应用数学和力学，第7卷第12期（1986年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于耦合型对流-扩散方程组的奇异摄动边值问题*

羊　丹　平

（山东大学数学系，1984年3月26日收到）

摘　　要

本文考虑下述耦合型对流-扩散方程组的奇异摄动边值问题：

$$\begin{cases}\varepsilon u_1''+a_1(x)u_1'+b_{11}(x)u_1+b_{12}(x)u_2=f_1(x)\\ \varepsilon u_2''-a_2(x)u_2'+b_{21}(x)u_1+b_{22}(x)u_2=f_2(x)\\ u_1(0)=\alpha_1,\qquad u_1(1)=\beta_1\\ u_2(0)=\alpha_2,\qquad u_2(1)=\beta_2\end{cases}\qquad (0<x<1)$$

本文提出两种方法：一种是初值化解法，用这种方法，原始问题转化成一系列没有扰动的一阶微分方程或方程组的初值问题，从而得到一个渐近展开式；第二种是边值化解法，用这种方法，原始问题转化成一组没有边界层现象的边值问题，从而可以得到精确解和使用经典的数值方法去得到具有关于摄动参数ε一致的高精度数值解．

一、引　　言

考虑下述耦合型对流-扩散方程组的奇异摄动边值问题

$$P_\varepsilon\quad\begin{cases}\varepsilon u_1''+a_1(x)u_1'+b_{11}(x)u_1+b_{12}(x)u_2=f_1(x)\\ \varepsilon u_2''-a_2(x)u_2'+b_{21}(x)u_1+b_{22}(x)u_2=f_2(x)\end{cases}\qquad (0<x<1)\tag{1.1}$$

边值条件是

$$u_1(0)=\alpha_1,\ \ u_1(1)=\beta_1;\ \ u_2(0)=\alpha_2,\ \ u_2(1)=\beta_2\tag{1.2}$$

这里

$$a_i(x)\in C^1[0,1],\ \ a_i(x)\geqslant a_0=\text{常数}>0\qquad (i=1,2;0<\varepsilon\ll 1)\tag{1.3}$$

在物理中，方程组通常是两种相向流动的流的线性数学模型，例如，固体电子学中电子和空穴的相向流动．近年来，随着固体电子技术与大规模集成电路的发展，关于上述问题P_ε的研究越来越为人们所重视．最早，L.R.Abrahamsson，H.B.Keller和H.O.Kreiss建立了其解的一个渐近展开式和一个数值方法(参见[1])．他们给出了如下结果：

(1)　一个具有如下形式的解的渐近展开式

* 钱伟长推荐．

$$u(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i v_i(x)+\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left[w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+z_i\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right]+O(\varepsilon^{n+1}) \tag{1.4}$$

(2) 一个精度为$O(h)$的数值方法

在文献[1]中，存在许多迄今未解决和需改进的问题。首先，渐近展开式(1.4)中系数$v_i(x)$，$w_i(x/\varepsilon)$和$z_i((1-x)/\varepsilon)$的计算是非常复杂的，没有给出统一的计算公式，因此，渐近展开式(1.4)不适于使用电子计算机自动地计算。其次，数值方法的精度太低，且关于摄动参数ε是不一致的。

为了解决上述问题，我们提出两种新方法。第一，给出了一个幂级数形式的渐近展开式。其中的系数分别满足一组一阶微分方程或方程组的初值或边值问题，他们具有统一明晰的形式和易于计算的特点，能够在计算机上实现自动计算。因此，这种方法具有明显的使用价值。第二，给出一种新的边值化解法。运用这类方法，P_ε的解分解成一组没有或有非常弱的边界层的边值问题的解，从而精确解或高精度近似解被合成。尤其重要的是，我们可以使用经典的高精度数值方法去得到关于摄动参数ε一致的高精度数值解，和很好的描述解在边界层的性态。

基本方法是使用"边界层函数"分解与合成奇异摄动问题P_ε的解。第二节叙述了如何使用"边界层函数"分解P_ε成一组"不完全边值问题"；第三节和第四节给出了第二节所提问题的初值化与边值化解法。第五节给出一些先验估计。

二、P_ε的分解

下面例子颇具启发性。

考虑方程组

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon u_1''+u_1'=0,\ \ \varepsilon u_2''-u_2'+u_1=0 \qquad (0<x<1)\\ u_1(0)=1,\ \ u_1(1)=\exp[-1/\varepsilon],\ \ u_2(0)=\alpha,\ \ u_2(1)=\beta\end{array}\right\} \tag{2.1}$$

容易得到

$$u_1=\exp\left[-\frac{x}{\varepsilon}\right],\quad u_2=C_1+C_2\exp\left[\frac{1-x}{\varepsilon}\right]-\frac{\varepsilon}{2}\exp\left[-\frac{x}{\varepsilon}\right]$$

这里$\exp[-x/\varepsilon]$与$\exp[-(1-x)/\varepsilon]$称为边界层函数。在第二个方程中如果没有u_1的影响，则$u_2=C_1+C_2\exp[-(1-x)/\varepsilon]$，边界层仅在$x=1$点出现。但由于$u_1$的影响，边界层在$[0,1]$的两个端点$x=0$和$x=1$同时出现，不过在$x=0$的摄动振幅是$O(\varepsilon)$。因此，我们称$u_2$在$x=1$点处的边界层是"主边界层"，在$x=0$的为"次边界层"。

由例(2.1)得到启发，我们可以推断，P_ε的解具有主、次两个边界层。于是我们假定P_ε的解具有形式

$$u=v(x)+\exp\left[-\int_0^x\frac{a_1(t)}{\varepsilon}dt\right]w(x)+\exp\left[-\int_x^1\frac{a_2(t)}{\varepsilon}dt\right]z(x) \tag{2.2}$$

