应用数学和力学，第7卷第12期（1986年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

随机定向收缩及其应用*

丁 协 平

（四川师范大学数学系，1984年10月3日收到）

摘 要

作为Altman的定向收缩理论[4,5]和Lee，Padgett的随机收缩理论[1,2]的推广，本文对非线性集值随机算子引入了随机定向收缩概念，利用这一新概念和超限归纳法，我们证明了非线性集值随机算子方程随机解的几个存在性定理．这些定理分别改进和推广了[1,2,4,5,11]中相应的结果．其次，给出了我们的结果对非线性随机积分和微分方程的某些应用．

一、引 言

Lee和Padgett[1,2,3]推广Altman[4,5]的收缩理论，对点值随机算子引入了随机收缩概念。利用此概念他们对点值随机算子方程解的存在、唯一性及其近似获得了若干有用的结果并给出了对积分方程的一些应用。因此随机收缩理论对求解随机方程提供了一非常有用的工具。我们知道随机（算子、积分、微分）方程常常产生于生物、物理、化学、工程和系统科学等应用科学领域[6,7]。因此对研究随机方程提供进一步的工具将是很有意义的。

在[8]中我们定义了点值随机算子组的随机收缩。对点值随机算子方程组解的存在、唯一性及其逼近问题，证明了几个有用的定理，并给出了它们对随机积分和微分方程组的若干应用。

在本文中，作为随机收缩理论的推广，我们将沿Altman[4,5]的思想路线，对集值随机算子引入随机定向收缩这一新概念。利用这一新概念和超限归纳法，对点值和集值随机算子方程的解，我们将证明几个新的存在性定理。这些定理改进和推广了[1,2,4,5,11]中的相应结果。最后给出这些定理对随机积分和微分方程的某些应用。

二、预 备 知 识

令$(\Omega,\ \mathscr{A},\ P)$是一完全概率空间。$(X,\ \mathscr{B})$和$(Y,\ \mathscr{C})$是二可测空间，其中$X$，$Y$是可分Banach空间，$\mathscr{B}$和$\mathscr{C}$分别是$X$和$Y$的子集的$\sigma$-代数。$CB(X)$表$X$的一切非空有界闭子集的族。对任意$x\in X$，$A\subset X$，$D(x,\ A)=\inf\{\|x-a\|:a\in A\}$表$x$到$A$的距离，$H(\cdot,\cdot)$表由$X$的范数在$CB(X)$上诱导的Hausdorff距离。于是$(CB(X),\ H)$也是一可分完备距离空间。

---

* 钱伟长推荐．
中国科学院科学基金资助的课题．

定义2.1 称映射 $x:\Omega\to X$ 为 X-值随机变量，如果对每一 $B\in\mathscr{B}$ 有 $x^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega: x(\omega)\in B\}\in\mathscr{A}$。称映射 $P:\Omega\to CB(X)$ 为 $CB(X)$-值随机变量，如果对每一 $B\in\mathscr{B}$ 有 $P^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:P(\omega)\cap B\neq\phi\}\in\mathscr{A}$。称映射 $x:\Omega\to X$ 是 $CB(X)$-值随机变量 P 的一可测选择，如果 $x(\omega)$ 是一 X-值随机变量且有 $x(\omega)\in P(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$。

定义2.2 称映射 $P:\Omega\times\mathscr{D}(P)\subset\Omega\times X\to CB(Y)$ 为集值随机算子，如果对每一 $x\in\mathscr{D}(P)$，$P(\cdot,x)$ 是一 $CB(Y)$ 值随机变量。称集值随机算子 P 是几乎处处 (a. e.) 连续的，如果 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(P)$，$x_0\in\mathscr{D}(P)$ 和 $x_n\to x_0$ 蕴含 $\{P(\omega,x_n)\}$ 按 $CB(Y)$ 上的Hausdorff距离 H a.e. 收敛于 $P(\omega,x_0)$。称集值随机算子 P 是a. e.闭的，如果 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(P)$，$x_n\to x_0$，$y_n(\omega)\in P(\omega,x_n(\omega))$ 和 $y_n(\omega)\to y(\omega)$ a.e.，蕴含 $x_0\in\mathscr{D}(P)$ 和 $y(\omega)\in P(\omega,x_0)$ a.e.。

定义2.3 称点值随机算子 $\Gamma:\Omega\times\mathscr{D}(\Gamma)\subset\Omega\times Y\to X$ 是 (a) 线性的，如果对一切 y_1, $y_2\in\mathscr{D}(\Gamma)$ 和实数 α，β 有 $\Gamma(\omega,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha\Gamma(\omega,y_1)+\beta\Gamma(\omega,y_2)$ a.e.；(b) 有界的，如果存在非负实值随机变量 $M(\omega)$ 使得对一切 y_1，$y_2\in\mathscr{D}(\Gamma)$ 有 $\|\Gamma(\omega,y_1-y_2)\|\leqslant M(\omega)\|y_1-y_2\|$ a.e.。

令 $L(Y,X)$ 表从 Y 到 X 的一切有界线性算子的集合，则 $L(Y,X)$ 是具有范数

$$\|\Gamma\|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|\Gamma y\|,\ \Gamma\in L(Y,X),\ y\in Y$$

的 Banach 空间。

引理2.1 ([1,2]) 设 $\Gamma:\Omega\times Y\to L(Y,X)$ 是a. e.连续随机算子，则对任意 Y-值随机变量 $z(\omega)$ 和 $y(\omega)$，$\Gamma(\omega,z(\omega))y(\omega)$ 是 X-值随机变量。

引理2.2 ([9]) 设 $P:\Omega\times\mathscr{D}(P)\subset\Omega\times X\to CB(Y)$ 是a. e.连续集值随机算子，则对任意 X-值随机变量 $x(\omega)\in\mathscr{D}(P)$，$P(\omega,x(\omega))$ 是 $CB(Y)$ 值随机变量。

引理2.3 ([9]) 设 $S,T:\Omega\to CB(Y)$ 是 $CB(Y)$-值随机变量，$u:\Omega\to Y$ 是 S 的一可测选择。则对任意实值随机变量 $b:\Omega\to(1,\infty)$ 存在 T 的一可测选择 $v:\Omega\to Y$ 使得

$$\|u(\omega)-v(\omega)\|\leqslant b(\omega)H(S(\omega),T(\omega))$$

引理2.4 ([4]) 设 α 是第一或第二类序数，$\{t_\nu\}_{0\leqslant\nu\leqslant\alpha}$ 是实数的一自然良序序列，如果对第二类序数 β 有 $t_\beta=\lim\limits_{\nu\nearrow\beta}t_\nu$，则

$$t_\alpha=t_0+\sum_{0\leqslant\nu<\alpha}(t_{\nu+1}-t_\nu)$$

引理2.5 ([4]) 设 α 是第一或第二类序数，$\{x_\nu\}_{0\leqslant\nu\leqslant\alpha}$ 是距离空间 (X,d) 内元素的良序序列。如果对第二类序数 β 有 $x_\beta=\lim\limits_{\nu\nearrow\beta}x_\nu$，则

$$d(x_\alpha,x_0)\leqslant\sum_{0\leqslant\nu<\alpha}d(x_{\nu+1},x_\nu)$$

三、随机定向收缩和随机算子方程的解

令 $P:\Omega\times\mathscr{D}(P)\subset\Omega\times X\to CB(Y)$ 是一非线性集值随机算子，$\mathscr{D}(P)$ 是一矢量空间。对每一 $x\in\mathscr{D}(P)$，存在一有界线性随机算子 $\Gamma(\cdot,x):\Omega\times Y\to X$。

