应用数学和力学，第7卷第12期（1986年12月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

重超几何方程的研究*

王 慎 行

（中国天津化学工程公司，1985年6月16日收到）

摘 要

本文引进一个新的微分方程——重超几何方程，并给出了它的解。

一、重超几何方程及其解

设

$$L=z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{d}{dz}-\alpha\beta \tag{1.1}$$

式中，α，β和γ为常数。因为

$$L(\cdots)=0 \tag{1.2}$$

称为超几何方程，所以

$$LL(\cdots)=0 \tag{1.3}$$

可命名为重超几何方程。下面就来求解这一方程。

设U足满方程（1.3），但不满足方程（1.2），则令

$$L(U)=U^* \tag{1.4}$$

可得

$$L(U^*)=0 \tag{1.5}$$

于是解方程（1.3）的问题即化为求解方程（1.4）和（1.5）。因此，方程（1.3）的解可表示为

$$U=C_1U_1^*+C_2U_2^*+C_3U_1+C_4U_2 \tag{1.6}$$

其中，U_1^*和U_2^*是齐次方程（1.5）的解，也是方程（1.4）的齐次解；U_1和U_2是方程(1.4)的特解；C_1，C_2，C_3，C_4是任意常数。

方程（1.3）、（1.4）、（1.5）都有三个奇点：$z=0$，$z=1$和$z=\infty$。现在首先研究在奇点$z=0$邻域的情况。

根据超几何方程的理论，若式（1.1）中的γ不等于零或整数，则方程（1.5）的两个解为

$$U_{i(0)}^*=\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{(i)}z^{\rho_i+n}\qquad(|z|<1;\ i=1,2) \tag{1.7a,b}$$

---

* 钱伟长推荐。
1982年7月24日第一次收到。

式（1.7）中，ρ_1 和 ρ_2 分别为方程（1.5）在奇点 $z=0$ 的第一指标和第二指标，ρ_1 取 0 和 $(1-\gamma)$ 二数中的较大者，ρ_2 取其中的较小者；

$$d_n^{(i)}=\frac{(\rho_i+\alpha)_n(\rho_i+\beta)_n}{(\rho_i+1)_n(\rho_i+\gamma)_n} \tag{1.8a,b}$$

而

$$\left.\begin{aligned}&(\theta)_0=1\\&(\theta)_n=\theta(\theta+1)(\theta+2)\cdots(\theta+n-1)\end{aligned}\right\}\quad(n\geqslant1) \tag{1.9}$$

将式（1.7）改写为

$$U_{i(0)}^*=\sum_{n=1}^{\infty}d_{n-1}^{(i)}z^{\rho_i+n-1}\qquad(|z|<1;\ i=1,2) \tag{1.10a,b}$$

令方程（1.4）中的U^*由式（1.10）表达，并设方程（1.4）的特解为

$$U_{i(0)}=\sum_{n=1}^{\infty}D_n^{(i)}z^{\rho_i+n}\qquad(|z|<1;\ i=1,2) \tag{1.11a,b}$$

将式（1.10）、（1.11）代入方程（1.4），得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_i+n)(\rho_i+\gamma+n-1)D_n^{(i)}z^{n-1}\\&-\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_i+\alpha+n)(\rho_i+\beta+n)D_n^{(i)}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}d_{n-1}^{(i)}z^{n-1}\end{aligned}\right\} \tag{1.12a,b}$$

由式（1.12）左右两端 z^{n-1} 项的系数相等可得如下递推公式：

$$D_n^{(i)}=\frac{(\rho_i+\alpha+n-1)(\rho_i+\beta+n-1)D_{n-1}^{(i)}+d_{n-1}^{(i)}}{(\rho_i+n)(\rho_i+\gamma+n-1)} \tag{1.13a,b}$$

于是，根据式（1.8）、（1.13）得

$$\left.\begin{aligned}&D_1^{(i)}=\frac{1}{(\rho_i+1)(\rho_i+\gamma)}\\&D_2^{(i)}=\frac{(\rho_i+\alpha+1)(\rho_i+\beta+1)+(\rho_i+\alpha)(\rho_i+\beta)}{(\rho_i+1)(\rho_i+2)(\rho_i+\gamma)(\rho_i+\gamma+1)}\\&D_3^{(i)}=\frac{1}{(\rho_i+1)(\rho_i+2)(\rho_i+3)(\rho_i+\gamma)(\rho_i+\gamma+1)(\rho_i+\gamma+2)}\\&\qquad\cdot[(\rho_i+\alpha+1)(\rho_i+\alpha+2)(\rho_i+\beta+1)(\rho_i+\beta+2)\\&\qquad+(\rho_i+\alpha)(\rho_i+\alpha+2)(\rho_i+\beta)(\rho_i+\beta+2)\\&\qquad+(\rho_i+\alpha)(\rho_i+\alpha+1)(\rho_i+\beta)(\rho_i+\beta+1)]\\&\cdots\cdots\\&D_n^{(i)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(\rho_i+\alpha)_{n,k}(\rho_i+\beta)_{n,k}}{(\rho_i+1)_n(\rho_i+\gamma)_n}\end{aligned}\right\} \tag{1.14a,b}$$