其中 $u=(u_1,u_2)^T$，$v=(v_1,v_2)^T$，$w=(w_1,w_2)^T$和$z=(z_1,z_2)^T$

将(2.2)代入(1.1)，我们得到

$$\left.\begin{aligned}&[\varepsilon v_1''+a_1(x)v_1'+b_{11}(x)v_1+b_{12}(x)v_2]+[\varepsilon w_1''-a_1(x)w_1'+(b_{11}(x)-a_1'(x))w_1\\&\quad+b_{12}(x)w_2]\exp\left[-\int_0^x\frac{a_1(t)}{\varepsilon}dt\right]+[\varepsilon z_1''+(2a_2(x)+a_1(x))z_1'\\&\quad+(b_{11}(x)+a_2'(x)+(a_2^2(x)+a_1(x)a_2(x))/\varepsilon)z_1+b_{12}(x)z_2]\\&\quad\cdot\exp\left[-\int_x^1\frac{a_2(t)}{\varepsilon}dt\right]=f_1(x)\\&[\varepsilon v_2''-a_2(x)v_2'+b_{21}v_1+b_{22}(x)v_2]+[\varepsilon w_2''-(2a_1(x)+a_2(x))w_2'\\&\quad+b_{21}(x)w_1+(b_{22}(x)-a_1'(x)+(a_1^2(x)+a_1(x)a_2(x))/\varepsilon)w_2]\\&\quad\cdot\exp\left[-\int_0^x\frac{a_1(t)}{\varepsilon}dt\right]+[\varepsilon z_2''+a_2(x)z_2'+b_{21}(x)z_1+(b_{22}(x)\\&\quad+a_2'(x))z_2]\exp\left[-\int_x^1\frac{a_2(t)}{\varepsilon}dt\right]=f_2(x)\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=v_1(0)+w_1(0)+\delta_2z_1(0),\quad \beta_1=v_1(1)+\delta_1w_1(1)+z_1(1)\\&\alpha_2=v_2(0)+w_2(0)+\delta_2z_2(0),\quad \beta_2=v_2(1)+\delta_1w_2(1)+z_2(1)\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

其中

$$\delta_1=\exp\left[-\int_0^1\frac{a_1(t)}{\varepsilon}dt\right],\quad \delta_2=\exp\left[-\int_0^1\frac{a_2(t)}{\varepsilon}dt\right]\tag{2.5}$$

我们将P_ε分解成下面三个边值问题：

$$P_\varepsilon1\quad\begin{cases}\varepsilon v_1''+a_1(x)v_1'+b_{11}(x)v_1+b_{12}(x)v_2=f_1(x)\\ \varepsilon v_2''-a_2(x)v_2'+b_{21}(x)v_1+b_{22}(x)v_2=f_2(x)\qquad(0<x<1)\\ v_1(1)=\beta_1-\delta_1w_1(1)-z_1(1)\\ v_2(0)=\alpha_2-w_2(0)-\delta_2z_2(0)\end{cases}\tag{2.6}$$

$$P_\varepsilon2\quad\begin{cases}\varepsilon w_1''-a_1(x)w_1'+(b_{11}(x)-a_1'(x))w_1+b_{12}(x)w_2=0\\ \varepsilon^2w_2''-\varepsilon(2a_1(x)+a_2(x))w_2'+\varepsilon b_{21}(x)w_1+[\varepsilon(b_{22}(x)-a_1'(x))+a_1^2(x)\\ \qquad+a_1(x)a_2(x)]w_2=0\\ w_1(0)=\alpha_1-v_1(0)-\delta_2z_1(0)\end{cases}\tag{2.7}$$

$$P_\varepsilon3\quad\begin{cases}\varepsilon^2z_1''+\varepsilon(2a_2(x)+a_1(x))z_1'+[\varepsilon(b_{11}(x)+a_2'(x))+a_2^2(x)\\ \qquad+a_1(x)a_2(x)]z_1+\varepsilon b_{12}(x)z_2=0\\ \varepsilon z_2''+a_2(x)z_2'+b_{21}(x)z_1+(b_{22}(x)+a_2'(x))z_2=0\\ z_2(1)=\beta_2-v_2(1)-\delta_1w_1(1)\end{cases}\tag{2.8}$$

上述三个边值问题有两个重要的特点：第一个是它们的边值条件不完备，因而称为“不完全边值问题”；第二个是强制边值条件仅在次边界层端给出。因此，我们可以使用一些技巧去解满足给定边值条件，但有很弱边界层或甚至没有边界层效应的解，从而我们能解决那些由于边界层现象而使经典数值方法变得无效的问题。

三、$P_\varepsilon1\sim3$的初值化解法

根据主次边界层的之间的差异与边值条件的形式，我们形式地将v，w和z写成如下幂级数

$$v_i=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^k\delta_1^p\,\delta_2^m\,\delta_{kpm}^{(i)}(x)\qquad(i=1,2)\tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}w_1&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^k\delta_1^p\,\delta_2^m w_{kpm}^{(1)}(x)\\ w_2&=\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^k\delta_1^p\,\delta_2^m\,w_{kpm}^{(2)}(x)\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned}z_1&=\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^k\delta_1^p\delta_2^m z_{kpm}^{(1)}(x)\\ z_2&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^k\delta_1^p\,\delta_2^m\,z_{kpm}^{(2)}(x)\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