定义3.1 假设对每一 $x\in\mathscr{D}(P)$ 和 $y\in Y$ 存在正实值随机变量 $q(\omega)<1$ 和 $\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\leqslant 1$ 使得

$$H(P(\omega,x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y),\ P(\omega,x)+\varepsilon(\omega)y)$$

$$\leqslant\varepsilon(\omega)q(\omega)\max\{\|y\|,\ D(0,\ P(\omega,\ x)),\ D(0,\ P(\omega,x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y))\}\quad \text{a.e.} \tag{3.1}$$

其中 0 是 Banach 空间Y的零元素。

则称$\Gamma(\cdot,\ x)$是P在点 $x\in\mathscr{D}(P)$的一随机定向收缩。

显然随机定向收缩是[5，p.71]中定向收缩概念和[1]中随机收缩概念的改进和推广。

定理3.1 设$P:\Omega\times\mathscr{D}(P)\subset\Omega\times X\to CB(Y)$是一 a.e. 连续和 a.e. 闭非线性集值随机算子，$\mathscr{D}(P)$是一矢量空间，P有随机定向收缩$\Gamma(\cdot,x)$使得对一切 $x\in\mathscr{D}(P)$和$y\in Y$ 有

$$\Gamma(\omega,\ x)y\in\mathscr{D}(P),\ \|\Gamma(\omega,x)\|\leqslant B(\omega)\quad \text{a.e.} \tag{3.2}$$

其中 $B(\omega)$是一正实值随机变量。

则非线性随机集值算子方程

$$0\in P(\omega,\ x) \tag{3.3}$$

在 $\mathscr{D}(P)$内有一随机解。即存在 X-值随机变量$x^*(\omega)$使得$x^*(\omega)\in\mathscr{D}(P)$a.e. 和 $0\in P(\omega,\ x^*(\omega))$ a.e. 其中 0 是 Banach 空间Y的零元素。

证明 设Λ是一切可数序数的集，即Λ是一切小于第一不可数序数的序数的集。现在我们构造非负实值随机变量 $t_\alpha(\omega)$，$\alpha\in\Lambda$，X-值随机变量 $x_\alpha(\omega)$和Y-值随机变量 $y_\alpha(\omega)$ 的良序序列使得对每一 $\alpha\in\Lambda$有 $y_\alpha(\omega)$是 $P(\omega,\ x_\alpha(\omega))$的一可测选择。任选 $x_0\in\mathscr{D}(P)$。令 $t_0(\omega)=0$ 和 $x_0(\omega)=x_0$，$\forall\omega\in\Omega$。由引理2.2 知 $P(\omega,\ x_0(\omega))$是一$CB(Y)$-值随机变量。从[10，定理Ⅲ.30]推得存在 $P(\omega,\ x_0(\omega))$ 的一可测选测 $y_0(\omega)$。即 $y_0(\omega)$ 是一 Y-值随机变量且 $y_0(\omega)\in P(\omega,x_0(\omega))$，$\forall\omega\in\Omega$。

现在假设对一切序数 $\nu<\alpha$，$t_\nu(\omega)$，$x_\nu(\omega)$ 和 $y_\nu(\omega)$已被构造好且满足：

对任意序数 $\nu<\alpha$ 有

$$y_\nu(\omega)\in P(\omega,x_\nu(\omega))\quad 和\quad x_\nu(\omega)\in\mathscr{D}(P)\quad \text{a.e.} \tag{3.4$_\nu$}$$

$$\|y_\nu(\omega)\|\leqslant\exp[-(1-q(\omega))t_\nu(\omega)]\|y_0(\omega)\|\quad \text{a.e.} \tag{3.5$_\nu$}$$

对第一类序数 $\nu+1<\alpha$ 有

$$\|x_{\nu+1}(\omega)-x_\nu(\omega)\|\leqslant B(\omega)\exp[-(1-q(\omega))t_\nu(\omega)](t_{\nu+1}(\omega)-t_\nu(\omega))\|y_0(\omega)\|\quad \text{a.e.} \tag{3.6$_{\nu+1}$}$$

$$\|y_{\nu+1}(\omega)-y_\nu(\omega)\|\leqslant 2(1+q(\omega))\exp[-(1-q(\omega))t_\nu(\omega)](t_{\nu+1}(\omega)-t_\nu(\omega))\|y_0(\omega)\|\quad \text{a.e.} \tag{3.7$_{\nu+1}$}$$

和

$$0<\tau_{\nu+1}(\omega)=t_{\nu+1}(\omega)-t_\nu(\omega)<(1-q(\omega))^{-1}\ln(1-q(\omega))(1-\bar{q}(\omega))^{-1}\quad \text{a.e.} \tag{3.8$_{\nu+1}$}$$

其中 $\bar{q}(\omega)$ 是正实值随机变量使得 $q(\omega)<\bar{q}(\omega)<1$ a.e. 和 $1-q(\omega)<\ln(1-q(\omega))(1-\bar{q}(\omega))^{-1}$ a.e.。

对第二类序数 $\nu<\alpha$ 有

$$t_\nu(\omega)=\lim_{\beta\nearrow\nu}t_\beta(\omega)\ \text{a.e.};\quad x_\nu(\omega)=\lim_{\beta\nearrow\nu}x_\beta(\omega)\quad \text{a.e.}$$

和

$$y_\nu(\omega)=\lim_{\beta\nearrow\nu}y_\beta(\omega)\quad \text{a.e.} \tag{3.9}$$

我们证明下面估计。

对任意序数 $\lambda<\nu<\alpha$，由引理2.4，2.5，(3.6)和(3.8)式推得

$$\|x_\nu(\omega)-x_\lambda(\omega)\|\leqslant\sum_{\lambda\leqslant\beta<\nu}\|x_{\beta+1}(\omega)-x_\beta(\omega)\|$$

$$\leqslant B(\omega)\|y_0(\omega)\|\sum_{\lambda\leqslant\beta<\nu}\exp[-(1-q(\omega))t_\beta(\omega)](t_{\beta+1}(\omega)-t_\beta(\omega))$$

$$\leqslant B(\omega)\|y_0(\omega)\|\sum_{\lambda\leqslant\beta<\nu}\exp[(1-q(\omega))(t_{\beta+1}(\omega)-t_\beta(\omega))]$$

$$\cdot\exp[-(1-q(\omega))t_{\beta+1}(\omega)](t_{\beta+1}(\omega)-t_\beta(\omega))$$

$$\leqslant B(\omega)\|y_0(\omega)\|(1-q(\omega))(1-\bar{q}(\omega))^{-1}$$

$$\cdot\sum_{\lambda\leqslant\beta<\nu}\exp[-(1-q(\omega))t_{\beta+1}(\omega)](t_{\beta+1}(\omega)-t_\beta(\omega))$$

$$\leqslant(1-q(\omega))(1-\bar{q}(\omega))^{-1}B(\omega)\|y_0(\omega)\|$$

$$\cdot\sum_{\lambda\leqslant\beta<\nu}\int_{t_\beta(\omega)}^{t_{\beta+1}(\omega)}\exp[-(1-q(\omega))t]dt$$

$$\leqslant(1-q(\omega))(1-\bar{q}(\omega))^{-1}B(\omega)\|y_0(\omega)\|\int_{t_\lambda(\omega)}^{t_\nu(\omega)}\exp[-(1-q(\omega))t]dt \tag{3.10}$$

