

论连续体力学非线性场论中 有限转动的表现*

陈 至 达

(中国矿业学院北京研究生部, 1985年11月15日收到)

摘 要

连续体力学发展中的一个重要基本理论问题就是如何从位移场确定场中每一点的应变与转动。经过近年来的研究与各方面探讨, 已经证明 S-R 分解定理的理论价值, 在今后连续体力学发展中将具有重要的作用。本文目的在于澄清变形体有限转动的一些基本概念, 促进应用进展。

一、引 言

应变与转动是决定可变形体作任意形式运动时的基本特征量。在运动形变过程中, 可变形体内任一点邻域的转动状态和刚体的转动概念有本质的差别; 后者仅是前者的一个特例。由于经典的有限变形几何学对转动与变形的分离存在着一些错误的见解没有得到全面澄清, 以致使非线性连续体力学的发展受到严重的影响。

首先应该指出: 目前有一些学者认为固体的应变度量之定义可以有无限多, 这种基本观点的错误必须纠正。因为(1)、应变分量应该构成一个张量, 并非任意的; (2)、当变形体作刚性转动时, 应变分量应为零; (3)、应变与应力分量构成的应变能函数应有直观的物理意义; (4)、定义的应变分量应具有合理的几何意义。事实上, 从数学的严格定义论, 自从1845年Stokes提出转动与应变分离原理^[6]后, 能构成完整连续体力学理论的应变分量定义, 直到目前为止, 仅有三种: (A)、由度规张量导出的定义, 在文献中常称为Green应变张量; (B)、由极分解定理导出的形变张量; (C)、由S-R定理^[1]导出的应变张量。

Green应变张量和转动张量是分开来定义的, 因此转动与应变在大位移时, 往往出现不协调, 再之它不合工程度量的基本要求, 其缺点已逐渐为许多学者所承认。极分解定理由于矩阵乘积的不可交换性, 它在三维空间的分解形式失去唯一性, 而正在失去其理论价值。当前能完全满足上述应变度量基本要求者仅有由S-R分解定理定义的应变张量, 它和转动张量的定义在数学上是协调的。它的合理性表现在由此构筑的几何场论能将经典力学的各分支统一起来, 目前没有其它的理论能作到这一点。

本文的内容重点是讨论连续体力学发展中的关键性问题, 局部转动的数学结构与几何表

* 本文摘要刊载在1985年上海国际非线性力学会议文集。本文包括一些新研究成果。

现.下一节先简单介绍力学的几何场论大意.

二、力学的几何场论

Truesdell 和 Noll 所著的力学非线性场论^[5](1965)是非线性连续体力学重要著作之一,它起了推动这个学科发展的积极作用.其次, Eringen主编的连续统物理学^[11]对于近代力学和物理学的场论作了统一综述.

近代力学的场论包括二个主要部份:第一部份是连续体运动的几何场论,第二部份是体现材料物理性质变化的场论.本文讨论属于第一部份的内容.

古典的Euclidean几何学研究空间图形变换和它的一些不变性质.而近代力学的几何场论则研究连续体点集时间-空间运动变换的特性和一些不变的性质.几何场论不但用于连续体力学,也用于电磁场论和广义相对论;本文只涉及前者.

设 B_0 表示在Euclian空间 E^3 中的有界连续体点集.如任二点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_0, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, 有下列性质存在

$$\{\mathbf{x}: |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| > 0\}$$

则我们称 B_0 点集为可测度的(measureable).

设在时间 t_0 时的点集 B_0 , 在时间 t 时变为另一可测度点集 B , 我们称为变换, 以 f 记之,

$$f: B_0 \rightarrow B$$

此种变换称为在连续体内连续的, 如在 B_0 内任一点 \mathbf{x}_0 的邻域 U 经变换后在 B 内有一邻域 V 和 U 点对点对应, $f(U) \subset V$, 则我们称此种变换为空间区域连续变换. 如此种变换同时也是时间 t 的连续函数, 则此连续变换同时也指时间过程的连续含意.