将(3.1)～(3.3)分别代入P_ε1～3，我们得到

$$\left.\begin{aligned}&\begin{cases}a_1(x)v_{000}^{(1)'}+b_{11}(x)\,v_{000}^{(1)}+b_{12}(x)\,v_{000}^{(2)}=f_1(x)\\ -a_2(x)\,v_{000}^{(2)'}+b_{21}(x)\,v_{000}^{(1)}+b_{22}(x)\,v_{000}^{(2)}=f_2(x)\\ v_{000}^{(1)}(1)=\beta_1,\quad v_{000}^{(2)}(0)=\alpha_2\end{cases}\\ &\begin{cases}a_1(x)v_{kpm}^{(1)'}+b_{11}(x)\,v_{kpm}^{(1)}+b_{12}(x)\,v_{kpm}^{(2)}=-v_{k-1,pm}^{(1)''}\\ -a_2(x)v_{kpm}^{(2)'}+b_{21}(x)\,v_{kpm}^{(1)}+b_{22}(x)\,v_{kpm}^{(2)}=-v_{k-1,}^{(2)''}\\ v_{kpm}^{(1)}(1)=-w_{k,p-1,m}^{(1)}(1)-z_{k-1,pm}^{(1)}(1)\\ v_{kpm}^{(2)}(0)=-w_{k-1,pm}^{(2)}(0)-z_{kp,m-1}^{(2)}(0)\end{cases}\\ &\qquad k,p,m=0,1,2,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\begin{cases}-a_1(x)\,w_{000}^{(1)'}+(b_{11}(x)-a_1'(x))w_{000}^{(1)}=0\\ w_{000}^{(1)}(0)=\alpha_1-v_{000}^{(1)}(0)\\ w_{000}^{(2)}=-b_{21}(x)\,w_{000}^{(1)}/(a_1^2(x)+a_1(x)a_2(x))\end{cases}\\ &\begin{cases}-a_1(x)w_{kpm}^{(1)'}+(b_{11}(x)-a_1'(x))\,w_{kpm}^{(1)}=-\,w_{k-1,pm}^{(1)''}-b_{12}(x)\,w_{k-1,pm}^{(2)}\\ w_{kpm}^{(1)}(0)=-v_{kpm}^{(1)}(0)-z_{k-1,p,m-1}^{(1)}(0)\\ w_{kpm}^{(2)}=-[\,w_{k-2,pm}^{(2)''}-(2a_1(x)+a_2(x))\,w_{k-1,pm}^{(2)'}+(b_{22}(x)-a_1'(x))\,w_{k-1,pm}^{(2)}\\ \qquad+b_{21}(x)\,w_{kpm}^{(1)}]/(a_1^2(x)+a_1(x)a_2(x))\end{cases}\\ &\qquad k,p,m=0,1,2,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a_2(x)z_{000}^{(2)\prime}+(b_{22}(x)+a_2'(x))\,z_{000}^{(2)}=0\\ z_{000}^{(2)}(1)=\beta_2-v_{000}^{(2)}(1)\\ z_{000}^{(1)}=-b_{12}(x)\,z_{000}^{(2)}/(a_2^2(x)+a_1(x)a_2(x))\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}a_2(x)z_{kpm}^{(2)\prime}+(b_{22}(x)+a_2'(x))\,z_{kpm}^{(2)}=-z_{k-1,pm}^{(2)\prime\prime}-b_{21}(x)\,z_{k-1,pm}^{(1)}\\ z_{kpm}^{(2)}(1)=-v_{kpm}^{(2)}(1)-w_{k-1,p-1,m}^{(2)}(1)\\ z_{kpm}^{(1)}=-[z_{k-2,pm}^{(1)\prime\prime}+(2a_2(x)+a_1(x))\,z_{k-1,pm}^{(1)\prime}+(b_{11}(x)+a_2'(x))\,z_{k-1,pm}^{(1)}\\ \qquad +b_{12}(x)z_{kpm}^{(2)}]/(a_2^2(x)+a_1(x)a_2(x))\end{array}\right.\\ \qquad k,p,m=0,1,2,\cdots\end{array}\right\}\tag{3.6}$$

在上述函数中，如果三个脚标中的一个小于零时，该函数恒取零值。

(3.4)～(3.6)的解可以依图1所示的“矩形规则”逐层求得：

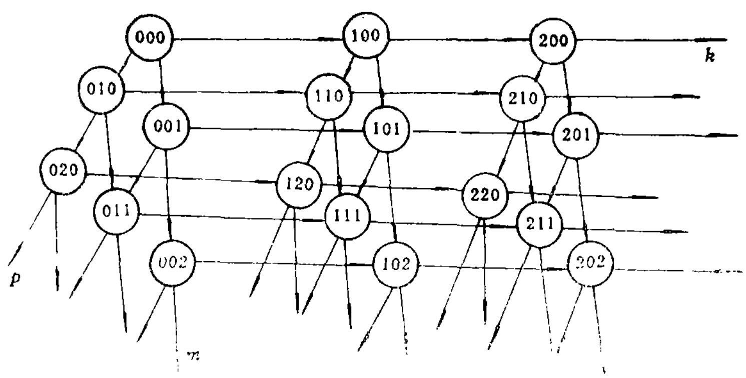

图 1

$$(v_{kpm}^{(1)},v_{kpm}^{(2)})\rightarrow(w_{kpm}^{(1)},z_{kpm}^{(2)})\rightarrow(w_{kpm}^{(2)},z_{kpm}^{(1)})$$

(3.4)～(3.6)是不依赖于ε的一阶微分方程或方程组的初值或边值问题。其解是光滑函数，它们给出了P_ε的一个一致有效渐近展开。(3.4)～(3.6) 的形式是简单和统一的，易于在电子计算机上连续自动地计算。

四、P_ε1～3的边值化解法

第三节由(3.4)～(3.6)确定的展开式(3.1)～(3.3)通常仅在ε的一个非常小的范围内给出一个一致有效的渐近展开，因此，其适用范围受到很大限制，并且其余项估计的界是ε的幂次。为了得到一个广泛适用并导致得到不依赖于ε的高精度解的方法，我们提出边值化解法，即补足适当的自然边值条件去求P_ε1～3的没有或仅有非常弱边界层现象的解。

设

$$
\left.
\begin{array}{l}
A_0=\begin{pmatrix} a_1(x) & \\ & -a_2(x) \end{pmatrix}, \qquad B_0=\begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) \end{pmatrix} \\
A_1(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} -a_1(x) & \\ & -\varepsilon(2a_1(x)+a_2(x)) \end{pmatrix}, \quad A_2(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon(2a_2(x)+a_1(x)) & \\ & a_2(x) \end{pmatrix} \\
B_1(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} b_{11}(x)-a_1'(x) & b_{12}(x) \\ \varepsilon b_{21}(x) & \varepsilon(b_{22}(x)-a_1'(x))+a_1^2(x)+a_1(x)a_2(x) \end{pmatrix} \\
B_2(x,\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon(b_{11}(x)+a_2'(x))+a_2^2(x)+a_1(x)a_2(x) & \varepsilon b_{12}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x)+a_2'(x) \end{pmatrix} \\
I_1=\begin{pmatrix} 1 & \\ & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad I_2=\begin{pmatrix} \varepsilon & \\ & 1 \end{pmatrix}, \qquad F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}
\end{array}
\right\} \tag{4.1}
$$