同理，由引理2.4，2.5，(3.7)和(3.8)式可得

$$\|y_\nu(\omega)-y_\lambda(\omega)\|\leqslant2[1-(q(\omega))^2](1-\bar{q}(\omega))^{-1}\|y_0(\omega)\|$$

$$\cdot\int_{t_\lambda(\omega)}^{t_\nu(\omega)}\exp[-(1-q(\omega))t]dt\quad \text{a.e.} \tag{3.11}$$

假设 α 是第一类序数，如果 $0\in P(\omega,\ x_{\alpha-1}(\omega))$ a.e.，则定理已得证。如果 $0\notin P(\omega,\ x_{\alpha-1}(\omega))$ a.e.。因 $P(\omega,\ x_{\alpha-1}(\omega))$ 是 $CB(Y)$-值随机变量，由[10，定理Ⅲ.30]知存在 $P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))$的一可测选择 $y_{\alpha-1}(\omega)$。因此由定理假设存在 $\varepsilon(\omega)\leqslant1$使(3.1)式对$x=x_{\alpha-1}(\omega)$ 和 $y=-y_{\alpha-1}(\omega)$ 成立。令 $t_\alpha(\omega)=t_{\alpha-1}(\omega)+\varepsilon(\omega)$ 和 令 $\tau_\alpha(\omega)=\varepsilon(\omega)=t_\alpha(\omega)-t_{\alpha-1}(\omega)$，则 $\tau_\alpha(\omega)$满足(3.8_α)。

定义

$$x_\alpha(\omega)=x_{\alpha-1}(\omega)-\tau_\alpha(\omega)\Gamma(\omega,\ x_{\alpha-1}(\omega))y_{\alpha-1}(\omega)\in\mathscr{D}(P) \tag{3.12}$$

在(3.1)式中用$x_{\alpha-1}(\omega)$代替x和用$-y_{\alpha-1}(\omega)$代替y则得

$$H(P(\omega,x_\alpha(\omega)),\ P(\omega,\ x_{\alpha-1}(\omega))-\tau_\alpha(\omega)y_{\alpha-1}(\omega))$$

$$\leqslant\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\max\{\|y_{\alpha-1}(\omega)\|,\ D(0,\ P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))),D(0,P(\omega,x_\alpha(\omega)))\}$$

$$\leqslant\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\max\{\|y_{\alpha-1}(\omega)\|,D(0,P(\omega,x_\alpha(\omega)))\}\ \text{a.e.} \tag{3.13}$$

由 $q(\omega)$和$\tau_\alpha(\omega)$的假设有

$$1-\tau_\alpha(\omega)(1-q(\omega))<\exp[-(1-q(\omega))\tau_\alpha(\omega)],\qquad\forall\omega\in\Omega$$

和 $0<q(\omega)<1$，从而有$q(\omega)^{-1}>1$，$\forall\omega\in\Omega$ 和

$$\exp[-(1-q(\omega))\tau_\alpha(\omega)][1-\tau_\alpha(\omega)(1-q(\omega))]^{-1}>1,\qquad\forall\omega\in\Omega$$

于是我们能选取一实值随机变量 $b(\omega)$满足

$$1<b(\omega)<\min\{\exp[-(1-q(\omega))\tau_\alpha(\omega)][1-\tau_\alpha(\omega)(1-q(\omega))]^{-1},\ q(\omega)^{-1}\} \tag{3.14}$$

由引理2.3知存在 $P(\omega,x_\alpha(\omega))$的一可测选择 $y_\alpha(\omega)$使得

$$\|y_\alpha(\omega)-(1-\tau_\alpha(\omega))y_{\alpha-1}(\omega)\|\leqslant b(\omega)H(P(\omega,x_\alpha(\omega)),P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))$$

$$-\tau_\alpha(\omega)y_{\alpha-1}(\omega)) \tag{3.15}$$

由(3.13)和(3.15)推得

$$\|y_\alpha(\omega)-(1-\tau_\alpha(\omega))y_{\alpha-1}(\omega)\|\leqslant b(\omega)\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\max\{\|y_{\alpha-1}(\omega)\|,\|y_\alpha(\omega)\|\}\quad \text{a.e.}\tag{3.16}$$

从而有

$$\|y_\alpha(\omega)\|\leqslant(1-\tau_\alpha(\omega))\|y_{\alpha-1}(\omega)\|+b(\omega)\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\max\{\|y_{\alpha-1}(\omega)\|,\|y_\alpha(\omega)\|\}\quad \text{a.e.}\tag{3.17}$$

如果存在 $\Omega_0\subset\Omega$, $P(\Omega_0)>0$, 使得$\|y_\alpha(\omega)\|>\|y_{\alpha-1}(\omega)\|$, $\forall\omega\in\Omega_0$则由(3.17)和(3.14)有

$$\begin{aligned}\|y_\alpha(\omega)\|&\leqslant(1-\tau_\alpha(\omega))\|y_\alpha(\omega)\|+b(\omega)\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\|y_\alpha(\omega)\|\\&\leqslant[1-\tau_\alpha(\omega)(1-b(\omega)q(\omega))]\|y_\alpha(\omega)\|\\&<\|y_\alpha(\omega)\|,\qquad \forall\omega\in\Omega_0\end{aligned}$$

矛盾。因此有

$$\|y_\alpha(\omega)\|\leqslant\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\quad \text{a.e.}\tag{3.18}$$

于是由(3.17), (3.18), (3.5)和(3.14)容易推得

$$\begin{aligned}\|y_\alpha(\omega)\|&\leqslant[1-\tau_\alpha(\omega)(1-b(\omega)q(\omega))]\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\\&\leqslant[1-\tau_\alpha(\omega)(1-b(\omega)q(\omega))]\exp[-(1-q(\omega))t_{\alpha-1}(\omega)]\|y_0(\omega)\|\\&\leqslant[1-\tau_\alpha(\omega)(1-b(\omega)q(\omega))]\exp[(1-q(\omega))\tau_\alpha(\omega)]\\&\quad\cdot\exp[-(1-q(\omega))t_\alpha(\omega)]\|y_0(\omega)\|\\&<\exp[-(1-q(\omega))t_\alpha(\omega)]\|y_0(\omega)\|\quad \text{a.e.}\end{aligned}$$

又由(3.16), (3.18), (3.5)和(3.14)有

$$\begin{aligned}\|y_\alpha(\omega)-y_{\alpha-1}(\omega)\|&\leqslant\tau_\alpha(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|+b(\omega)\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\\&\leqslant(1+b(\omega)q(\omega))\tau_\alpha(\omega)\exp[-(1-q(\omega))t_{\alpha-1}(\omega)]\|y_0(\omega)\|\\&<2(1+q(\omega))\exp[-(1-q(\omega))t_{\alpha-1}(\omega)]\\&\quad\cdot(t_\alpha(\omega)-t_{\alpha-1}(\omega))\|y_0(\omega)\|\quad \text{a.e.}\end{aligned}$$