其中

$$(\theta)_{n,k}=\frac{(\theta)_n}{\theta+k-1} \tag{1.15}$$

当γ为整数或零时，方程(1.5)的第一解仍为式（1 7a），但其第二解不再由式(1.7b)表示，而有三种情况[1]：

1）$\gamma=1$

$$U^*_{2(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2}z^n\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2}z^n$$

$$\cdot[\psi(\alpha+n)-\psi(\alpha)+\psi(\beta+n)-\psi(\beta)-2\psi(1+n)+2\psi(1)]$$

$$(|z|<1;\ \alpha,\ \beta\neq0) \tag{1.16}$$

其中，$\psi(x)$是伽玛函数$\Gamma(x)$的对数导数，

$$\psi(x)=\frac{d\ln\Gamma(x)}{dx}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \tag{1.17}$$

2）$\gamma=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

$$U^*_{2(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n$$

$$\cdot[\psi(\alpha+n)-\psi(\alpha)+\psi(\beta+n)-\psi(\beta)$$
$$-\psi(\gamma+n)+\psi(\gamma)-\psi(1+n)+\psi(1)]$$

$$-\sum_{n=1}^{\gamma-1}\frac{(n-1)!(1-\gamma)_n}{(1-\alpha)_n(1-\beta)_n}z^{-n}$$

$$(|z|<1;\ \alpha,\ \beta\neq0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \gamma-1) \tag{1.18}$$

3）$\gamma=1-\rho_1,\ \rho_1=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

$$U^*_{2(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho_1+\alpha)_n(\rho_1+\beta)_n}{n!(\rho_1+1)_n}z^{\rho_1+n}\ln z$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\rho_1+\alpha)_n(\rho_1+\beta)_n}{n!(\rho_1+1)_n}z^{\rho_1+n}[\psi(\rho_1+\alpha+n)$$

$$-\psi(\rho_1+\alpha)+\psi(\rho_1+\beta+n)-\psi(\rho_1+\beta)$$
$$-\psi(\rho_1+1+n)+\psi(\rho_1+1)-\psi(1+n)+\psi(1)]$$

$$-\sum_{n=1}^{\rho_1}\frac{(n-1)!(-\rho_1)_n}{(1-\alpha-\rho_1)_n(1-\beta-\rho_1)_n}z^{-n}$$

$$(|z|<1;\ \alpha,\ \beta\neq0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ -\rho_1) \tag{1.19}$$

但是，上述三种情况可统一地表示为

$$U^*_{2(0)}=\sum_{n=1}^{\infty}d^{(1)}_{n-1}z^{\rho_1+n-1}\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}e_nz^{\rho_1+n}-\sum_{n=1}^{m}g_nz^{\rho_1-n}\qquad(|z|<1) \tag{1.20}$$

式（1.20）中，系数$d^{(1)}_n$由式（1.8a）确定；而

$$e_n=\frac{(\rho_1+\alpha)_n(\rho_1+\beta)_n}{(\rho_1+1)_n(\rho_1+\gamma)_n}[\psi(\rho_1+\alpha+n)-\psi(\rho_1+\alpha)$$

$$+\psi(\rho_1+\beta+n)-\psi(\rho_1+\beta)-\psi(\rho_1+\gamma+n)$$
$$+\psi(\rho_1+\gamma)-\psi(\rho_1+1+n)-\psi(\rho_1+1)] \qquad (\rho_1+\alpha,\ \rho_1+\beta\neq 0) \tag{1.21}$$

$$g_n=\begin{cases} \dfrac{(n-1)!(1-\gamma)_n}{(1-\alpha)_n(1-\beta)_n} & \begin{pmatrix}\gamma=2,\ 3,\ 4,\ \cdots \\ \alpha,\ \beta\neq 1,\ 2,\ \cdots,\ \gamma-1\end{pmatrix} \\ 0 & (\gamma=1) \\ \dfrac{(n-1)!(\gamma-1)_n}{(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n} & \begin{pmatrix}\gamma=0,\ -1,\ -2,\ \cdots \\ \alpha,\ \beta\neq 0,-1,-2,\cdots,\gamma\end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.22}$$

$$m=\begin{cases}\gamma-1 & (\gamma=2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \\ 1-\gamma & (\gamma=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots)\end{cases} \tag{1.23}$$

现在，设方程（1.4）的特解为

$$U_{2(0)}=\sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(1)} z^{\rho_1+n}\ln z+\sum_{n=1}^{\infty} E_n z^{\rho_1+n}-\sum_{n=1}^{m} G_n z^{\rho_1-n} \qquad (|z|<1) \tag{1.24}$$

并令方程（1.4）中的U^*由式（1.20）表示。将式（1.20）、（1.24）代入方程（1.4）则得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}[&(\rho_1+n)(\rho_1+\gamma+n-1)D_n^{(1)}z^{n-1}\ln z \\ &-(\rho_1+\alpha+n)(\rho_1+\beta+n)D_n^{(1)}z^n\ln z \\ &+(2\rho_1+\gamma+2n-1)D_n^{(1)}z^{n-1} \\ &-(2\rho_1+\alpha+\beta+2n)D_n^{(1)}z^n \\ &+(\rho_1+n)(\rho_1+\gamma+n-1)E_nz^{n-1} \\ &-(\rho_1+\alpha+n)(\rho_1+\beta+n)E_nz^n] \\ &-\sum_{n=1}^{m}[(\rho_1-n)(\rho_1+\gamma-n-1)G_nz^{-n-1} \\ &-(\rho_1+\alpha-n)(\rho_1+\beta-n)G_nz^{-n}] \\ =&\sum_{n=1}^{\infty}[d_{n-1}^{(1)}z^{n-1}\ln z+e_nz^n]-\sum_{n=1}^{m}g_nz^{-n}\end{aligned} \tag{1.25}$$