当P_ε常系数方程组且F是常向量时，问题能被极大地简化。

在这种情形，$P_\varepsilon 1\sim3$的特征方程分别是

$$\det(\varepsilon\lambda^2 I+\lambda A_0+B_0)=0 \tag{4.2a}$$

$$\det(\varepsilon\lambda^2 I_1+\lambda A_1+B_1)=0 \tag{4.2b}$$

$$\det(\varepsilon\lambda^2 I_2+\lambda A_2+B_2)=0 \tag{4.2c}$$

相应退化方程($\varepsilon=0$)的特征方程分别为

$$\det(\lambda A_0+B_0)=0 \tag{4.3a}$$

$$\det(\lambda A_1(x,0)+B_1(x,0))=0 \tag{4.3b}$$

$$\det(\lambda A_2(x,0)+B_2(x,0))=0 \tag{4.3c}$$

这里方程(4.3a)是二次多项式，(4.3b)和(4.3c)是线性函数，它们共有四个根$\bar{\lambda}_j$ ($j=1,2,3,4$)。由根关于系数的连续性，当$\varepsilon\to0$时，(4.2a)四个根中的两个，(4.2b)四个根中的一个与(4.2c)四个根中的一个，分别记作$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$，趋于$\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\bar{\lambda}_3,\bar{\lambda}_4$。由下面的方程组解出相当特征向量。

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\varepsilon\lambda_i^2+\lambda_i A_0+B_0)\bar{u}_i=0 \qquad (i=1,2) \\
(\varepsilon\lambda_3^2 I_1+\lambda_3 A_1+B_1)\bar{u}_3=0,\ (\varepsilon\lambda_4^2 I_2+\lambda_4 A_2+B_2)\bar{u}_4=0
\end{array}
\right\} \tag{4.4}
$$

如果B是可逆矩阵，则

$$
\left.
\begin{array}{l}
v=C_1\exp[\lambda_1 x]\bar{u}_1+C_2\exp[\lambda_2 x]\bar{u}_2+B^{-1}F \\
w=C_3\exp[\lambda_3 x]\bar{u}_3, \quad z=C_4\exp[\lambda_4 x]\bar{u}_4
\end{array}
\right\} \tag{4.5}
$$

是$P_\varepsilon 1\sim P_\varepsilon 3$的一组没有边界层的解。使用边值条件我们得到

$$
\left.
\begin{array}{l}
C_1\bar{u}_1+C_2\bar{u}_2+C_3\bar{u}_3+C_4\delta_2\bar{u}_4=\alpha-B^{-1}F \\
C_1\exp[\lambda_1]\bar{u}_1+C_2\exp[\lambda_2]\bar{u}_2+C_3\delta_1\exp[\lambda_3]\bar{u}_3+C_4\exp[\lambda_4]\bar{u}_4=\beta-B^{-1}F
\end{array}
\right\} \tag{4.6}
$$

这是一个四阶线代数方程组。求得C_i ($i=1,2,3,4$)后，我们即得到$P_\varepsilon 1\sim P_\varepsilon 3$的精确解。于是，求解常系数方程组$P_\varepsilon$的过程转变成一些线性代数计算过程。借助于(4.3)求(4.2)的当$\varepsilon\to0$时有界的四个根，然后求(4.4)的相应的特征向量，最后解线性代数方程组(4.6)。

当P_ε是变系数方程组时，完全消除边界层是困难的。我们采用下述三种方法去处理$P_\varepsilon 1\sim P_\varepsilon 3$。

(A) 对系数作简单延拓。

设

$$A_i(x,\varepsilon)=\begin{cases}A_i(0,\varepsilon)\\A_i(x,\varepsilon),\\A_i(1,\varepsilon)\end{cases}\quad B_i(x,\varepsilon)=\begin{cases}B_i(0,\varepsilon)\\B_i(x,\varepsilon),\\B_i(1,\varepsilon)\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}F(0)&(x\leqslant0)\\F(x)&(0\leqslant x\leqslant1)\\F(1)&(x\geqslant1)\end{cases}\tag{4.7}$$

一般说来，这类延拓仅保持连续性.

假定延拓(4.7)是足够光滑的，即A_i，B_i和F在$x=0$，1点的直至充分高阶的导数均为零.在这种情形，当我们在$[-\eta,1+\eta]$ $(\eta>0)$上解$P_\varepsilon1\sim P_\varepsilon3$时，它们的解在$[-\eta,1+\eta]$上是足够光滑的.

首先考虑$P_\varepsilon1$.设想$P_\varepsilon1$的全部解自然地在保持满足方程的条件下延展至$[-\eta,1+\eta]$.在$[-\eta,0]$和$[1,1+\eta]$内，$P_\varepsilon1$是下述常系数方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon v''+A_0(0)v'+B_0(0)v=F(0)&&(-\eta\leqslant x\leqslant0)\\&\varepsilon v''+A_0(1)v'+B_0(0)v=F(1)&&(1\leqslant x\leqslant1+\eta)\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

根据上面关于常系数方程组的讨论，我们知道特征值问题

$$\left.\begin{aligned}&(\varepsilon\lambda^2I+\lambda A_0(0)+B_0(0))u=0\\&(\varepsilon\bar\lambda^2I+\bar\lambda A_0(1)+B_0(1))\bar u=0\end{aligned}\right\}\tag{4.9}$$

分别有两个特征值λ_1,λ_2和$\bar\lambda_1,\bar\lambda_2$，它们当$\varepsilon\to0$时保持有界并趋向于下述退化特征方程$(\varepsilon=0)$的特征根$\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2$和$\tilde{\bar\lambda}_1,\tilde{\bar\lambda}_2$

$$\det(\tilde\lambda A_0(0)+B_0(0))=0,\ \det(\tilde{\bar\lambda}A_0(1)+B_0(1))=0\tag{4.10}$$

并分别有两个相应的特征向量u_1,u_2和$\bar u_1,\bar u_2$.