再由(3.12), (3.2), (3.5)有

$$\begin{aligned}\|x_\alpha(\omega)-x_{\alpha-1}(\omega)\|&\leqslant\tau_\alpha(\omega)\|\Gamma(\omega,\ x_{\alpha-1}(\omega))\|\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\\&\leqslant B(\omega)\exp[-(1-q(\omega))t_{\alpha-1}(\omega)](t_\alpha(\omega)-t_{\alpha-1}(\omega))\|y_0(\omega)\|\quad \text{a.e.}\end{aligned}$$

因此对第一类序数 α 有(3.4_α), (3.5_α), (3.6_α), (3.7_α)和(3.8_α)成立。

现在设 α 是第二类序数和令 $t_\alpha(\omega)=\lim\limits_{\nu\nearrow\alpha}t_\nu(\omega)$。令$\{\nu_n\}$是一收敛于$\alpha$的增序列。由(3.10)和(3.11)分别推得 $\{x_{\nu_n}(\omega)\}$和$\{y_{\nu_n}(\omega)\}$ a.e. 是一Cauchy序列，从而$\{x_\nu(\omega)\}$和$\{y_\nu(\omega)\}$也a.e.是一Cauchy序列。令$x_\alpha(\omega)=\lim\limits_{\nu\nearrow\alpha}x_\nu(\omega)$ a.e. 和 $y_\alpha(\omega)=\lim\limits_{\nu\nearrow\alpha}y_\nu(\omega)$ a.e.。因为P是一a.e.闭值集随机算子故有$x_\alpha(\omega)\in\mathscr{D}(P)$ a.e. 和$y_\alpha(\omega)\in P(\omega,\ x_\alpha(\omega))$ a.e.，且$y_\alpha(\omega)$是Y-值随机变量。因为$y_\nu(\omega)$满足(3.5_ν)从而也有$y_\alpha(\omega)$满足(3.5_α)。如果$t_\alpha(\omega)=+\infty$ a.e. 此构造程序将终止，其中α为第二类序数。此时(3.5_α)产生$y_\alpha(\omega)=0$ a.e.从而得到$0\in P(\omega,\ x_\alpha(\omega))$ a.e.。由引理2.1和(3.12)知$\{x_\nu(\omega)\}$是X-值随机变量。因此作为随机变量序列的极限$x_\alpha(\omega)$也是X-值随机变量。所以$x_\alpha(\omega)$是非线性随机集值算子方程(3.3)的一随机解。

定理证毕。

注3.1 如果$\mathscr{D}(P)$是一闭矢量空间，则P的a.e.闭性可去掉.由P的a.e.连续性推得结论成立.

系3.1 设$P:\Omega\times\mathscr{D}(P)\subset\Omega\times X\to Y$是一a.e.连续和a.e.闭点值随机算子，$\mathscr{D}(P)$是一矢量空间。对每一$x\in\mathscr{D}(P)$，存在有界线性随机算子$\Gamma(\cdot,\ x):\Omega\times Y\to X$使得对$y\in Y$存在正实值随机变量$q(\omega)<1$和$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\leqslant1$满足

(i) $\Gamma(\omega,\ x)Y\subset\mathscr{D}(P)$, $\|\Gamma(\omega,\ x)\|\leqslant B(\omega)$ a.e.

其中$B(\omega)$为正实值随机变量。

(ii) $\|P(\omega,\ x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y)-P(\omega,x)-\varepsilon(\omega)y\|$

$\leqslant\varepsilon(\omega)q(\omega)\max\{\|y\|,\ \|P(\omega,\ x)\|,\ \|P(\omega,\ x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y)\|\}$ a.e.

则存在X-值随机变量$x^*(\omega)\in\mathscr{D}(P)$ a. e. 满足

$$0=P(\omega,x^*(\omega))\quad \text{a.e.}$$

即$x^*(\omega)$是随机方程$P(\omega,\ x)=0$的一随机解。

证明 当定理3.1中P为点值算子时即得本系结论。

注3.2 在系3.1中当$\varepsilon(\omega,\ x,\ y)\equiv1$时，我们得到[1]中相应结果的改进和推广.

定理3.2 设$P:\Omega\times\mathscr{D}(P)\subset\Omega\times X\to CB,Y)$是一a.e.连续和a. e.闭集值随机算子，$\mathscr{D}(P)$是一矢量空间，假设$u(\omega)$是任意给定的$Y$-值随机变量和对每一$x\in\mathscr{D}(P)$存在一有界线性随机算子$\Gamma(\cdot,\ x):\Omega\times Y\to\mathscr{D}(P)$使得对$y\in Y$存在正实值随机变量$q(\omega)<1$和$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\leqslant1$满足

(i) $\|\Gamma(\omega,\ x)\|\leqslant B(\omega)$ a. e.

其中$B(\omega)$为正实值随机变量。

(ii) $H(P(\omega,\ x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,\ x)y),\ P(\omega,\ x)+\varepsilon(\omega)y)$

$\leqslant\varepsilon(\omega)q(\omega)\max\{\|y\|,\ D(u(\omega),\ P(\omega,\ x)),D(u(\omega),$

$P(\omega,\ x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,\ x)y))\}$ a.e.

则非线性集值随机算子方程

$$u(\omega)\in P(\omega,\ x)$$

有一随机解。即存在X-值随机变量$x^*(\omega)\in\mathscr{D}(P)$ a.e.满足$u(\omega)\in P(\omega,\ x^*(\omega))$ a.e..

证明 令$\hat{P}(\omega,\ x)=P(\omega,\ x)-u(\omega)$。容易验证$\hat{P}$满足定理3.1内一切假设，从而由定理3.1知存在$X$-值随机变量$x^*(\omega)\in\mathscr{D}(P)$ a.e.使得

$$0\in\hat{P}(\omega,\ x^*(\omega))=\hat{P}(\omega,\ x^*(\omega))-u(\omega)\quad \text{a.e.}$$

即得$u(\omega)\in P(\omega,\ x^*(\omega))$ a.e..

注3.3 定理3.2是[5, p.71]的定理3.1的改进并推广到集值随机算子的情形。在定理3.2中当P为点值随机算子时，相应结果也成立。我们不再陈述。

下面我们给出非线性集值算子方程解的局部存在性定理。

令X_0是Banach空间X的一矢量子空间。对某给定$x_0\in X_0$和正实数r，令$S=S(x_0,r)=\{x\in X:\|x-x_0\|<r\}$和$U=X_0\cap\bar{S}$，其中$\bar{S}$是$S$的闭包。

定理3.3 设$P:\Omega\times U\to CB(Y)$是一a. e. 连续和a. e. 闭集值随机算子，对每一$x\in U_0=X_0\cap S$存在有界线性随机算子$\Gamma(\cdot,x):\Omega\times Y\to X$使得对$y\in Y$存在正实值随机变量$q(\omega)<1$和$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\leqslant1$满足：

(i) $\|\Gamma(\omega,x)\|\leqslant B(\omega)$ a.e., $\forall x\in U_0$

其中$B(\omega)$为正实值随机变量。

(ii) $H(P(\omega,x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y),P(\omega,x)+\varepsilon(\omega)y)$

$\leqslant\varepsilon(\omega)q(\omega)\max\{\|y\|,D(0,P(\omega,x)),D(0,P(\omega,x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y))\}$ a.e.