当点集变换时, 其中任二点的距离不变

$$\{\mathbf{x}: |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = \text{const}\}$$

则运动变换称为刚性的. 设取刚体中任一点为主点 P , 则刚体的运动可以看成整体随 P 点的平移和绕 P 点的相对运动——转动所组成, 由于平移不引起整体的相对关系变化, 所以常不讨论之. 当点集作非刚性运动, 有形变发生时, 因为点之间的形变是相对运动引起的, 总是和转动相耦合, 因此在变形体中一点邻域转动的概念是比刚性转动更高一阶的, 转动角和转动轴方位不再具有整体一致的含意, 而成为在变形体中点坐标的分布函数.

在形变体中如何将转动与形变分离自上一世纪中旬以后, 一直是一个数学力学难题. 在1845年, Stokes^[9]提出一个原理指明在流体运动场可以将转动分离而不影响该点的压力分布, 他说:

“Hence I shall assume the following principle: 1. ...the fluid in its neighbourhood were in a state of relative equilibrium depends only on the relative motion of the fluid immediately about P , and that the relative motion due to any motion of rotation may be eliminated without affecting the differences of the pressures above mentioned” (“由此我将假定下列原理: 一、……流体在一点 P 邻域的相对平衡状态仅和该点紧邻流体的相对运动有关, 由于转动引起的相对运动可以消除而不影响上述的压力差.”)

Stokes 定义粘性流体中一点的角速度为

$$\omega' = (dw/dy - dv/dz)/2, \quad \omega'' = \dots,$$

并将 ω 由速度场中分离开:

$$U = \frac{du}{dx} x' + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) y' + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \right) y' + \dots,$$

.....

他的方法就是张量的对称与反对称之和分解法, 用现代通用的缩记法可表示为

$$v_{i,j} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 + (v_{i,j} - v_{j,i})/2 \tag{2.1}$$

$v_{i,j}$ 指速度分量 v_i 对空间坐标 x_j 的导数.

Stokes 认为上述分解法也可推广到弹性固体的位移场, 并指出仅有当位移微小, 它们的二次方及其乘积可忽略时, (2.1)式的转动定义才是合理的. 即设以 $u_{i,j}$ 表示固体位移场中一点的位移导数, 则按下列定义应变分量 ε_{ij} 与转动分量 ω_{ij} :

$$u_{i,j} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 + (u_{i,j} - u_{j,i})/2 \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

\downarrow ε_{ij} 应变 (对称) + ω_{ij} 转动 (反对称)

事实上, 有限转动张量是正交性质, 仅有当微小转动时, 略去高阶小项才成为反对称性质. 因为这种原因, 当刚性转动时所导得的 ε_{ij} 不全为零, 有虚假应变.

要改正上述基本缺点要从二方面入手:

(A)、采用双重坐标系描述法, 以适应任何限度的大变形与大转动的几何描述. 在 E^3 空间中选取一个固定参考系 X^i (惯性系); 同时在形变体内嵌含一个参考系 x^i , 称为拖带系. 这种描述法在板壳有限变形理论中最早采用者是 Syngge-钱伟长^[12].

(B)、将(2.2)式分解改为对称分量与正交分量分解. 从数学上说, 求得解答是困难, 但 S-R 分解定理已完善解决这一问题, 并导出一系列新的概念扩充了旧理论.

拖带坐标系描述法是刚体动力学中动坐标法在变形体力学的自然推广. 在动力学中, 刚体中仅固结一个动坐标系, 但在形变体中每一点都确定一组随体形变的基标矢量当作局部参考系. 设在时间 t_0 时, 拖带系的局部 (或称当地) 基矢以 $\hat{g}_i(x^i, t_0)$ 表之, 变换后在 t 时成参 $g_i(x^i, t)$. $f: \hat{g}_i \rightarrow g_i$ 的变换由变换系数矩阵 F 实现:

$$g_i = F^j_i \hat{g}_j, \quad F^j_i = \delta^j_i + u^j|_i \tag{2.3}$$

$$\hat{g}_{ij} = \hat{g}_i \cdot \hat{g}_j, \quad g_{ij} = g_i \cdot g_j \tag{2.4}$$

$u^j|_i$ 指位移矢量在 \hat{g}_i 局部坐标系分量 u^j 对拖带坐标 x^i 的协变导数, 因为形变为任意的, 拖带系形变后一般成为曲线系.