当我们能够容易地得到(4.8)的两个没有边界层的特解时，例如当$B_0(0)$，$B_0(1)$两者均可逆时，取$v^*=B_0^{-1}(0)F(0)$，$\bar v^*=B_0^{-1}(1)F(1)$，因为我们要选择$P_\varepsilon1$的没有边界层的解.所以，在$(-\eta,0)$和$(1,1+\eta)$中，v应有下述形式

$$\left.\begin{aligned}&v=C_1\exp[\lambda_1x]u_1+C_2\exp[\lambda_2x]u_2+v^*&&(-\eta<x<0)\\&v=\bar C_1\exp[\bar\lambda_1x]\bar u_1+\bar C_2\exp[\bar\lambda_2x]\bar u_2+\bar v^*&&(1<x<1+\eta)\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

从代数方程组

$$v(0)=C_1u_1+C_2u_2+v^*(0),\ v(1)=\bar C_1\exp[\bar\lambda_1]\bar u_1+\bar C_2\exp[\bar\lambda_2]\bar u_2+\bar v^*(1)\tag{4.12}$$

中解出C_1,C_2和$\bar C_1$，$\bar C_2$，则有

$$v_1'(0)=\lambda_1C_1u_1^{(1)}+\lambda_2C_2u_2^{(1)}+v_1^{*\prime}(0)\tag{4.13a}$$

$$v_2'(1)=\bar\lambda_1\bar C_1\exp[\bar\lambda_1]\bar u_1^{(2)}+\bar\lambda_2\bar C_2\exp[\bar\lambda_2]\bar u_2^{(2)}+\bar v^{*\prime}(1)\tag{4.13b}$$

其中 $u_i^{(j)}(i,j=1,2)$表示u_i的第j个分量.根据延拓的假定，v自然光滑地延展到$[0,1]$之外，所以(4.13a)和(4.13b)即是$P_\varepsilon1$的没有边界层的解的两个自然边界条件.

如果不容易得到v^*和$\bar v^*$，我们首先解辅助问题$P_\varepsilon'1$：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon U''+\tilde A_0(x)U'+\tilde B_0(x)U=\tilde F(x)\qquad(-\delta<x<1+\delta,\delta>0)\\&U_1(1+\delta)=0,\ U_2(-\delta)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.14}$$

其中$\tilde A_0(x)$，$\tilde B_0(x)$和$\tilde F(x)$是$A_0(x)$，$B_0(x)$和$F(x)$的足够光滑的延拓，且$\tilde F(x)$在$x=-\delta$和$1+\delta$的小邻域内为零.基于以上结论，我们在(4.13)中以0代替v^*和$\bar v^*$，以$-\delta$和$1+\delta$代替0和1，即给$P_\varepsilon'1$两个自然边值条件.解出$U(x)$，考虑新的$P_\varepsilon1$：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon v''+A_0(x)v'+B_0(x)v=0 \qquad (0<x<1)\\&v_1(1)=\beta_1-U_1(1)-\delta_1w_1(1)-z_1(1)\\&v_2(0)=\alpha_2-U_2(0)-w_2(0)-\delta_2z_2(0)\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

在(4.13)中取$v^*=\bar{v}^*=0$，即补足了自然边界条件。最后，原$P_\varepsilon 1$的解为$v+U$。

考虑$P_\varepsilon 2$和$P_\varepsilon 3$。在$[-\eta,0]$和$[1,1+\eta]$内，$P_\varepsilon 2$和$P_\varepsilon 3$也是常系数方程组：

$$\varepsilon I_1w''+A_1(0,\varepsilon)w'+B_1(0,\varepsilon)w=0 \qquad (-\eta<x<0) \tag{4.16a}$$

$$\varepsilon I_1w''+A_1(1,\varepsilon)w'+B_1(1,\varepsilon)w=0 \qquad (1<x<1+\eta) \tag{4.16b}$$

和

$$\varepsilon I_2z''+A_2(0,\varepsilon)z'+B_2(0,\varepsilon)z=0 \qquad (-\eta<x<0) \tag{4.17a}$$

$$\varepsilon I_2z''+A_2(1,\varepsilon)z'+B_2(1,\varepsilon)z=0 \qquad (1<x<1+\eta) \tag{4.17b}$$

相应特征问题

$$\left.\begin{aligned}&(\varepsilon\lambda^2I_1+\lambda A_1(0,\varepsilon)+B_1(0,\varepsilon))u=0\\&(\varepsilon\bar{\lambda}^2I_1+\bar{\lambda}A_1(1,\varepsilon)+B_1(1,\varepsilon))\bar{u}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.18a}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&(\varepsilon\lambda^2I_2+\lambda A_2(0,\varepsilon)+B_2(0,\varepsilon))u=0\\&(\varepsilon\bar{\lambda}^2I_2+\bar{\lambda}A_2(1,\varepsilon)+B_2(1,\varepsilon))\bar{u}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.18b}$$

分别有根λ_3，$\bar{\lambda}_3$和λ_4，$\bar{\lambda}_4$趋向于退化问题

$$\det(\tilde{\lambda}A_1(0,0)+B_1(0,0))=0,\ \det(\tilde{\bar{\lambda}}A_1(1,0)+B_1(1,0))=0 \tag{4.19a}$$

$$\det(\tilde{\lambda}A_2(0,0)+B_2(0,0))=0,\ \det(\tilde{\bar{\lambda}}A_2(1,0)+B_2(1,0))=0 \tag{4.19b}$$