由式（1.25）即可确定式（1.24）中的系数 $D_n^{(1)}$，E_n与G_n。

首先，由式（1.25）左右两端 $z^{n-1}\ln z$ 项的系数相等得

$$D_n^{(1)}=\frac{(\rho_1+\alpha+n-1)(\rho_1+\beta+n-1)D_{n-1}^{(1)}+d_{n-1}^{(1)}}{(\rho_1+n)(\rho_1+\gamma+n-1)}$$

此即式（1.13a）。因此，系数$D_n^{(1)}$由式（1.14a）确定。

其次，由式（1.25）左右两端 z^{n-1} 项的系数相等得

$$\begin{aligned}E_n=\frac{1}{(\rho_1+n)(\rho_1+\gamma+n-1)}&[(\rho_1+\alpha+n-1) \\ &\cdot(\rho_1+\beta+n-1)E_{n-1}(2\rho_1+\alpha+\beta+2n-2)D_{n-1}^{(1)} \\ &-(2\rho_1+\gamma+2n-1)D_n^{(1)}+e_{n-1}]\end{aligned} \tag{1.26}$$

因此，

$$\left.\begin{aligned}
E_1&=-\frac{2\rho_1+\gamma+1}{(\rho_1+\gamma)(\rho_1+1)}D_1^{(1)}\\
E_2&=\left[\frac{2\rho_1+\alpha+\beta+2}{(\rho_1+\gamma+1)(\rho_1+2)}-\frac{(\rho_1+\alpha+1)(\rho_1+\beta+1)}{(\rho_1+\gamma)(\rho_1+\gamma+1)(\rho_1+1)(\rho_1+2)}\right.\\
&\quad\left.\cdot(2\rho_1+\gamma+1)\right]D_1^{(1)}-\frac{2\rho_1+\gamma+3}{(\rho_1+\gamma+1)(\rho_1+2)}D_2^{(1)}\\
&\quad+\frac{1}{(\rho_1+\gamma+1)(\rho_1+2)}e_1\\
&\quad\cdots\cdots\\
E_n&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(\rho_1+\alpha+1+k)_{n-k-1}(\rho_1+\beta+1+k)_{n-k-1}}{(\rho_1+\gamma+k)_{n-k}(\rho_1+1+k)_{n-k}}\right.\\
&\quad\cdot(2\rho_1+\alpha+\beta+2k)\\
&\quad\left.-\frac{(\rho_1+\alpha+k)_{n-k}(\rho_1+\beta+k)_{n-k}}{(\rho_1+\gamma-1+k)_{n-k+1}(\rho_1+k)_{n-k+1}}(2\rho_1+\gamma-1+2k)\right]D_k^{(1)}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\rho_1+\alpha+1+k)_{n-k-1}(\rho_1+\beta+1+k)_{n-k-1}}{(\rho_1+\gamma+k)_{n-k}(\rho_1+1+k)_{n-k}}e_k
\end{aligned}\right\}\tag{1.27}$$

注意，在（1.27）中定义$(\theta)_{-1}=0$。

最后，由式（1.25）左右两端z^{-n}项的系数相等得

$$G_n=\frac{(\rho_1+\gamma-n)(\rho_1+1-n)G_{n-1}-g_n}{(\rho_1+\alpha-n)(\rho_1+\beta-n)}\tag{1.28}$$

因此，

$$\left.\begin{aligned}
G_1&=-\frac{g_1}{(\rho_1+\alpha-1)(\rho_1+\beta-1)}\\
G_2&=-\frac{(\rho_1+\gamma-2)(\rho_1-1)g_1}{(\rho_1+\alpha-2)(\rho_1+\alpha-1)(\rho_1+\beta-2)(\rho_1+\beta-1)}\\
&\quad-\frac{g_2}{(\rho_1+\alpha-2)(\rho_1+\beta-2)}\\
&\quad\cdots\cdots\\
G_n&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\rho_1+\gamma-n)_{n-k}(\rho_1+1-n)_{n-k}}{(\rho_1+\alpha-n)_{n-k+1}(\rho_1+\beta-n)_{n-k+1}}g_k
\end{aligned}\right\}\tag{1.29}$$

至于奇点$z=1$，$z=\infty$邻域的解，可以利用变量代换求得。

对于奇点$z=1$，令

$$t=1-z\tag{1.30}$$

$$U^{1*}(t)=U^*(z)\tag{1.31}$$

$$U^1(t)=U(z)\tag{1.32}$$

将式（1.30）、（1.31）代入方程（1.5）得

$$t(1-t)\frac{d^2U^{1*}}{dt^2}+[(1+\alpha+\beta-\gamma)-(1+\alpha+\beta)t]\frac{dU^{1*}}{dt}-\alpha\beta U^{1*}=0\tag{1.33}$$