(iii) $B(\omega)(1-\bar{q}(\omega))^{-1}\|y_0(\omega)\|\leqslant r$ a.e.

其中$y_0(\omega)$是$P(\omega,x_0)$的一可测选择，$q(\omega)<\bar{q}(\omega)<1$ a.e.和

$$1-q(\omega)<\ln(1-q(\omega))(1-\bar{q}(\omega))^{-1}$$

则非线性随机集值算子方程$0\in P(\omega,x)$在U内有一随机解。

证明 利用定理3.1中相同的证明方法，我们构造实值随机变量$t_\alpha(\omega),\alpha\in\Lambda$，$X$-值随机变量$x_\alpha(\omega)\in U_0$和$Y$-值随机变量$y_\alpha(\omega)$的良序序列，且有$t_0(\omega)=0$和$y_0(\omega)$是$P(\omega,x_0)$的一可测选择，使得对一切序数$\nu<\alpha$，有$(3.4_\nu)$和$(3.5_\nu)$成立；对第一类序数$\nu+1<\alpha$有$(3.6_{\nu+1})$～$(3.8_{\nu+1})$成立。用定理3.1证明中同样的论证，可证得对任意$\lambda<\nu<\alpha$有(3.10)成立。因此对任意$\nu<\alpha$有

$$\|x_\nu(\omega)-x_0\|<(1-q(\omega))(1-\bar{q}(\omega))^{-1}B(\omega)\|y_0(\omega)\|\int_0^{t_\nu(\omega)}\exp[-(1-q(\omega))t]dt$$

$$\leqslant B(\omega)(1-\bar{q}(\omega))^{-1}\|y_0(\omega)\|\leqslant r \quad \text{a.e.}$$

因此所有的$x_\nu(\omega)\in U_0$ a.e. 余下的证明与定理3.1的证明相同。

定理3.4 设$P:\Omega\times U\to CB(Y)$是一 a.e. 连续和 a.e. 闭集值随机算子。假设$u(\omega)$是任意给定的Y-值随机变量和对每一$x\in U_0=X_0\cap S$存在一有界线性随机算子$\Gamma(\cdot,x):\Omega\times Y\to X$使得对$y\in Y$存在正实值随机变量$q(\omega)<1$和$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\leqslant 1$满足：

(i) $\|\Gamma(\omega,x)\|\leqslant B(\omega)$ a.e.，$\forall x\in U_0$

其中$B(\omega)$为正实值随机变量，

(ii) $$H(P(\omega,x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y),\ P(\omega,x)+\varepsilon(\omega)y)$$
$$\leqslant\varepsilon(\omega)q(\omega)\max\{\|y\|,\ D(u(\omega),\ P(\omega,x)),\ D(u(\omega),\ P(\omega,x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y))\} \quad \text{a.e.}$$

(iii) $B(\omega)(1-\bar{q}(\omega))^{-1}\|y_0(\omega)\|\leqslant r$ a.e.

其中$y_0(\omega)$是$P(\omega,x_0)-u(\omega)$的一可测选择，

$$q(\omega)<\bar{q}(\omega)<1 \text{ 和 } (1-q(\omega))<\ln(1-q(\omega))(1-\bar{q}(\omega))^{-1}$$

则非线性随机集值算子方程$u(\omega)\in P(\omega,x)$在U内有一随机解，即存在X-值随机变量$x^*(\omega)\in U$ a.e. 使得$u(\omega)\in P(\omega,x^*(\omega))$ a.e.。

证明 令$\hat{P}(\omega,x)=P(\omega,x)-u(\omega)$，利用定理3.3可得本定理结论。

注3.4 在定理3.3和3.4中当P为点值随机算子时，相应结论也成立。因此定理3.4是[5,p.83]的定理6.1改进并推广到随机集值算子方程的情形。

定理3.5 设$P:\Omega\times U\to CB(Y)$是一a.e.连续和a.e.闭集值随机算子，对每一$x\in U_0=X_0\cap S$存在一有界线性随机算子$\Gamma(\cdot,x):\Omega\times Y\to X$使得对$y\in Y$存在正实值随机变量$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\leqslant 1$满足：

(i) $\|\Gamma(\omega,x)\|\leqslant B(\omega)$ a.e.，$\forall x\in U_0$

其中$B(\omega)$为正实值随机变量。

(ii) $$H(P(\omega,x+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y),P(\omega,x)+\varepsilon(\omega)y)$$
$$\leqslant\varepsilon(\omega)[a(\omega)\|y\|^2+b(\omega)\|y\|] \quad \text{a.e.} \tag{3.19}$$

其中$a(\omega)$和$b(\omega)$是实值随机变量使得$a(\omega)>0$ a.e.，$b(\omega)\geqslant 0$ a.e.，$0<q(\omega)=a(\omega)\cdot\|y_0(\omega)\|+b(\omega)<1$ a.e.和$y_0(\omega)$是$P(\omega,x_0)$的一可测选择。

(iii) $B(\omega)(1-\bar{q}(\omega))^{-1}\|y_0(\omega)\|\leqslant r$ a.e.

其中$\bar{q}(\omega)$是一实值随机变量使得$q(\omega)<\bar{q}(\omega)<1$ a.e. 和$(1-q(\omega))<\ln(1-q(\omega))\cdot(1-\bar{q}(\omega))^{-1}$。

则随机集值算子方程$0\in P(\omega,x)$在U内有一随机解。

证明 利用类似于定理3.1的证明，我们构造实值随机变量$t_\alpha(\omega)$，$\alpha\in\Lambda$，X-值随机变

量$x_\alpha(\omega)\in U_0$和Y-值随机变量$y_\alpha(\omega)$的良序序列使得$y_\alpha(\omega)$是$P(\omega,x_\alpha(\omega))$的一可测选择。令$t_0(\omega)=0$，$x_0(\omega)=x_0$，$y_0(\omega)$是$P(\omega,x_0)$的可测选择。同样假设对一切序数$\nu<\alpha$，$t_\nu(\omega)$，$x_\nu(\omega)$和$y_\nu(\omega)$已构造好且满足：

对任意序数$\nu<\alpha$，(3.4_ν)和(3.5_ν)成立；

对第一类序数$\nu+1<\alpha$，$(3.6_{\nu+1})\sim(3.8_{\nu+1})$成立。

对第二类序数$\nu<\alpha$，(3.9)成立。

于是用同样的论证可证得(3.10)和(3.11)成立。

现在假设 α 是第一类序数，如果 $0\in P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))$ a.e. 则显然定理结论成立。如果$0\notin P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))$，则由定理假设知存在$\varepsilon(\omega)\leqslant 1$使得条件 (ii) 内不等式对 $x=x_{\alpha-1}(\omega)$ 和 $y=-y_{\alpha-1}(\omega)$成立。令$t_\alpha(\omega)=t_{\alpha-1}(\omega)+\varepsilon(\omega)$和令$\tau_\alpha(\omega)=\varepsilon(\omega)=t_\alpha(\omega)-t_{\alpha-1}(\omega)$则$\tau_\alpha(\omega)$满足$(3.8_\alpha)$。

定义

$$x_\alpha(\omega)=x_{\alpha-1}(\omega)-\tau_\alpha(\omega)\Gamma(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))y_{\alpha-1}(\omega)$$