的根$\tilde{\lambda}_3$，$\tilde{\bar{\lambda}}_3$和$\tilde{\lambda}_4$，$\tilde{\bar{\lambda}}_4$，相应的特征向量是u_3，$\bar{u}_3$和u_4，$\bar{u}_4$。

我们应该选择具有下面形式的解：

$$\left.\begin{aligned}&w=C_3\exp[\lambda_3x]u_3,\ z=C_4\exp[\lambda_4x]u_4 \qquad (-\eta<x<0)\\&w=\bar{C}_3\exp[\bar{\lambda}_3x]\bar{u}_3,\ z=\bar{C}_4\exp[\bar{\lambda}_4x]\bar{u}_4 \quad (1<x<1+\eta)\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

由下面方程

$$\left.\begin{aligned}&w_1(0)=C_3u_3^{(1)},\ w_1(1)=\bar{C}_3\exp[\bar{\lambda}_3]\bar{u}_3^{(1)}\\&z_2(0)=C_4u_4^{(2)},\ z_2(1)=\bar{C}_4\exp[\bar{\lambda}_4]\bar{u}_4^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

解出C_i和$\bar{C}_i$ $(i=3,4)$。我们得到

$$\left\{\begin{aligned}&w_2(0)=\frac{u_3^{(2)}}{u_3^{(1)}}w_1(0)\\&w_1'(1)=\bar{\lambda}_3w_1(1)\\&w_2'(1)=\bar{\lambda}_3\frac{\bar{u}_3^{(2)}}{\bar{u}_3^{(1)}}w_1(1)\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}&z_1(1)=\frac{\bar{u}_4^{(1)}}{\bar{u}_4^{(2)}}z_2(1)\\&z_1'(0)=\lambda_4\frac{u_4^{(1)}}{u_4^{(2)}}z_2(1)\\&z_2'(0)=\lambda_4z_2(0)\end{aligned}\right. \tag{4.22}$$

综合(4.13)，(4.15)和(4.22)，我们为$P_\varepsilon 1\sim P_\varepsilon 3$补足了八个自然边值条件，从而得到了一个联立微分方程组的完备边值问题。尽管未知函数的个数增加了，但具有下述优点：

(1) 它的精确解没有边界层现象，因此，可以使用经典的高精度数值方法求数值解。

(2) 未知向量函数v，w和z仅在区间[0,1]的端点相互联系，因此，方程的全离散代数方程组的系数矩阵基本上是带状矩阵，容易求解。

(3) 误差估计的界仅与所使用数值方法的精度有关。

这些优点扩大了解法的适用范围。

由于(4.7)通常不能保证延拓的足够光滑，延展解的某个高阶导数将在区间[0,1]的端点产生间断。例如，当(4.7)$\in C^l$时，延展解的$l+2$阶以上的导数会间断。在这种情形，延展解在区间[0,1]内部的性态不能由其外部的性态来推断。仅当(4.7)$\in C^l$ ($l\geqslant 2$)时，我们才可以使用一般的具有两阶以上精度的经典数值方法去解上述方程组。

为了克服这些缺陷，我们使用下述方法：

(B) 足够光滑延拓。在$[-\eta,1+\eta]$ ($\eta>0$)上充分光滑地延拓A_i与B_i ($i=1,2$)，使保持A_i在[0,1]中的特性并在$x=-\eta$和$x=1+\eta$的小邻域内为常矩阵。$F(x)$也在$[-\eta,1+\eta]$充分光滑地延拓，并在两个端点的小邻域内取值为零。

在$x=-\eta$和$1+\eta$补充如下边值条件：

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}v_1'(-\eta)=\lambda_1C_1\exp[-\lambda_1\eta]u_1^{(1)}+\lambda_2C_2\exp[-\lambda_2\eta]u_2^{(1)}\\ v_2'(1+\eta)=\bar\lambda_1\bar C_1\exp[-\bar\lambda_1(1+\eta)]\bar u_1^{(2)}+\bar\lambda_2\bar C_2\exp[-\bar\lambda_2(1+\eta)]\bar u_2^{(2)}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}w_2(-\eta)=\dfrac{u_3^{(2)}}{u_3^{(1)}}w_1(-\eta)\\ w_1'(1+\eta)=\bar\lambda_3w_1(1+\eta)\\ w_2'(1+\eta)=\bar\lambda_3\dfrac{\bar u_3^{(2)}}{\bar u_3^{(1)}}w_1(1+\eta)\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}z_1'(-\eta)=\lambda_4\dfrac{u_4^{(1)}}{u_4^{(2)}}z_2(-\eta)\\ z_2'(-\eta)=\lambda_4z_2(-\eta)\\ z_1(1+\eta)=\dfrac{\bar u_4^{(1)}}{\bar u_4^{(2)}}z_2(1+\eta)\end{array}\right.\end{array}\right\}\tag{4.23}$$

其中λ_i，$\bar\lambda_i$，u_i与$\bar u_i$的意义与(A)中相应符号相同。使用(4.23)在$[-\eta,1+\eta]$上解$P_\varepsilon1\sim P_\varepsilon3$，其解没有边值层，但其边值条件是交错着给出的。

(C) 从方程本身寻找“自然边值条件”。

这种方法的思想是从方程或微分之后的方程中略去含ε的最高幂次的项，解出一阶导数作为自然边值条件。

例如

$$\left.\begin{array}{l}v_1'(0)=\{f_1(0)-b_{11}(0)v_1(0)-b_{12}(0)v_2(0)\}/a_1(0)\\ v_2'(1)=-\{f_2(1)-b_{21}(1)v_1(1)-b_{22}(1)v_2(1)\}/a_2(1)\\ w_1'(1)=(b_{11}(1)-a_1'(1))w_1(1)/a_1(1)\\ w_2(0)=-\varepsilon b_{21}(0)w_1(0)/(a_1^2(0)+a_1(0)a_2(0))\\ w_2'(1)=-\{\varepsilon(b_{21}'(1)w_1(1)+b_{21}(1)w_1'(1))+(a_1^2\\ \qquad +a_1a_2)'(1)w_2(1)\}/(a_1^2(1)+a_1(1)a_2(1))\\ z_2'(0)=-(b_{22}(0)+a_2'(0))z_2(0)/a_2(0)\\ z_1'(0)=-\{\varepsilon(b_{12}'(0)z_2(0)+b_{12}(0)z_2'(0))\\ \qquad +(a_2^2+a_1a_2)'(0)z_1(0)\}/(a_2^2(0)+a_1(0)a_2(0))\\ z_1(1)=-\varepsilon b_{12}(1)z_2(1)/(a_2^2(1)+a_1(1)a_2(1))\end{array}\right\}\tag{4.24}$$