记

$$\alpha_1=\alpha,\ \beta_1=\beta,\ \gamma_1=1+\alpha+\beta-\gamma\tag{1.34}$$

方程（1.33）可写为

$$t(1-t)\frac{d^2U^{1*}}{dt^2}+[\gamma_1-(1+\alpha_1+\beta_1)t]\frac{dU^{1*}}{dt}-\alpha_1\beta_1U^{1*}=0 \tag{1.35}$$

而将式（1.30）、（1.31）、（1.32）代入方程（1.4）则得

$$t(1-t)\frac{d^2U^1}{dt^2}+[\gamma_1-(1+\alpha_1+\beta_1)t]\frac{dU^1}{dt}-\alpha_1\beta_1U^1=U^{1*} \tag{1.36}$$

求方程（1.35）、（1.36）在 $t=0$ 邻域的解，便得方程（1.5）、（1.4）在 $z=1$ 邻域的解。

对于奇点 $z=\infty$，令

$$t=\frac{1}{z},\quad z=\frac{1}{t} \tag{1.37}$$

$$w^*(t)=z^{\alpha}U^*(z),\ U^*(z)=t^{\alpha}w^*(t) \tag{1.38}$$

$$w(t)=z^{\alpha}U(z),\ U(z)=t^{\alpha}w(t) \tag{1.39}$$

将式（1.37）、（1.38）代入方程（1.5）得

$$t(1-t)\frac{d^2w^*}{dt^2}+[(1+\alpha+\beta)-(2+2\alpha-\gamma)t]\frac{dw^*}{dt}$$
$$-\alpha(1+\alpha-\gamma)w^*=0 \tag{1.40}$$

记

$$\alpha_2=\alpha,\ \beta_2=1+\alpha-\gamma,\ \gamma_2=1+\alpha-\beta \tag{1.41}$$

式（1.40）可写为

$$t(1-t)\frac{d^2w^*}{dt^2}+[\gamma_2-(1+\alpha_2+\beta_2)t]\frac{dw^*}{dt}-d_2\beta_2w^*=0 \tag{1.42}$$

而将式（1.37）、（1.38）、（1.39）代入方程（1.4）则得

$$t(1-t)\frac{d^2w}{dt^2}+[\gamma_2-(1+\alpha_2+\beta_2)t]\frac{dw}{dt}-\alpha_2\beta_2w=-\frac{w^*}{t} \tag{1.43}$$

求方程（1.42）、（1.43）在 $t=0$ 邻域的解，便得方程（1.5）、（1.4）在 $z=\infty$ 邻域的解。

由式（1.1）可以看出，在方程（1.4）、（1.5）中，α和β可以互换。所以不失普遍性，可设 $\alpha\geqslant\beta$。这样，方程(1.42)在奇点 $t=0$ 的第一指标为零，第二指标为$(1-\gamma_2)=-(\alpha-\beta)$。

因此，如果 $(\alpha-\beta)\neq\lambda$，$\lambda=0, 1, 2, 3\cdots$，则方程（1.42）的两个解为

$$w_1^*=\sum_{n=0}^{\infty}d_n'^{(1)}t^n \qquad (|t|<1) \tag{1.44}$$

$$w_2^*=\sum_{n=0}^{\infty}d_n'^{(2)}t^{-(\alpha-\beta)+n} \qquad (|t|<1) \tag{1.45}$$

而

$$d_n'^{(1)}=\frac{(\alpha_2)_n(\beta_2)_n}{(1)_n(\gamma_2)_n}=\frac{(\alpha)_n(1+\alpha-\gamma)_n}{n!(1+\alpha-\beta)_n} \tag{1.46}$$

$$d_n'^{(2)}=\frac{(1-\gamma_2+\alpha_2)_n(1-\gamma_2+\beta_2)_n}{(1)_n(2-\gamma_2)_n}=\frac{(\beta)_n(1+\beta-\gamma)_n}{n!(1+\beta-\alpha)_n} \tag{1.47}$$

与此相应，方程（1.43）的两个特解为

$$w_1=\sum_{n=1}^{\infty} D_n'^{(1)} t^n \qquad (|t|<1) \tag{1.48}$$

$$w_2=\sum_{n=1}^{\infty} D_n'^{(2)} t^{-(\alpha-\beta)+n} \qquad (|t|<1) \tag{1.49}$$

而

$$D_n'^{(1)}=-\frac{(\alpha_2)_n(\beta_2)_n}{(1)_n(\gamma_2)_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+\gamma_2-1)}$$

$$=-\frac{(\alpha)_n(1+\alpha-\gamma)_n}{n!(1+\alpha-\beta)_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+\alpha-\beta)} \tag{1.50}$$

$$D_n'^{(2)}=-\frac{(1+\alpha_2-\gamma_2)_n(1+\beta_2-\gamma_2)_n}{(1)_n(2-\gamma_2)_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k-\gamma_2+1)}$$

$$=-\frac{(\beta)_n(1+\beta-\gamma)_n}{n!(1+\beta-\alpha)_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+\beta-\alpha)} \tag{1.51}$$

如果 $(\alpha-\beta)=\lambda$, $\lambda=0, 1, 2, 3, \cdots$, 则方程（1.42）的第一解仍为式（1.44），但其第二解不再是（1.45），而由下式表示

$$w_2^*=\sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1}'^{(1)} t^{n-1}\ln t+\sum_{n=1}^{\infty} e_n' t^n-\sum_{n=1}^{\alpha-\beta} g_n' t^{-n} \qquad (|t|<1) \tag{1.52}$$