在(3.19)中用$x_{\alpha-1}(\omega)$代替x和用$-y_{\alpha-1}(\omega)$代替y则得

$$\begin{aligned}&H(P(\omega,x_\alpha(\omega)),\ P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))-\tau_\alpha(\omega)y_{\alpha-1}(\omega))\\&\quad\leqslant\tau_\alpha(\omega)[a(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|^2+b(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|]\\&\quad=\tau_\alpha(\omega)[a(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|+b(\omega)]\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\quad\text{a.e.}\end{aligned}$$

注意到$(3.5_{\alpha-1})$蕴含$\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\leqslant\|y_0(\omega)\|$ a.e.，因此有

$$a(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|+b(\omega)\leqslant a(\omega)\|y_0(\omega)\|+b(\omega)=q(\omega)<1\quad\text{a.e.}$$

从而得到

$$\begin{aligned}&H(P(\omega,x_\alpha(\omega)),\ P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))-\tau_\alpha(\omega)y_{\alpha-1}(\omega))\\&\quad\leqslant\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\quad\text{a.e.}\end{aligned}$$

因为$(1-\tau_\alpha(\omega))y_{\alpha-1}(\omega)$是$P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))-\tau_\alpha(\omega)y_{\alpha-1}(\omega)$的一可测选择。当选取实值随机变量$c(\omega)$满足

$$1<c(\omega)<\min\{\exp[-(1-q(\omega))\tau_\alpha(\omega)][1-\tau_\alpha(\omega)(1-q(\omega))]^{-1},\ q(\omega)^{-1}\}$$

时，由引理2.3知存在$P(\omega,x_\alpha(\omega))$的一可测选测$y_\alpha(\omega)$使得

$$\begin{aligned}&\|y_\alpha(\omega)-(1-\tau_\alpha(\omega))y_{\alpha-1}(\omega)\|\leqslant c(\omega)H(P(\omega,x_\alpha(\omega)),\ P(\omega,x_{\alpha-1}(\omega))\\&\qquad-\tau_\alpha(\omega)y_{\alpha-1}(\omega))\leqslant c(\omega)\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\quad\text{a.e.}\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}&\|y_\alpha(\omega)\|\leqslant(1-\tau_\alpha(\omega))\|y_{\alpha-1}(\omega)\|+c(\omega)\tau_\alpha(\omega)q(\omega)\|y_{\alpha-1}(\omega)\|\\&\quad\leqslant[1-\tau_\alpha(\omega)(1-c(\omega)q(\omega))]\exp[-(1-q(\omega))t_{\alpha-1}(\omega)]\|y_0(\omega)\|\\&\quad\leqslant[1-\tau_\alpha(\omega)(1-c(\omega)q(\omega))]\exp[(1-q(\omega))\tau_\alpha(\omega)]\\&\qquad\cdot\exp[-(1-q(\omega))t_\alpha(\omega)]\|y_0(\omega)\|\\&\quad<\exp[-(1-q(\omega))t_\alpha(\omega)]\|y_0(\omega)\|\quad\text{a.e.}\end{aligned}$$

同样仿定理3.1的证明可证得

$$\begin{aligned}\|y_\alpha(\omega)-y_{\alpha-1}(\omega)\|&\leqslant2(1+q(\omega))\exp[-(1-q(\omega))t_{\alpha-1}(\omega)]\\&\quad\cdot(t_\alpha(\omega)-t_{\alpha-1}(\omega))\|y_0(\omega)\|\quad\text{a.e.}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\|x_\alpha(\omega)-x_{\alpha-1}(\omega)\|&\leqslant B(\omega)\exp[-(1-q(\omega))t_{\alpha-1}(\omega)]\\&\quad\cdot(t_\alpha(\omega)-t_{\alpha-1}(\omega))\|y_0(\omega)\|\quad\text{a.e.}\end{aligned}$$

利用假设(iii)和(3.10)，仿定理3.3的证明，可证得对任意序数ν，一切$x_\nu(\omega)\in U_0$ a.e.. 余下的证明与定理3.1的证明相同。因此存在X-值随机变量$x^*(\omega)\in U$ a.e. 使得$0\in P(\omega, x^*(\omega))$。即$x^*(\omega)$是随机方程$0\in P(\omega,x)$在$U$内的一随机解。

注3.5 如果在定理3.5中令$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\equiv 1$，$\forall\omega\in\Omega$，$x\in U$，$y\in Y$，作为特殊情形，我们得到[2]的定理4.1的集值推广。

定理3.6 设$P:\Omega\times U\to CB(Y)$是一a.e.连续和a.e.闭集值随机算子，对每一$x\in U_0=X_0\cap S$存在一有界线性随机算子$\Gamma(\cdot,x):\Omega\times Y\to X$使得对$y\in Y$存在正实值随机变量$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\leqslant 1$满足定理3.5中的条件(i)、(ii)和(iii)。则对任意给定的Y-值随机变量$u(\omega)$，随机方程$u(\omega)\in P(\omega,x)$在U内有一随机解$x^*(\omega)$。即存在X-值随机变量$x^*(\omega)\in U$ a.e. 满足$u(\omega)\in P(\omega,x^*(\omega))$ a.e.。

证明 令$\hat{P}(\omega,x)=P(\omega,x)-u(\omega)$。容易验证$\hat{P}$满足定理3.5的一切假设。因此存在$X$-值随机变量$x^*(\omega)\in U$ a.e.使得$0\in\hat{P}(\omega,x^*(\omega))=P(\omega,x^*(\omega))-u(\omega)$从而$u(\omega)\in P(\omega,x^*(\omega))$ a.e.。

下面我们利用定理3.1证明一不动点定理。

定理3.7 令$F:\Omega\times\mathscr{D}(F)\subset\Omega\times X\to CB(X)$是一a.e.连续和a.e.闭集值随机算子，$\mathscr{D}(F)$是一矢量空间。假设对每一$x\in\mathscr{D}(F)$存在有界线性随机算子$\Gamma(\cdot,x):\Omega\times X\to X$使得对$y\in X$存在正实值随机变量$q(\omega)<1$和$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\leqslant 1$满足

(i) $\|\Gamma(\omega,x)\|\leqslant B(\omega)$ a.e.，$\forall x\in\mathscr{D}(F)$

(ii) $$H(F(\omega,x+\varepsilon(\omega)(y+\Gamma(\omega,x)y)),\ F(\omega,x)+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y)$$
$$\leqslant\varepsilon(\omega)q(\omega)\max\{\|y\|,\ D(x,F(\omega,x)),\ D(x+\varepsilon(\omega)(y+\Gamma(\omega,x)y),\ F(\omega,x+\varepsilon(\omega)(y+\Gamma(\omega,x)y)))\}\quad\text{a.e.}$$

则F在$\mathscr{D}(F)$内有一随机不动点。即存在X-值随机变量$x^*(\omega)\in\mathscr{D}(F)$ a.e. 使得$x^*(\omega)\in F(\omega,x^*(\omega))$ a.e.。