(4.24)是近似自然边值条件，其误差界是$O(\varepsilon)$。我们可以得到误差为$O(\varepsilon^l)$的自然边值条件，但其形式相当复杂。一般讲，满足(4.24)的$P_\varepsilon1\sim P_\varepsilon3$的解的边界层现象已是相当弱的。

五、先验估计

本节考虑P_ε的解的存在唯一性和第三节中展开式余项的估计。

设

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{H}_0^1=\{(u_1,u_2)\,|\,u_1,u_2\in H_0^1[0,1]\},(u,v)=\int_0^1(u_1v_1+u_2v_2)dx\\&\|u\|_0^2=(u,u),\quad \|u\|_{\mathbf{H}_0^1}^2=\left\|\frac{du}{dx}\right\|_0^2+\|u\|_0^2,A'(x)=\frac{dA(x)}{dx}\\&a(u,v)=\varepsilon(u',v')+\frac{1}{2}[(Au,v')-(Au',v)]-\left(\left(B-\frac{1}{2}A'\right)u,v\right)\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

考虑齐次边值问题的P_ε

$$P_\varepsilon^*:\ \varepsilon u''+A(x)u'+B(x)u=F(x)\quad(0<x<1);\ u(0)=u(1)=0\tag{5.2}$$

和下述变分问题D_ε：寻求$u\in\mathbf{H}_0^1[0,1]$使得

$$a(u,v)=-(F,v)\qquad(\forall v\in\mathbf{H}_0^1[0,1])\tag{5.3}$$

定理1 P_ε^*的解一定是D_ε的解；反之，如果$u\in\mathbf{H}_0^1\cap C$是D_ε的解，则一定是P_ε^*的解。

定理2 如果

$$((B+B^T-A')w,w)\leqslant-\delta\|w\|_0^2\qquad(\delta\geqslant0,\forall w\mathbf{H}_0^1)\tag{5.4}$$

这个条件等价于$B+B^T-A'$的特征值$\leqslant0$，则D_ε存在唯一解u，且满足

$$\|u\|_{\mathbf{H}_0^1}\leqslant\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\|F\|_0\tag{5.5}$$

定理3 如果条件(5.4)满足，则对任何$u\in C^2$，下面估计式成立：

$$\|u\|_{\mathbf{H}_0^1}\leqslant\frac{K}{\sqrt{\varepsilon}}\{\|L_\varepsilon u\|_0+|u(0)|+|u(1)|\}\tag{5.6}$$

$$\|u\|_\infty\leqslant\frac{K}{\sqrt{\varepsilon}}\{\|L_\varepsilon u\|_0+|u(0)|+|u(1)|\}\tag{5.7}$$

其中$K>0$是不依赖于u和ε的常数，

$$\|u\|_\infty=\max_{0\leqslant x\leqslant1}|u(x)|,\quad |u|^2=u_1^2+u_2^2,\quad L_\varepsilon u=\varepsilon u''+A(x)u'+B(x)u$$

[1]给出了如下定理：

定理4 如果对退化问题

$$\left.\begin{aligned}&A(\delta+(1-2\delta)x)u'+B(\delta+(1-2\delta)x)u=0\qquad(0<x<1)\\&u_1(1)=0,\qquad\qquad u_2(0)=0\end{aligned}\right\}\tag{5.8}$$

存在$\delta_0>0$使得仅有零解，则存在$\varepsilon_0>0$，使对任何$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$和$u\in C^2$，下面先验估计成立

$$\|u\|_\infty\leqslant K\{\|L_\varepsilon u\|_0+|u(0)|+|u(1)|\}\tag{5.9}$$

其中K是不依赖于ε的常数。

设

$$\left.\begin{aligned}&U_{KPM}=(U_{KPM}^{(1)},\ U_{KPM}^{(2)})^T\\&U_{KPM}^{(1)}=\sum_{k=0}^{K}\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^k\delta_1^p\delta_2^m\left(v_{kpm}^{(1)}+w_{kpm}^{(1)}\exp\left[-\int_0^x\frac{a_1(t)}{\varepsilon}dt\right]\right.\\&\qquad\left.+\varepsilon z_{kpm}^{(1)}\exp\left[-\int_x^1\frac{a_2(t)}{\varepsilon}dt\right]\right)\\&U_{KPM}^{(2)}=\sum_{k=0}^{K}\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^k\delta_1^p\delta_2^m\left(v_{kpm}^{(2)}+\varepsilon\,w_{kpm}^{(2)}\exp\left[-\int_0^x\frac{a_1(t)}{\varepsilon}dt\right]\right.\\&\qquad\left.+z_{kpm}^{(2)}\exp\left[-\int_x^1\frac{a_2(t)}{\varepsilon}dt\right]\right)\end{aligned}\right\}\tag{5.10}$$