式（1.52）中，系数 $d_n'^{(1)}$ 按式（1.46）确定，而

$$\begin{aligned} e_n'= & \frac{(\alpha)_n(1+\alpha-\gamma)_n}{n!(1+\alpha-\beta)_n}[\psi(\alpha+n)-\psi(\alpha) \\ & +\psi(1+\alpha-\gamma+n)-\psi(1+\alpha-\gamma)-\psi(1+\alpha-\beta+n) \\ & +\psi(1+\alpha-\beta)-\psi(1+n)+\psi(1)] \qquad (\alpha,\ 1+\alpha-\gamma\neq 0) \end{aligned} \tag{1.53}$$

$$g_n'=\begin{cases} \dfrac{(n-1)!(\beta-\alpha)_n}{(1-\alpha)_n(\gamma-\alpha)_n} & \begin{pmatrix}\alpha-\beta=1, 2, 3, \cdots \\ \alpha, 1+\alpha-\gamma\neq 1, 2, 3, \cdots, (\alpha-\beta)\end{pmatrix} \\ 0 & (\alpha-\beta=0) \end{cases} \tag{1.54}$$

将式（1.52）代入方程（1.43）的右端，然后解（1.43）得

$$w_2=\sum_{n=1}^{\infty} D_n'^{(1)} t^n\ln t+\sum_{n=1}^{\infty} E_n' t^n-\sum_{n=1}^{\alpha-\beta} G_n' t^{-n} \qquad (|t|<1) \tag{1.55}$$

式（1.55）中，$D_n'^{(1)}$ 由式（1.50）决定，而

$$E_n'=\sum_{k=1}^{n}\Bigg[\frac{(1+\alpha+k)_{n-k-1}(2+\alpha-\gamma+k)_{n-k-1}}{(1+\alpha-\beta+k)_{n-k}(1+k)_{n-k}}\cdot(1+2\alpha-\gamma+2k)$$

$$-\frac{(\alpha+k)_{n-k}(1+\alpha-\gamma+k)_{n-k}}{(\alpha-\beta+k)_{n-k+1}(k)_{n-k+1}}(\alpha-\beta+2k)\Bigg]D_k'^{(1)}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha+k)_{n-k}(1+\alpha-\gamma+k)_{n-k}}{(\alpha-\beta+k)_{n-k+1}(k)_{n-k+1}}e'_k \tag{1.56}$$

$$G'_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-n)_{n-k-1}(1+\alpha-\beta-n)_{n-k-1}}{(\alpha-n)_{n-k}(1+\alpha-\gamma-n)_{n-k}}g'_k \tag{1.57}$$

二、解的特殊函数表示

现在研究一下利用超几何函数 $F(a,\ b;\ c;\ \zeta)$ 以及引进几个新函数来表示重超几何方程的解，这些函数是

1) $F(a,\ b;\ c;\ \zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n^*\zeta^n \qquad (|\zeta|<0)$ (2.1)

其中

$$d_n^*=\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} \tag{2.2}$$

($c\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$，除非 a 或 b 等于零或负整数，且 $a\geqslant c$ 或 $b\geqslant c$)

2) $f(a,\ b;\ c;\ \zeta)=F(a,\ b;\ c;\ \zeta)\ln\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}e_n^*\zeta^n-\sum_{n=1}^{c-1}g_n^*\zeta^{-n}$ (2.3)

$(|\zeta|<1;\ c=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

式中

$$e_n^*=\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}[\psi(a+n)-\psi(a)+\psi(b+n)-\psi(b)$$
$$-\psi(c+n)+\psi(c)-\psi(1+n)+\psi(1)] \tag{2.4}$$

(除满足 d_n^* 的条件，还要 $a,b\neq 0$)

$$g_n^*=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!(1-c)_n}{(1-a)_n(1-b)_n} & \left(\begin{matrix}c=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\\ a,\ b\neq 1,\ 2,\ \cdots,\ c-1\end{matrix}\right)\\ 0 & (c=1)\end{cases} \tag{2.5}$$

3) $\phi(a,b;c;\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n^*\zeta^n \qquad (|\zeta|<1)$ (2.6)

式中

$$D_n^*=\frac{\sum_{k=1}^{n}(a)_{n,k}(b)_{n,k}}{n!(c)_n} \qquad (c\neq 0,-1,-2,-3,\cdots) \tag{2.7}$$

4) $\varphi(a,b;c;\zeta)=\phi(a,b;c;\zeta)\ln\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}E_n^*\zeta^n-\sum_{n=1}^{c-1}G_n^*\zeta^{-n} \qquad (|\zeta|<1;c=1,2,3,\cdots)$

(2.8)

其中

$$E_n^* = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(a+1+k)_{n-k-1}(b+1+k)_{n-k-1}}{(c+k)_{n-k}(1+k)_{n-k}}(a+b+2k) - \frac{(a+k)_{n-k}(b+k)_{n-k}}{(c-1+k)_{n-k+1}(k)_{n-k+1}}(c-1+2k)\right]D_k^* + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(a+1+k)_{n-k-1}(b+1+k)_{n-k-1}}{(c+k)_{n-k}(1+k)_{n-k}}e_k^*$$