S-R 定理证明^{[1][2]}: “假若给定一个物理可能的位移函数 $u(x^i, t)$, 此函数在变形体内是单值连续, 处处具有一阶导数, 则此运动变换总可以分解为正交与对称两个子变换的和, 正交变换体现点集之转动, 而对称变换体现点集之形变.” 按照此定理, 公式(2.3)变为

$$F^j_i = S^j_i + R^j_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.5}$$

\downarrow \downarrow
 应变(对称) + 转动 (正交)

S^j_i 与 R^j_i 分别定义为应变张量分量与转动张量分量. 分解式 (2.5) 消除矩阵乘积分解的次序先后的人为假定的弊病. 结果是

$$S^j_i = (u^j|_j + u^i|_i^T)/2 - (1 - \cos\vartheta) L^j_i \cdot L^k_i \tag{2.6}$$

$$R^j_i = \delta^j_i + L^j_i \cdot \sin\vartheta + (1 - \cos\vartheta) L^j_i \cdot L^k_i \tag{2.7}$$

上式中 L 为转轴单位矢量, 其分量为

$$L^j_i = \omega^j_i / \sin\vartheta, \quad \omega^j_i = (u^j|_j - u^i|_j^T)/2 \tag{2.8}$$

平均整旋角 ϑ 可以由下式确定

$$\vartheta = \pm \arcsin[-\omega^i \omega_i]^{1/2} \quad (2.9)$$

因为变换后拖带系的尺规发生改变, 而且张量数学处理的是广义坐标系变换, 公式(2.6)~(2.9)的应用中有必要采用新的计算物理分量法。

三、Eddington 的广义量纲原理

形变体中一点的平均转动量和应变状态是客观几何量, 不因参考系选取尺规不同而变; 张量方程能保持这种特点. Eddington 指出^[7]:

“...covariance and contravariance are a kind of generalised dimension, showing how the measure of one condition of the world is changed when the measure of another condition is changed. The ordinary theory of change of units is merely an elementary case of this.”

(“...协变和逆变是一种广义量纲, 表明世界在一种条件下的度量在另一种条件下如何相应变化. 平常单位变换理论仅是它的一个基本情况.”)

按照 Eddington 的观点张量方程的量纲遵守广义量纲原理, 它比普通物理量纲更基本。

当我们将公式(2.6)~(2.9)化成用物理分量表示式时, 一般要注意三个方面: (1) 广义量纲——张量的协变与逆变阶数; (2) 普通物理量纲; (3) 张量定义的相关坐标系. 最合理的办法是由不变量来考察. 例如由不变量 $\partial u / \partial s^i$ 求出位移导数的物理分量:

$$\hat{u}^j|_i = \left(\sqrt{\frac{\hat{g}_{(jj)}}{g_{(ii)}}} \right) u^j|_i \quad (3.1)$$

(ii)、(jj) 表示不作和, u 是位移矢量, s^i 是沿拖带坐标 x^i 方向的弧长。

四、刚性转动 Gibbs 公式

先证明下列引理:

引理 假设空间点集作正交变换, 则 $S^i_j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$).

证明 当空间点集作正交变换, 拖带系的尺规不变: $g_{ij} = \hat{g}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$). 变换 $f: B_0 \rightarrow B$, $\hat{g}_i \rightarrow g_i$ 由正交变换系数实现:

$$g_i = R^j_i \hat{g}_j \quad (4.1)$$

在此条件下:

$$\delta^j_i + u^j|_i = R^j_i, \quad u^j|_i = R^j_i - \delta^j_i = L^j_i \sin \vartheta + (1 - \cos \vartheta) L^j_k L^k_i.$$

于是有

$$S^i_j = \frac{1}{2} (R^j_i + R^j_i{}^T) - (1 - \cos \vartheta) L^j_k L^k_i = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

在上式证明中, 我们应用了 L^j_i 的反对称性质。

因此在正交变换条件下, S-R 分解定理直接导出 Gibbs 的刚性转动公式, 下面作出比较:

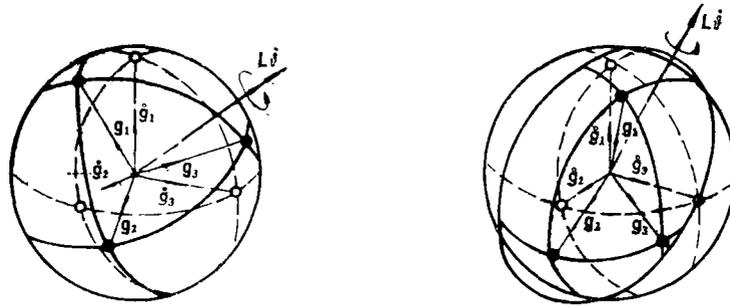
Gibbs公式(1901) ^[8]	S-R定理公式(1979) ^{[1], [2]}
(1) 转动变换 $r' = \Phi \cdot r$ $[\Phi] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\Phi = \mathbf{a}\mathbf{a} + \cos q(1 - \mathbf{a}\mathbf{a}) + \sin q \mathbf{l} \times \mathbf{a}$	$\bar{x}' = R', x'$ (a ₁) $[R',] = \begin{bmatrix} R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 \end{bmatrix}$ (a ₂) $R', = \delta', + (1 - \cos \vartheta) L_k', L_i', + L_i' \sin \vartheta$ (a ₃)
(2) 转轴方向单位矢量 $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ $[\mathbf{l} \times \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{i} + L_2 \mathbf{j} + L_3 \mathbf{k}$ (a ₄) $[L_i',] = \begin{bmatrix} L_1^1 & L_1^2 & L_1^3 \\ L_2^1 & L_2^2 & L_2^3 \\ L_3^1 & L_3^2 & L_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -L_3 & L_2 \\ L_3 & 0 & -L_1 \\ -L_2 & L_1 & 0 \end{bmatrix}$ (a ₅)
(3) 转角 q, ϑ $\sin q = \sqrt{\Phi_x \cdot \Phi_x} / 2 =$ $= [(a_{23} - a_{32})^2 + (a_{31} - a_{13})^2 + (a_{12} - a_{21})^2]^{1/2} / 2$	$\sin \vartheta = \sqrt{-\omega_i' \omega_i'} =$ $= [(R_1^1 - R_1^1)^2 + (R_2^2 - R_2^2)^2 + (R_3^3 - R_3^3)^2]^{1/2} / 2$ (a ₆)

上述论证确定：当 $\mathbf{s} = 0$ ，正交变换 \mathbf{R} 表现为刚性转动， \mathbf{L} 对应转动轴方位， ϑ 对应于转动角。仅要变换为物理可能，总有 $|\sin \vartheta| \leq 1$ ，刚性转动角总是可以确定的（参见[8]）。

五、变形体中的一点邻域的平均整旋概念，局部转动

当物体有形变时，过体中一点 P (见图1(b)) 的各线段将有相对的转动，而对于刚性转动 (见图1(a)) 中各线段间的夹角是不变的。因此形变的线段相对转动是一个复杂的图象。

今考察一个微元体 $\Delta\Omega$ 的位移场 $\mathbf{u}(x^i, t)$ 的旋量，设此 $\Delta\Omega$ 为以任一点 P 为中心，微小半径



(a) 刚体转动 ($\hat{g}_i = g_i$, 6自由度) (b) 可变形体转动 ($\hat{g}_i \neq g_i$, 12自由度)

图 1

为 ϵ 的圆球体。过 P 点的所有矢径在圆面上都有一交点。当形变时，由于矢径转动，在球面各交点将绘出圆弧轨迹，决定了各线段的位移矢量。应用散度定理，可以决定在形变体点集中一点 P 邻域的位移旋量平均值，

$$(\nabla \times \mathbf{u})_P = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Omega} \iint_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) dS \quad (5.1)$$

上式中 \mathbf{n} 为 $\Delta\Omega$ 表面 ΔS 的外法线基矢。我们将证明下列定理：

定理 在形变体中一点无穷小邻域的位移旋量平均值为

$$(\nabla \times \mathbf{u})_P / 2 = \mathbf{L} \sin \vartheta \quad (5.2)$$

证明 设以 \mathbf{L} 指平均转动轴方位的单位矢量。因为局部坐标系可以任意选取，我们选一个

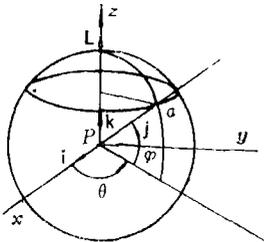
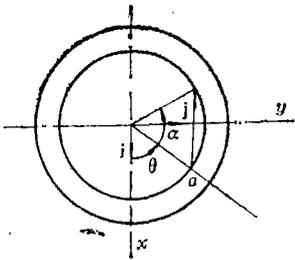


