\rho^2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\left|s(0)-s(x_{i+\frac{1}{2}})\right|$$

$$\cdot\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|=\frac{r(0)}{s(0)}\left|s'(\xi)\right|x_{i+\frac{1}{2}}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\qquad(\xi\in(0,\ x_{i+\frac{1}{2}}))$$

$$\leqslant ch\frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{s(\xi)}{s(0)}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\leqslant ch$$

当条件(I)满足时, $r'(0)=0$, 从而$s'(0)=0$, 此时

$$\left|r(0)-4\frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}(\rho)}{\rho^2}\mathrm{sh}^2\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{r(0)}{s(0)}\left|s''(\eta)\right|\frac{1}{2}x^2_{i+\frac{1}{2}}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\qquad(\eta\in(0,\ x_{i+\frac{1}{2}}))$$

$$\leqslant ch^2\frac{x^2_{i+\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\frac{s(\eta)}{s(0)}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|\leqslant ch^2$$

则(4.1)满足(3.12)。现检验(4.1)满足(3.13), 由(4.4)有

$$\varepsilon\left|\sigma'(\theta x_i)\right|\left|\frac{1-\exp[\sqrt{r(0)}\rho]}{h}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant c\varepsilon\rho^k\exp[\sqrt{r(0)}\rho/2]\left|\mathrm{sh}\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\frac{2}{h}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant\begin{cases}c\varepsilon\dfrac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\dfrac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\dfrac{2}{h}\exp[-\sqrt{r(0)}\,(x_i-h/2)/\sqrt{\varepsilon}]\leqslant ch & (\text{当}\rho\leqslant 1,\ k\text{取}1)\\ c\varepsilon\dfrac{h^2}{\varepsilon}\exp[\sqrt{r(0)}\rho/2]\cdot\exp[\sqrt{r(0)}\rho/2]\dfrac{2}{h}\cdot\exp[-\sqrt{r(0)}\,x_i/\sqrt{\varepsilon}]\leqslant ch & (\text{当}\rho>1,\ k\text{取}2)\end{cases}$$

当条件(I)成立时, $r'(0)=0$, $r(\theta x_i)=\theta x_i r''(\theta_1\cdot x_i)$ $(0<\theta_1<1)$

$$\varepsilon\left|\sigma'(\theta x_i)\right|\left|\frac{1-\exp[\sqrt{r(0)}\rho]}{h}\right|\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant c\varepsilon\left|\frac{r'(\theta x_i)}{r(\theta x_i)}\right|\left|\sigma(\theta x_i)\right|\left|1-\frac{\sqrt{r(\theta x_i)}\rho}{2}\mathrm{cth}\frac{\sqrt{r(\theta x_i)}\rho}{2}\right|$$

$$\cdot\exp[\sqrt{r(0)}\rho/2]\left|\mathrm{sh}\frac{\sqrt{r(0)}\rho}{2}\right|\frac{2}{h}\left|v_0\left(\frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|$$

$$\leqslant\begin{cases}ch^2\dfrac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\exp[-\sqrt{r(0)}x_{i-\frac{1}{2}}/\sqrt{\varepsilon}]\leqslant ch^2 & (\text{当}\rho\leqslant 1)\\ c\varepsilon x_i\dfrac{h^2}{\varepsilon}\exp[\sqrt{r(0)}\rho/2]\dfrac{2}{h}\exp[\sqrt{r(0)}\rho/2]\cdot\exp[-\sqrt{r(0)}x_i/\sqrt{\varepsilon}] & \\ \qquad\leqslant c\sqrt{\varepsilon}h\dfrac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}}\exp[-\sqrt{r(0)}x_{i-1}/\sqrt{\varepsilon}]\leqslant ch^2 & (\text{当}\rho>1)\end{cases}$$

用同样的方法可以验证(4.1)的σ_i满足(3.27)，(3.28)。因此有

定理 6　设u_i为差分格式(3.1)具拟合因子(4.1)的解，$u(x_i)$为(1.1)的解，则

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant ch^{2\nu} \qquad (0\leqslant i\leqslant N) \tag{4.8}$$

ν由(2.3)式确定。

Ⅱ、常数拟合因子

首先考虑$r(0)=r(1)$的情况，此时定义σ_i为

$$\sigma_i(\rho)\equiv\sigma(\rho)=\frac{r(0)\rho^2}{4}\,\mathrm{sh}^{-2}\frac{\sqrt{r(0)}\,\rho}{2} \tag{4.9}$$

显然，此时σ_i满足(3.11)～(3.13)，(3.27)，(3.28)。

其次，如果$r(0)\neq r(1)$，用一个分段常数拟合：

$$\sigma_i(\rho)=\begin{cases}\dfrac{r(0)\rho^2}{4}\,\mathrm{sh}^{-2}\dfrac{\sqrt{r(0)}\,\rho}{2} & (1\leqslant i\leqslant N_1)\\[2ex] \dfrac{r(1)\rho^2}{4}\,\mathrm{sh}^{-2}\dfrac{\sqrt{r(1)}\,\rho}{2} & (N_1<i\leqslant N-1)\end{cases} \tag{4.10}$$

这里$x_{N1}=d_0\in(0,\ 1)$为任一固定点，(4.10)满足(3.11)，(3.13)是显然的。现验证它满足(3.12)。

当$1\leqslant i\leqslant N_1$时，(3.12)自然成立。

当$N_1\leqslant i\leqslant N-1$时，即$x_i\in[d_0,\ 1]$时，类似于变数拟合因子的情况，可以证明它满足(3.12)。同理可验证它也满足(3.27)，(3.28)。因此，我们有

定理 7　设u_i为差分格式(3.1)具拟合因子(4.9)或(4.10)的解，$u(x_i)$为(1.1)的解，则

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant ch^{2\nu} \qquad (0\leqslant i\leqslant N) \tag{4.11}$$

其中ν由(2.3)式确定。

这个问题的数值例子可参阅[1]。

参 考 文 献

[1] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Dublin: Boole Press (1980).

[2] 林鹏程、郭雯，《奇异摄动问题数值解法讲义》.

[3] Il'in, A. M., Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Math. Notes.*, 6 (1969), 596—602.

Uniform Convergence for the Difference Scheme in the Conservation Form of Ordinary Differential Equation with a Small Parameter

Ling Peng-cheng

(*Fuzhou University, Fuzhou*)

Abstract

In this paper, we consider a singular perturbation boundary problem for a self-adjoint ordinary differential equation. We construct a class of difference schemes with fitted factors, and give the sufficient conditions under which the solution of difference scheme converges uniformly to the solution of differential equation. From this we propose several specific schemes under weaker conditions, and give much higher order of uniform convergence.