通过计算我们得到

$$L_\varepsilon U_{KPM}=F+\varepsilon^{K+1}\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m R_{Kpm} \tag{5.11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
R_{Kpm}^{(1)} &= v_{Kpm}^{(1)''}+(w_{Kpm}^{(1)''}-b_{12}(x)w_{Kpm}^{(2)})\exp\left[-\int_0^x \frac{a_1(t)}{\varepsilon}dt\right]\\
&\quad+[(1+\varepsilon)z_{Kpm}^{(1)''}+(2a_2(x)+a_1(x))z_{Kpm}^{(1)'}+(b_{11}(x)\\
&\quad+a_2'(x))z_{Kpm}^{(1)}]\exp\left[-\int_x^1 \frac{a_2(t)}{\varepsilon}dt\right]\\
R_{Kpm}^{(2)} &= v_{Kpm}^{(2)''}+[(1+\varepsilon)w_{Kpm}^{(2)''}-(2a_1(x)+a_2(x))w_{Kpm}^{(2)'}\\
&\quad+(b_{22}(x)-a_1'(x))w_{Kpm}^{(2)}]\exp\left[-\int_0^x \frac{a_1(t)}{\varepsilon}dt\right]\\
&\quad+[z_{Kpm}^{(2)''}-b_{21}(x)z_{Kpm}^{(1)}]\exp\left[-\int_x^1 \frac{a_2(t)}{\varepsilon}dt\right]
\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

边值是

$$\left.\begin{aligned}
U_{KPM}^{(1)}(0)&=\alpha_1+\varepsilon^{K+1}\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m z_{Kpm}^{(1)}(0)+\varepsilon\delta_2^{M+1}\sum_{k=0}^{K}\sum_{p=0}^{P}\varepsilon^k\delta_1^p z_{kpM}^{(1)}(0)\\
U_{KPM}^{(2)}(0)&=\alpha_2+\varepsilon^{K+1}\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m w_{Kpm}^{(2)}(0)+\delta_2^{M+1}\sum_{k=0}^{K}\sum_{p=0}^{P}\varepsilon^k\delta_1^p z_{kpM}^{(2)}(0)\\
U_{KPM}^{(1)}(1)&=\beta_1+\delta_1^{P+1}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^k\delta_2^m w_{kPm}^{(1)}(1)+\varepsilon^{K+1}\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m z_{Kpm}^{(1)}(1)\\
U_{KPM}^{(2)}(1)&=\beta_2+\varepsilon^{K+1}\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m w_{Kpm}^{(2)}(1)+\varepsilon\delta_1^{P+1}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^k\delta_2^m w_{kPm}^{(2)}(1)
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

定理5 设$e_{KPM}=u-U_{KPM}$，则存在$C>0$，使得

(1) 当(5.4)满足时

$$\|e_{KPM}\|_{H_0^1}\leqslant\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\{\varepsilon^{K+1}Q_{KPM}+\delta_1^{P+1}r_{KPM}+\delta_2^{M+1}\bar{r}_{KPM}\}$$

$$\|e_{KPM}\|_\infty\leqslant\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\{\varepsilon^{K+1}Q_{KPM}+\delta_1^{P+1}r_{KPM}+\delta_2^{M+1}\bar{r}_{KPM}\}$$

(2) 当定理4条件满足时

$$\|e_{KPM}\|_\infty\leqslant C\{\varepsilon^{K+1}Q_{KPM}+\delta_1^{P+1}r_{KPM}+\delta_2^{M+1}\bar{r}_{KPM}\}$$

其中

$$Q_{KPM}^2=\left\|\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m R_{Kpm}\right\|_0^2+\left|\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m z_{Kpm}^{(1)}(0)\right|^2$$

$$+\left|\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m w_{Kpm}^{(2)}(0)\right|^2+\left|\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m z_{Kpm}^{(1)}(1)\right|^2$$

$$+\left|\sum_{p=0}^{P}\sum_{m=0}^{M}\delta_1^p\delta_2^m w_{Kpm}^{(2)}(1)\right|^2$$

$$r_{KPM}^2=\left|\varepsilon\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^k\delta_2^m w_{kPm}^{(2)}(1)\right|^2+\left|\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^k\delta_2^m w_{kPm}^{(1)}(1)\right|^2$$

$$\bar{r}_{KPM}^2=\left|\varepsilon\sum_{k=0}^{K}\sum_{p=0}^{P}\varepsilon^k\delta_1^p z_{kpM}^{(1)}(0)\right|^2+\left|\sum_{k=0}^{K}\sum_{p=0}^{P}\varepsilon^k\delta_1^p z_{kpM}^{(2)}(0)\right|^2$$

定理5给出了渐近展开的余项估计，其误差界是$O(\varepsilon^{K+1}+\delta_1^{P+1}+\delta_2^{M+1})$。

作者对于朱本仁副教授在本文研究中给予的指教谨表谢意。

参 考 文 献

[1] Abrahamsson, L.R., H.B. Keller and H.O. Kreiss, Difference approximation singular perturbation of system of ODE's, *Numer. Math.*, 22 (1974), 367—391.
[2] 朱本仁，奇异摄动问题的近似解法，应用数学学报，7,3 (1984), 373—384.
[3] 朱本仁，奇异摄动问题的高精度近似方法和数值方法，高等学校计算数学学报，3 (1985).

On Singular Perturbation Boundary-Value Problem of Coupling Type System of Convection-Diffusion Equations

Yang Dan-ping
(*Department of Mathematics, Shandong University, Jinan*)

Abstract

In this paper we consider the singular perturbation boundary-value problem of the following coupling type system of convection-diffusion equations

$$\begin{cases}\varepsilon u_1''+a_1(x)u_1'+b_{11}(x)u_1+b_{12}(x)u_2=f_1(x)\\ \varepsilon u_2''-a_2(x)u_2'+b_{21}(x)u_1+b_{22}(x)u_2=f_2(x) & (0<x<1)\\ u_1(0)=\alpha_1,\ u_1(1)=\beta_1\\ u_2(0)=\alpha_2,\ u_2(1)=\beta_2\end{cases}$$

We advance two methods: the first one is the initial-value solving method, by which the original boundary-value problem is changed into a series of unperturbed initial-value problem of the first order ordinary differential equation or system so that an asymptotic expansion is obtained; the second one is the boundary-value solving method, by which the original problem is changed into a few boundary-value problems having no phenomenon of boundary-layer so that the exact solution can be obtained and any classical numerical methods can be used to obtain the numerical solution of consistant high accuracy with respect to the perturbation parameter ε.