图 2

正交参考系的 z 轴和 L 重合,以 α 表示平均整旋角,于是在 P 点邻域微小圆球面上各点的平均位移分量可表示为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -2e\cos\varphi\sin(\theta + \alpha/2)\sin\alpha/2 \\ u_y &= 2e\cos\varphi\cos(\theta + \alpha/2)\sin\alpha/2, \quad u_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

应用公式(5.1), 我们得到

$$(\nabla \times \mathbf{u})_P = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Omega} \iint_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) dS = \mathbf{L}(2\sin\alpha)$$

或

$$(\nabla \times \mathbf{u})_P/2 = \mathbf{L}\sin\alpha, \quad |\nabla \times \mathbf{u}|_P/2 = |\sin\alpha| \quad (5.4)$$

另一方面, 根据公式(2.9)有

$$|\sin\vartheta| = [(u^1|_2 - u^2|_1)^2 + (u^2|_3 - u^3|_2)^2 + (u^3|_1 - u^1|_3)^2]^{1/2}/2 = |\nabla \times \mathbf{u}|_P/2 \quad (5.5)$$

由此可知 $\sin\vartheta = \sin\alpha$, 证明(5.2)式成立.

以上结果说明 ϑ 角实际上是一个平均整旋角的含意. 因为 $|\sin\alpha| \leq 1$, 所以

$$|\sin\vartheta| = |\nabla \times \mathbf{u}|_P/2 \leq 1 \quad (5.6)$$

无论形变体的形变与转动状态如何, 只要连续体点集保持连续可微性质, 总可以求出在空间的平均整旋角.

反之, 上述定理也可以用以判别变换函数是否可能的判别条件. 当 $|\sin\vartheta| > 1$ 时, 变换便是物理不可能的.

六、形变时线段的转动分布函数

当可变形体形变时, 过变形体中任一点的线段转动是随方向不同的分布函数, 这一点在概念上和刚性转动有根本区别. 下面举几个典型例子说明.

以 x^i 指形变体中一点的拖带坐标, 以 \bar{x}^i 指形变后该点在固定参考系的坐标. 变换函数为

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3; t)$$

t 指时间.

(1) 单向拉伸

变换函数为

$$\bar{x}^1 = (1 + \lambda)x^1, \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3$$

应用公式(2.6)~(2.9)求出应变张量的物理分量及整旋角

$$[S^i_j] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ 1 + \lambda & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\vartheta = 0)$$

过形变体中任一线段的转动角 α 是线段初始方向角 θ 的函数

$$\sin\alpha = \frac{1 + \lambda}{\lambda + 2} \frac{d}{d\theta} [\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}] \quad (6.1)$$

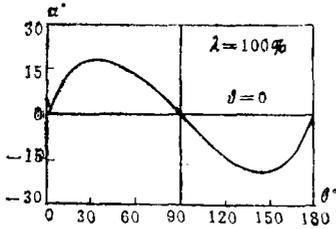
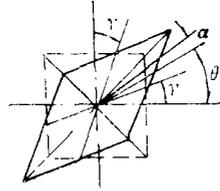
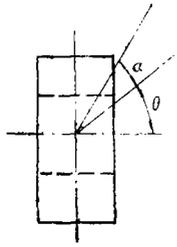


图3 纯拉伸 线元转动

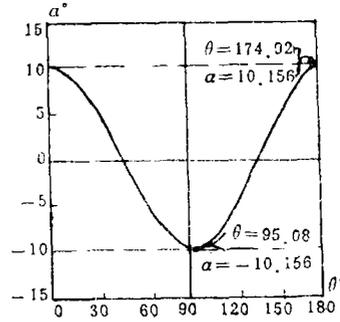


图4 纯剪切 线元转动

$$k^2 = \frac{(1+\lambda)^2 - 1}{(1+\lambda)^2}, \quad \text{snu} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

转动角 α 的正弦值平均为零, 对应于 $\delta=0$.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin\alpha(\theta) d\theta = 0$$

从此简例即可看出, 甚至在最简单的形变, 过一点的线段转动不为零, 仅是绕一点各线段的转角平均值为0. 必须注意在一般的形变条件下, 我们所指的平均并不是简单的算术平均值. 在简单剪切情况即可看出.