（E_n^*要求的条件与e_n^*相同） (2.9)

$$G_n^* = -\sum_{k=1}^{n}\frac{(c-n)_{n-k}(1-n)_{n-k}}{(a-n)_{n-k+1}(b-n)_{n-k+1}}g_k^* \qquad (a,b\neq 1,2,3,\cdots,c-1) \tag{2.10}$$

5) $$\phi_1(a,b;c;\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}D_n^{**}\zeta^n \qquad (|\zeta|<1) \tag{2.11}$$

其中

$$D_n^{**} = -\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(c-1+k)} \qquad (c\neq 0,-1,-2,-3,\cdots) \tag{2.12}$$

6) $$\varphi_1(a,b;c;\zeta) = \phi_1(a,b;c;\zeta)\ln\zeta + \sum_{n=1}^{\infty}E_n^{**}\zeta^n - \sum_{n=1}^{c-1}G_n^{**}\zeta^{-n} \qquad (|\zeta|<1;\ c=1,2,3,\cdots) \tag{2.13}$$

式中

$$E_n^{**} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(a+1+k)_{n-k-1}(b+1+k)_{n-k-1}}{(c+k)_{n-k}(1+k)_{n-k}}(a+b+2k) - \frac{(a+k)_{n-k}(b+k)_{n-k}}{(c-1+k)_{n-k+1}(k)_{n-k+1}}(c-1+2k)\right]D_k^{**} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(a+k)_{n-k}(b+k)_{n-k}}{(c-1+k)_{n-k+1}(k)_{n-k+1}}e_k^*$$

（E_n^{**}要求的条件与e_n^*相同） (2.14)

$$G_n^{**} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(1-n)_{n-k-1}(c-n)_{n-k-1}}{(a-n)_{n-k}(b-n)_{n-k}}g_k^* \qquad (a,b\neq 1,2,\cdots,c-1) \tag{2.15}$$

利用上面六个函数可将重超几何方程的解表示如下：

1．在奇点 $z=0$ 的邻域

i) 当$\gamma\neq\lambda$, $\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$，且

（1） $\gamma>1$时

$$\left.\begin{aligned} U_{1(0)}^* &= F(\alpha,\beta;\gamma;z)\\ U_{2(0)}^* &= z^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)\\ U_{1(0)} &= \phi(\alpha,\beta;\gamma;z)\\ U_{2(0)} &= z^{1-\gamma}\phi(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

（2） $\gamma<1$ 时

$$\left.\begin{aligned}U^*_{1(0)}&=z^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)\\U^*_{2(0)}&=F(\alpha,\beta;\gamma;z)\\U_{1(0)}&=z^{1-\gamma}\phi(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)\\U_{2(0)}&=\phi(\alpha,\beta;\gamma;z)\end{aligned}\right\}\tag{2.17}$$

ii) 当 $\gamma=\lambda,\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$，且

(1) $\gamma\geqslant1$ 而 $\alpha,\beta\neq0,1,2,\cdots,\gamma-1$ 时

$$\left.\begin{aligned}U^*_{1(0)}&=F(\alpha,\beta;\gamma;z)\\U^*_{2(0)}&=f(\alpha,\beta;\gamma;z)\\U_{1(0)}&=\phi(\alpha,\beta;\gamma;z)\\U_{2(0)}&=\varphi(\alpha,\beta;\gamma;z)\end{aligned}\right\}\tag{2.18}$$

(2) $\gamma\leqslant0$ 而 $\alpha,\beta\neq0,-1,-2,\cdots,\gamma$ 时

$$\left.\begin{aligned}U^*_{1(0)}&=z^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)\\U^*_{2(0)}&=z^{1-\gamma}f(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)\\U_{1(0)}&=z^{1-\gamma}\phi(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)\\U_{2(0)}&=z^{1-\gamma}\varphi(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)\end{aligned}\right\}\tag{2.19}$$

2. 在奇点 $z=1$ 的邻域

i) 当 $\alpha+\beta-\gamma\neq\lambda,\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$，且

(1) $\alpha+\beta-\gamma>0$ 时

$$\left.\begin{aligned}U^*_{1(1)}&=F(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\\U^*_{2(1)}&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z)\\U_{1(1)}&=\phi(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\\U_{2(1)}&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\phi(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z)\end{aligned}\right\}\tag{2.20}$$

(2) $\alpha+\beta-\gamma<0$ 时

$$\left.\begin{aligned}U^*_{1(1)}&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z)\\U^*_{2(1)}&=F(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\\U_{1(1)}&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\phi(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z)\\U_{2(1)}&=\phi(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\end{aligned}\right\}\tag{2.21}$$

ii) 当 $\alpha+\beta-\gamma=\lambda,\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$，且

(1) $\alpha+\beta-\gamma\geqslant0$ 而 $\alpha,\beta\neq0,1,2,\cdots,\alpha+\beta-\gamma$ 时

$$\left.\begin{aligned}U^*_{1(1)}&=F(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\\U^*_{2(1)}&=f(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\\U_{1(1)}&=\phi(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\\U_{2(1)}&=\varphi(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)\end{aligned}\right\}\tag{2.22}$$