证明 令$P(\omega,x)=x-F(\omega,x)$，$X=Y$由假设(ii)有

$$\begin{aligned}&H(P(\omega,x+\varepsilon(\omega)(y+\Gamma(\omega,x)y)),\ P(\omega,x)+\varepsilon(\omega)y)\\&=H(x+\varepsilon(\omega)(y+\Gamma(\omega,x)y)-F(\omega,x+\varepsilon(\omega)(y+\Gamma(\omega,x)y)),\\&\quad x-F(\omega,x)+\varepsilon(\omega)y)\\&=H(F(\omega,x+\varepsilon(\omega)(y+\Gamma(\omega,x)y)),\ F(\omega,x)+\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,x)y)\\&\leqslant\varepsilon(\omega)q(\omega)\max\{\|y\|,\ D(0,P(\omega,x)),\ D(0,P(\omega,x+\varepsilon(\omega)(y+\Gamma(\omega,x)y)))\}\\&\qquad\qquad\text{a.e.}\end{aligned}$$

由具有$X=Y$和有界随机定向收缩$I+\Gamma(\omega,x)$，$\forall x\in\mathscr{D}(F)$的定理3.1，存在一$X$-值随机变量$x^*(\omega)\in\mathscr{D}(F)$，a.e. 使得$0\in P(\omega,x^*(\omega))=x^*(\omega)-F(\omega,x^*(\omega))$ a.e.。因此$x^*(\omega)\in F(\omega,x(\omega))$ a.e.。

注3.6 定理3.7是[5,p.78]的定理4.1改进并推广到随机集值映射的情形。显然，当$\mathscr{D}(F)=X$，$\Gamma(\omega,x)\equiv 0$，和$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x,y)\equiv 1$时，定理3.7也是Itoh[11]定理的推广。

四、对随机积分和微分方程的应用

在本节中我们将给出具有P为点值随机算子的定理3.7对随机积分和微分方程的应用。

令$(X,\ \|\cdot\|)$是可分Banach空间和令

$$C_J(X)=\{x:J\to X \mid x\text{连续},\ \|x(t)\|_J=\max_{t\in J}\|x(t)\|\}$$

其中$J=[0,T]\subseteq\mathbf{R}$. 则$(C_J(X)\|\cdot\|_J)$也是一可分Banach空间。

引理4.1([8,9]) 令 $x:\Omega\times J\to X$ 使得对每一 $\omega\in\Omega$, $x(\omega,\cdot)$ 连续和对每一$t\in J$, $x(\cdot,t)$是X-值随机变量。则$x(\omega,t)$是一$C_J(X)$-值随机变量。

引理4.2 令$\Gamma(\cdot,t,x):\Omega\times X\to X$, $\forall(t,x)\in J\times X$是有界线性随机算子且$\Gamma$关于$(t,x)$在算子范数意义下是连续的，则对任意$C_J(X)$-值随机变量$z(\omega,s)$和$x(\omega,s)$,

$$\int_0^t \Gamma(\omega,s,z(\omega,s))x(\omega,s)ds$$

也是一$C_J(X)$-值随机变量。

证明 引理4.2是[8]中引理4.2的一轻微变型。证明方法相同。故略去。

引理4.3 设$f:\Omega\times J\times J\times X\to X$使得对每一$\omega\in\Omega$, $f(\omega,\cdot,\cdot,\cdot)$连续和对每一$(t,s,x)\in J\times J\times X$, $f(\cdot,t,s,x)$是一X-值随机变量。则对任意$C_J(X)$-值随机变量$x(\omega,s)$,

$$\int_0^t f(\omega,t,s,x(\omega,s))ds$$

也是一$C_J(X)$-值随机变量。

证明 引理4.3是[8]中引理4.3的特例。

令$z(\omega,t)$是任意给定的$C_J(X)$-值随机变量，下面我们考虑非线性随机Volterra积分方程

$$x(\omega,t)=z(\omega,t)+\int_0^t f(\omega,t,s,x(\omega,s))ds \tag{4.1}$$

引理4.4 设$f:\Omega\times J\times J\times X\to X$使得对每一$\omega\in\Omega$, $f(\omega,\cdot,\cdot,\cdot)$一致连续和对每一$(t,s,x)\in J\times J\times X$, $f(\cdot,t,s,x)$是X-值随机变量，$z(\omega,t)$是给定的$C_J(X)$-值随机变量，则由下式定义的积分算子$F:\Omega\times C_J(X)\to C_J(X)$:

$$F(\omega,x(\omega,t))=z(\omega,t)+\int_0^t f(\omega,t,s,x(\omega,s))ds \tag{4.2}$$

是连续随机算子。

证明 引理4.4是[9]中引理5.3的特例。

定理4.1 设$f:\Omega\times J\times J\times X\to X$满足引理4.4的假设和有界线性随机算子$\Gamma(\cdot,t,x):\Omega\times X\to X$, $\forall(t,x)\in J\times X$满足引理4.2内假设使得:

(i) 对一切$x(\omega,t),y(\omega,t)\in C_J(X)$存在正实值随机变量$K(\omega)$和$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x(\omega,t),y(\omega,t))\leqslant 1$使得对一切$\omega\in\Omega$

$$\begin{aligned}\max_{t,s\in J}\|&f(\omega,t,s,x(\omega,s)+\varepsilon(\omega)(y(\omega,s)+\int_0^s\Gamma(\omega,\tau,x(\omega,\tau))y(\omega,\tau)d\tau))\\ &-f(\omega,t,s,x(\omega,s))-\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)\|\\ &\leqslant\varepsilon(\omega)K(\omega)\max\{\|y(\omega,t)\|_J,\|F(\omega,x(\omega,t))\|_J,\ \|F(\omega,x(\omega,t)\\ &\quad+\varepsilon(\omega)(y(\omega,t)+\int_0^t\Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)ds))\|_J\},\quad\forall\omega\in\Omega\end{aligned} \tag{4.3}$$

(ii) 对一切$t\in J$, $x(\omega,t)\in C_J(X)$

$$\|\Gamma(\omega,t,x(\omega,t))\|\leqslant B(\omega),\quad\forall\omega\in\Omega$$

其中$B(\omega)$是正实值随机变量。

(iii) $TK(\omega)=q(\omega)<1,\quad\forall\omega\in\Omega$

则非线性 Volterra 随机积分方程 (4.1) 有一随机解，即存在一 $C_J(X)$-值随机变量 $x^*(\omega,t)$满足

$$x^*(\omega,t)=z(\omega,t)+\int_0^t f(\omega,t,s,x^*(\omega,s))ds$$

证明 由(4.2)式定义连续随机算子 $F:\Omega\times C_J(X)\to C_J(X)$。由 (4.3) 式推得对一切 $x(\omega,t)$, $y(\omega,t)\in C_J(X)$有

$$\begin{aligned}&\|F(\omega, x(\omega,t)+\varepsilon(\omega)(y(\omega, t)+\int_0^t \Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)ds))-F(\omega,x(\omega,t))\\&\quad-\varepsilon(\omega)\int_0^t \Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)ds\|_J\leqslant\int_0^t \max_{t,s\in J}\|f(\omega,t,s,x(\omega,s)\\&\quad+\varepsilon(\omega)(y(\omega,s)+\int_0^s \Gamma(\omega,\tau,x(\omega,\tau))y(\omega,\tau)d\tau))-f(\omega,t,s,x(\omega,s))\\&\quad-\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)\|ds\\&\leqslant\varepsilon(\omega)TK(\omega)\max\{\|y(\omega,t)\|_J,\ \|F(\omega,x(\omega,t))\|_J,\\&\quad\|F(\omega,x(\omega, t)+\varepsilon(\omega)(y(\omega, t)+\int_0^t \Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)ds))\|_J\}\\&=\varepsilon(\omega)q(\omega)\max\{\|y(\omega,t)\|_J,\ \|F(\omega,x(\omega,t))\|_J,\\&\quad\|F(\omega, x(\omega,t)+\varepsilon(\omega)(y(\omega, t)+\int_0^t \Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)ds))\|_J\},\\&\qquad\qquad\forall\omega\in\Omega\end{aligned}$$