(2) 纯剪切

设变换函数为 (γ 为剪切角)

$$\bar{x}^1 = x^1 + \text{tg}\gamma x^2, \quad \bar{x}^2 = \text{tg}\gamma x^1 + x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3$$

可求出应变张量的物理分量及平均整旋角为

$$[S^i_j] = \begin{bmatrix} 0 & \sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\delta=0)$$

线段转动角 α 和线段初始方位角 θ 的关系由下式决定

$$\sin\alpha = \frac{\text{tg}\gamma \cos 2\theta}{\sqrt{\sec^2\gamma + 2\text{tg}\gamma \sin 2\theta}} \quad (6.2)$$

对应于 $\delta=0$, 乃有

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin\alpha(\theta) d\theta = 0$$

(3) 简单剪切 (平滑变形)

设变换函数为 (γ 为剪切角)

$$\bar{x}^1 = x^1 + \text{tg}\gamma x^2, \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3$$

可求出应变张量的物理分量及转动角

$$[\hat{S}^i_j] = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{1 - [\sin^2\gamma]/4} & [\sin\gamma]/2 & 0 \\ (\sin\gamma)/2 & 1 - \sqrt{1 - (\sin^2\gamma)/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta = -\text{arc sin}\left(\frac{1}{2} \sin\gamma\right)$$

在 \hat{S}^i_j 中的 \hat{S}^1_1 与 \hat{S}^2_2 是所谓剪切的非线性高阶效应项, 已为实验所证实(参见肖克坪的实验^[131]).

线段转角的分布函数 $\alpha = \alpha(\theta)$ 由下式确定:

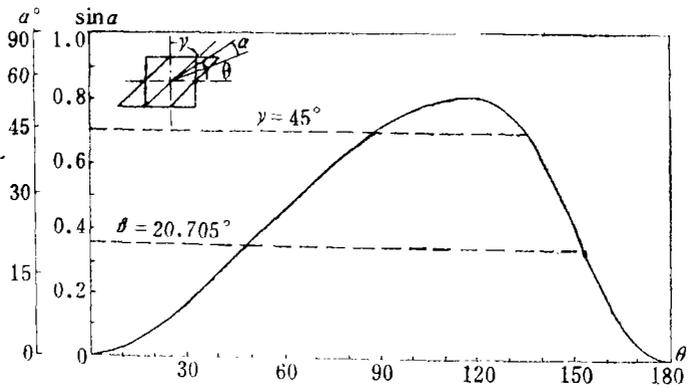


图 5 简单剪切 线元转动

$$\sin\alpha = -\frac{\sin\gamma \sin^2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta \cos^2\gamma + \cos^2(\theta - \gamma)}} \tag{6.3}$$

当 $\gamma = 45^\circ$ 时

$$\vartheta = \text{arc sin}\left(\frac{1}{2} \sin\gamma\right) = 20.705^\circ$$

$\alpha = \alpha(\theta)$ 曲线示于图. 特别引起注意的是在第二与第三象限出现线段转动 $\alpha > 45^\circ$ 的区间.

七、Euler 运动学公式的推广 局部角速度

连续体点集在形变运动过程中, 其中每一点的无穷小邻域一般都具有应变速率 \hat{S} 和局部角速度 $L\hat{\vartheta}$. 速度梯度可以分解为应变速率和局部角速度之和

$$v^j_{||i} = L_i^j \hat{\vartheta} + \hat{S}^j_i \tag{7.1}$$

$v^j_{||i}$ 指形变速度场中一点速度分量 v^j 对实时拖带系坐标 x^i 的协变导数. 公式(7.1)的证明见[2]及[4]. 我们有

$$\hat{S}^j_i = (v^j_{||i} + v^j_{||i}{}^T)/2, \quad L_i^j \hat{\vartheta} = (v^j_{||i} - v^j_{||i}{}^T)/2 \tag{7.2}$$

由公式(7.2)可以导出刚体运动学的Euler公式:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7.3)$$

\mathbf{r} 为刚体中任一点的位置矢量, $\boldsymbol{\omega}$ 为角速度, \mathbf{v}_0 为主点的速度, \mathbf{v} 为任一点的速度。证明如下:

对于刚体而言, $\dot{\mathbf{S}} = 0$, 微分方程(7.1)化为

$$v^j \parallel_i = L_i^j \omega \quad (7.4)$$

因为刚体不变形, 初始的直线直交拖带系仍保持为正交系, 积分下列方程组,

$$\frac{\partial v_j}{\partial x^i} = L_{i,j} \omega \quad (7.5)$$

即可建立公式(7.3), 这是公式(7.1)的特例。因此, 我们称公式(7.1)为广义 Euler 运动学公式。

八、有限转动逆差矩阵, Pauli 自旋矩阵, 极分解定理结果的非唯一性

在本节中, 我们证明量子力学中的 Pauli 自旋矩阵的基本数学性质可以由可变形体几何场论中的 L_i^j 矩阵得出。在第四节公式(a₆)中, 令转轴取向分别选在

$$\begin{aligned} L_1 = 1, L_2 = L_3 = 0; L_2 = 1, L_3 = L_1 = 0 \\ L_3 = 1, L_1 = L_2 = 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$C_1 = [L_i^j]_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [L_i^j]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = [L_i^j]_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

C_i 具有下列性质:

$$\left. \begin{aligned} C_1 C_2 - C_2 C_1 &= C_3 \\ C_2 C_3 - C_3 C_2 &= C_1 \\ C_3 C_1 - C_1 C_3 &= C_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

以上结果称为有限转动逆差矩阵。Pauli 自旋矩阵是在二维复数平面上表示, 转动映象是虚的。而公式(8.2)的几何意义容易由转动结果与转动次序的相关性体现。

用矩阵相乘分离转动与形变的极分解定理由于有限转动逆差矩阵的影响, 在三维空间分解是非唯一的, 因此在三维理论的实际应用没有发展前途

九、结束语

在非线性力学场论中, 有限转动与有限应变度量具有同等重要的地位, 而前者比后者更为基本。新的几何场论使连续体力学各领域获得统一的理论基础([4],[2])。这是一个十分重要的进展, 今后在工程力学和物理领域将会有更多的应用。

最近, 姜耀东对 S-R 分解定理用几何法又作了存在性的证明, 对平均转角的意义进行了有益的讨论, 在此一并附志之。

参 考 文 献

- [1] 陈至达, 连续介质有限变形力学几何场论, 力学学报, 2 (1979), 107—117.
- [2] 陈至达, 有理力学讲义, (修订本), 中国矿业学院北京研究生部 (1983).
- [3] 陈至达, 可变形体的有限转动参数和回转磁效应, 应用数学和力学, 4, 2 (1983), 151—157.
- [4] 陈至达, 连续体力学的统一Lagrange方程, 力学学报特刊 (1981), 90—99.
- [5] Truesdell, C. and W. Noll, *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, Band III/3, Springer-Verlag (1965).
- [6] Stokes, G. G., *Math. and Phys. Papers*, Vol. I, Cambridge (1880).
- [7] Eddington, A. S., *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge (1923), 48.
- [8] Wilson, E. B., *Vector Analysis*, Chapter VII, Rotations and Strains, Gibbs, Yale University Press (1901).
- [9] 陈至达, Euler转动参数及Pauli自旋矩阵的几何表现, 中国力学学会一般力学专题讨论会, 北京 (1962年7月).
- [10] 姜耀东, 论S-R分解定理的存在性和平均转角, 中国矿院工程力学专题报告 (待发表), (1985).
- [11] Eringen, A. C., *Continuum Physics*, Academic Press (1976).
- [12] Synge, J. L., 钱伟长 (Chien, W. Z.), The intrinsic theory of elastic shells and plates, *Applied Mechanics*, Theodore von Kármán Anniversary Volume (1941), 103—120.
- [13] 肖克坪、杨志家, 三轴测力传感器中的剪切高阶效应, 上海力学讨论会 (1985).

On the Representation of Finite Rotation in Nonlinear Field Theory of Continuum Mechanics

Chen Zhi-da

(China Institute of Mining, Graduate School, Beijing)

Abstract

One of the important basic theoretical problems in the development of continuum mechanics is the separation of finite strain and finite rotation at a point in the displacement field. Now it is certain that S-R decomposition theorem provides a rational theoretical solution for this problem. The purpose of this paper is to clarify some misleading basic concepts of finite rotation of deformed body in current literature and to promote further progress.