(2) $1+\alpha+\beta-\gamma\leqslant0$ 而 $\alpha,\beta\neq0,-1,-2,-3,\cdots,1+\alpha+\beta-\gamma$ 时

$$\left.\begin{aligned}U^*_{1(1)}&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z)\\U^*_{2(1)}&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z)\\U_{1(1)}&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\phi(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z)\\U_{2(1)}&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\varphi(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;1-\alpha-\beta+\gamma;1-z)\end{aligned}\right\}\tag{2.23}$$

3. 在奇点 $z=\infty$ 的邻域(设 $\alpha\geqslant\beta$)

i) 当 $\alpha-\beta\neq\lambda$, $\lambda=0,1,2,\cdots$，时

$$\left.\begin{aligned}
U^*_{1(\infty)}&=z^{-\alpha}F\left(\alpha,1+\alpha-\gamma;\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{z}\right)\\
U^*_{2(\infty)}&=z^{-\beta}F\left(\beta,1+\beta-\gamma;\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{z}\right)\\
U_{1(\infty)}&=z^{-\alpha}\phi_1\left(\alpha,1+\alpha-\gamma;1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{z}\right)\\
U_{2(\infty)}&=z^{-\beta}\phi_1\left(\beta,1+\beta-\gamma;1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{z}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{2.24}$$

ii) 当 $\alpha-\beta=\lambda,\lambda=0,1,2,\cdots$ 且 $\alpha,1+\alpha-\gamma\neq 0,1,2,\cdots,\alpha-\beta$ 时

$$\left.\begin{aligned}
U^*_{1(\infty)}&= z^{-\alpha}F\left(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma;\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{z}\right)\\
U^*_{2(\infty)}&= z^{-\alpha}f\left(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma;\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{z}\right)\\
U_{1(\infty)}&=z^{-\alpha}\phi_1\left(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma;\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{z}\right)\\
U_{2(\infty)}&=z^{-\alpha}\varphi_1\left(\alpha,\ 1+\alpha-\gamma;\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{z}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{2.25}$$

三、例

试解方程

$$LL(U)=0 \tag{i}$$

其中

$$L=z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}-(1-2z)\frac{d}{dz}-2\mu \tag{ii}$$

而 μ 为一常数。

因为在式(ii)中

$$\alpha=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\quad \beta=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\quad \gamma=-1 \tag{iii}$$

所以根据式(2.19)、(2.23)、(2.24)及式(2.1)、(2.3)、(2.6)、(2.8)、(2.11)得

$$\left.\begin{aligned}
U^*_{1(0)}&=z^2F\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};3;\ z\right)=z^2\sum_{n=0}^{\infty}d^*_nz^n\\
U^*_{2(0)}&=z^2f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};\ 3;\ z\right)\\
&=z^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}d^*_nz^n\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}e^*_nz^n-\sum_{n=1}^{2}g^*_nz^{-n}\right)\\
U_{1(0)}&=z^2\phi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};\ \ 3;\ \ z\right)=z^2\sum_{n=1}^{\infty}D^*_nz^n\\
U_{2(0)}&=z^2\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};\ \ 3;\ \ z\right)
\end{aligned}\right.$$

$$=z^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}D_n^*z^n\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}E_n^*z^n-\sum_{n=1}^{2}G_n^*z^{-n}\right)$$

$$U_{1(1)}^*=(1-z)^2F\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};\ 3;\ 1-z\right)$$

$$=(1-z)^2\sum_{n=0}^{\infty}d_n^*(1-z)^n$$

$$U_{2(1)}^*=(1-z)^2f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};\ 3;\ 1-z\right)$$

$$=(1-z)^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}d_n^*(1-z)^n\ln(1-z)+\sum_{n=1}^{\infty}e_n^*(1-z)^n-\sum_{n=1}^{2}g_n^*(1-z)^{-n}\right]$$

$$U_{1(1)}=(1-z)^2\phi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};\ 3;\ 1-z\right)$$

$$=(1-z)^2\sum_{n=1}^{\infty}D_n^*(1-z)^n$$

$$U_{2(1)}=(1-z)^2\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};\ 3;\ 1-z\right)$$

$$=(1-z)^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}D_n^*(1-z)^n\ln(1-z)+\sum_{n=1}^{\infty}E_n^*(1-z)^n-\sum_{n=1}^{2}G_n^*(1-z)^{-n}\right]$$

$$U_{1(\infty)}^*=z^{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)}F\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};1+\sqrt{9-8\mu};\ \frac{1}{z}\right)$$

$$=z^{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{*(1)}z^{-n}$$

$$U_{2(\infty)}^*=z^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)}F\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};1-\sqrt{9-8\mu};\ \frac{1}{z}\right)$$

$$=z^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}d_n^{*(2)}z^{-n}$$

$$U_{1(\infty)}=z^{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)}\phi_1\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};1+\sqrt{9-8\mu};\ \frac{1}{z}\right)$$

$$=z^{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}D_n^{**(1)}z^{-n}$$

$$U_{2(\infty)}=z^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)}\phi_1\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu};1-\sqrt{9-8\mu};\ \frac{1}{z}\right)$$

$$=z^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}D_n^{**(2)}z^{-n}$$

(iv)

其中各系数依式(2.2)、(2.4)、(2.5)、(2.7)、(2.9)、(2.10)、(2.12)为

$$\left.\begin{aligned}&d_0^*=1,\ d_1^*=-2(1-\mu)/3,\ d_2^*=-(1-\mu)\mu/6\\&d_3^*=-(1-\mu)\mu(2+\mu)/45,\ d_4^*=-(1-\mu)\mu(2+\mu)(5+\mu)/540\\&\quad\cdots\cdots\\&d_n^*=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)_n}{n!(3)_n}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}[k(k-1)-2(1-\mu)]}{n!(3)_n}\end{aligned}\right\}\quad(\text{v})$$