注意到在定理3.7中当$\mathscr{D}(F)=X$时，F的a.e.闭性可去掉。于是在定理3.7中令$\mathscr{D}(F)=X=C_J(X)$，F为映$C_J(X)$入$C_J(X)$的连续点值随机算子和令F的有界随机定向收缩$I+\Gamma(\omega,x)$为积分形式的有界随机定向收缩$(I+\int_0^t \Gamma(\omega,s,x(\omega,s)))$。于是由定理3.7知存在一$C_J(X)$-值随机变量$x^*(\omega,t)$为$F$的一随机不动点。即$x^*(\omega,t)$是随机积分方程(4.1)的一随机解。

现在我们讨论随机初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dx(\omega,t)}{dt}=g(\omega,t,x(\omega,t)), & t\in J\\ x(\omega,0)=z_0(\omega)\end{cases}\tag{4.4}$$

定理4.2 设 $g:\Omega\times J\times X\to X$ 使得对每一 $\omega\in\Omega,g(\omega,\cdot,\cdot)$ 一致连续和对每一 $(t,x)\in J\times X$, $g(\cdot,t,x)$ 是X-值随机变量和存在有界线性随机算子 $\Gamma(\cdot,t,x):\Omega\times X\to X,\forall(t,x)\in J\times X$满足引理4.2的假设使得：

(i) 对一切$x(\omega,t)$, $y(\omega,t)\in C_J(X)$存在正实值随机变量$K(\omega)$和

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon(\omega,x(\omega,t),y(\omega,t))\leqslant1$$

使得

$$\begin{aligned}&\max_{s\in J}\|g(\omega,s,x(\omega,s)+\varepsilon(\omega)(y(\omega,s)+\int_0^s \Gamma(\omega,\tau,x(\omega,\tau))y(\omega,\tau)d\tau))-g(\omega,s,x(\omega,s))\\&\quad-\varepsilon(\omega)\Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)\|\\&\leqslant\varepsilon(\omega)K(\omega)\max\{\|y(\omega,t)\|_J,\ \|G(\omega,x(\omega,t))\|_J,\ \|G(\omega,x(\omega,t)\\&\quad+\varepsilon(\omega)(y(\omega,t)+\int_0^t \Gamma(\omega,s,x(\omega,s))y(\omega,s)ds))\|_J\}\qquad\forall\omega\in\Omega\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中 $$G(\omega,x(\omega,t))=z_0(\omega)+\int_0^t g(\omega,s,x(\omega,s))ds$$

和$z_0(\omega)$是给定的X-值随机变量.

(ii) 对一切$t\in J$和$x(\omega,t)\in C_J(X)$

$$\|\Gamma(\omega,t,x(\omega,t))\|\leqslant B(\omega),\qquad \forall\omega\in\Omega$$

其中$B(\omega)$是正实值随机变量.

(iii) $TK(\omega)=q(\omega)<1,\quad \forall\omega\in\Omega$

则随机初值问题(4.4)有一随机解. 即存在$C_J(X)$-值随机变量$x^*(\omega,t)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{dx^*(\omega,t)}{dt}=g(\omega,t,x^*(\omega,t))\\ x^*(\omega,0)=z_0(\omega), \qquad \forall\ t\in J,\ \omega\in\Omega\end{cases}$$

证明 显然求解随机初值问题(4.4)等价于求解下面非线性随机Volterra积分方程

$$x(\omega,t)=z_0(\omega)+\int_0^t g(\omega,s,x(\omega,s))ds \tag{4.6}$$

定义非线性点值随机算子$G:\Omega\times C_J(X)\to C_J(X)$如下:

$$G(\omega,x(\omega,t))=z_0(\omega)+\int_0^t g(\omega,s,x(\omega,s))ds$$

由具有$z(\omega,t)=z_0(\omega)$和,$f(\omega,t,s,x(\omega,s))=g(\omega,s,x(\omega,s))$, $\forall t\in J$的定理4.1知积分方程(4.6)有一随机解$x^*(\omega,t)\in C_J(X)$. 即存在$C_J(X)$-值随机变量$x^*(\omega,t)$使得

$$x^*(\omega,t)=z_0(\omega)+\int_0^t f(\omega,s,x^*(\omega,s))ds,\qquad \forall t\in J,\ \omega\in\Omega$$

从而$x^*(\omega,t)$是随机初值问题(4.4)的一随机解.

注4.1 定理4.2是[5,p.79]的定理5.1的改进和随机推广. 我们也可仿照[5,p.82]的注5.2, 对空间$(C_J(X)\|\cdot\|_J)$重新赋范, 从而可将定理5.1和4.2中的假设(iii) $TK(\omega)=q(\omega)<1$, $\forall\omega\in\Omega$ 去掉. 这里不再陈述.

参 考 文 献

[1] Lee, A. C. H. and W. J. Padgett, Random contractors and the solution of random nonlinear equations, *Nonlinear Anal. TMA*, **1** (1977), 175—185.

[2] Lee, A. C. H. and W. J. Padgett, Random contractors with random nonlinear majorant functions, *Nonlinear Anal. TMA*, **3** (1979), 707—715.

[3] Lee, A. C. H. and W. J. Padgett, Solution of random operator equations by random step-contractors, *Nonlinear Anal. TMA*, **4** (1980), 145—151.

[4] Altman, M., Contractor directions, directional contractors and directional contractions for solving equations, *Pacific J. Math.*, **62** (1976), 1—18.

[5] Altman, M., *Contractors and Contractors Directions——Theory and Applications*, Marcel Dekker (1977).

[6] Bharucha-Reid, A. T., *Random Integral Equations*, Academic Press, New York (1972).

[7] Tsokos, C. P. and W. J. Padgett, *Random Integral Equations with Applications in Life Sciences and Engineering*, Academic Press, New York (1974).

[8] Ding Xie-ping, Existence, uniqueness and approximation of solutions for a system of nonlinear random operator equations, *Nonlinear Anal. TMA*, **8**, 6 (1984), 563—576.

[9] 丁协平，随机集值映射的不动点定理及其应用，应用数学和力学，**5**，4 (1984)，561—575.

[10] Castaing, C. and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag (1977), 580.

[11] Itoh, S., A random fixed point theorem for a multivalued contraction mapping, *Pacif. J. Math.*, **68** (1977), 85—90.

[12] 丁协平，随机收缩和随机算子方程的解，数学学报，**29**，1 (1986)，135—144.

Random Directional Contractors and Their Applications

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

In this paper, as the generalizations of Altman's directional contractors[4,5] and Lee and Padgett's random contractors[1,2] we introduce the concept of random directional contractors for set-valued random operators. Using the new concept and transfinite induction, we show several existence theorems to solutions of nonlinear set-valued random operator equations. Our theorems improve and generalize the corresponding results in[1,2,4,5,11]. Next, some applications of our results to nonlinear random integral and differential equations are given.