式(v)中定义$\prod\limits_{k=1}^{0}[\cdots]=1$；

$$\left.\begin{aligned}&e_1^*=(11-8\mu)/9,\ e_2^*=(-18+49\mu-25\mu^2)/72\\&e_3^*=(-180+314\mu+113\mu^2-157\mu^3)/2700\\&\quad\cdots\cdots\\&e_n^*=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)_n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)_n}{n!(3)_n}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}+n\right)\right.\\&\quad-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)+\psi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}+n\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)\\&\quad\left.-\psi(3+n)+\psi(3)-\psi(1+n)+\psi(1)\right]\\&\quad=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}[\nu(\nu-1)-2(1-\mu)]}{n!(3)_n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2k-1}{k(k-1)-2(1-\mu)}-\frac{2(k+1)}{k(k+2)}\right]\end{aligned}\right\}\quad(\text{vi})$$

$$g_1^*=1/(1-\mu),\ g_2^*=-1/2(1-\mu)\mu \quad(\text{vii})$$

$$\left.\begin{aligned}&D_1^*=1/3,\ D_2^*=-(1-2\mu)/12\\&D_3^*=(-2+2\mu+3\mu^2)/90,\ D_4^*=(-5+3\mu+9\mu^2+2\mu^3)/540\\&\quad\cdots\cdots\\&D_n^*=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)_{n,k}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\right)_{n,k}}{n!(3)_n}\\&\quad=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}[\nu(\nu-1)-2(1-\mu)]}{n!(3)_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k-1)-2(1-\mu)}\end{aligned}\right\}\quad(\text{viii})$$

$$E_1^*=-\frac{4}{3}D_1^*=-\frac{4}{9}$$

$$E_2^*=\left(\frac{3}{2\cdot4}-\frac{4\cdot2\mu}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\right)D_1^*-\frac{6}{2\cdot4}D_2^*+\frac{1}{2\cdot4}e_1^*=\frac{49-50\mu}{144}$$

$$E_3^*=\left[\frac{3(4+2\mu)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{4\cdot2\mu(4+2\mu)}{1\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot5}\right]D_1^*+\left[\frac{5}{3\cdot5}-\frac{6\cdot(4+2\mu)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\right]D_2^*$$

$$-\frac{8}{3\cdot5}D_3^*+\frac{4+2\mu}{2\cdot3\cdot4\cdot5}e_1^*+\frac{1}{3\cdot5}e_2^*=\frac{-314+226\mu-471\mu^2}{5400}$$

$$\cdots\cdots$$

$$E_n^* = \sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{1+2k}{(1+k)_{n-k}(3+k)_{n-k}}\Big(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}+k\Big)_{n-k-1}\Big(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}+k\Big)_{n-k-1}$$
$$-\frac{2(1+k)}{(k)_{n-k+1}(2+k)_{n-k+1}}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}+k\Big)_{n-k}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}+k\Big)_{n-k}\Big]D_k^*$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Big(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}+k\Big)_{n-k-1}\Big(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}+k\Big)_{n-k-1}}{(1+k)_{n-k}(3+k)_{n-k}}e_k^*$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(1+2k)\prod_{\nu=k}^{n-1}[\nu(\nu+3)+2\mu]}{(1+k)_{n-k}(3+k)_{n-k}}-\frac{2(1+k)\prod_{\nu=k}^{n-1}[\nu(\nu+1)-2(1-\mu)]}{(k)_{n-k+1}(2+k)_{n-k+1}}\right\}D_k^*$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\prod_{\nu=k}^{n-2}[\nu(\nu+3)+2\mu]}{(1+k)_{n-k}(3+k)_{n-k}}e_k^* \qquad \text{(ix)}$$

式(ix)中定义$\prod_{\nu=k}^{k-1}[\cdots]=1$, $\prod_{\nu=k}^{k-2}[\cdots]=0$;

$$G_1^* = \frac{1}{2(1-\mu)^2}, \qquad G_2^* = \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)^2\mu^2} \qquad \text{(x)}$$

而

$$d_n^{*(1)} = \frac{\Big(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\Big)_n\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\Big)_n}{n!(3)_n} \qquad \text{(xi)}$$

$$d_n^{*(2)} = \frac{\Big(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\Big)_n\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-8\mu}\Big)_n}{n!(3)_n} \qquad \text{(xii)}$$

$$D_n^{**(1)} = -d_n^{*(1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+\sqrt{9-8\mu})} \qquad \text{(xiii)}$$

$$D_n^{**(2)} = -d_n^{*(2)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k-\sqrt{9-8\mu})} \qquad \text{(xiv)}$$

参 考 文 献

[1] Abramowitz, Milton and Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards (U. S. A.), Applied Mathematics Series, №55, Washington, D. C. (1966).

Studies on Bihypergeometric Equation

Wang Shen-xing

(*China Tianjin Chemical Engineering Corporation, Tianjin*)

Abstract

This paper is offered to introduce a new differential equation, bihypergeometric equation, and to give its solutions.